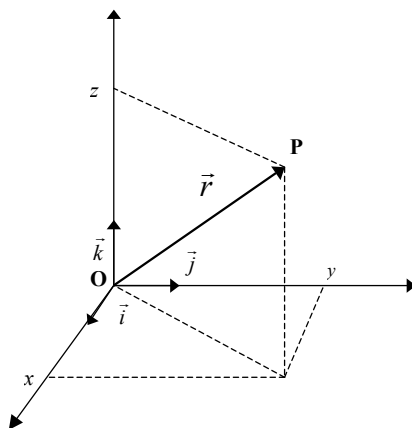


1 Kinematika hmotného bodu

1.1 Polohový vektor, rýchlosť, zrýchlenie bodu



Obr. 1.1

Najjednoduchšou zmenou, ktorú možno pozorovať v prípade telesa, je zmena jeho polohy vzhľadom k inému telesu v čase. Túto zmenu nazývame pohybom. Pri skúmaní pohybu sú dôležité odpovede na dva typy otázok - ako sa pohyb deje a prečo sa deje. Odpoveď na prvú otázku dáva kinematika, ktorá sa zaoberá matematickým popisom pohybu. Na druhú otázku odpovedá dynamika, ktorá skúma závislosť charakteru pohybu od jeho príčiny.

Pri niektorých pohyboch sa zaoberáme rozmermi, ktoré sú oveľa väčšie ako samotné rozmery telesa. V týchto prípadoch je vyhovujúcim priblížením nahradenie celého telesa jediným bodom, ktorému ešte priradíme vlastnosti dôležité z pohľadu dynamiky, takže budeme hovoriť o tzv. hmotnom bode. Je to myslený objekt (model), ktorý z hľadiska vzájomného pôsobenia s inými objektmi má vlastnosti reálneho telesa, pričom jeho rozmery sú zanedbateľné.

Poloha hmotného bodu v pravouhlej súradnicovej sústave je určená súradnicami x , y , z . Ak hmotný bod mení svoju polohu v čase, súradnice x , y , z sú funkciami času

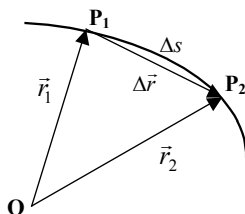
$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Polohu hmotného bodu možno popísať aj pomocou **polohového vektora** $\vec{r} =$

$\vec{r}(t)$:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

kde \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} sú konštantné jednotkové vektory, ktorých veľkosť je jedna a sú orientované pozdĺž súradnicových osí v smere ich kladnej orientácie (Obr.1.1). Polohový vektor je vektor s počiatkom v počiatku súradnicovej sústavy a s koncovým bodom totožným s aktuálnou polohou hmotného bodu. Sled polôh, ktoré hmotný bod v priestore zaujíma, nazývame **trajektóriou** pohybu. Pre kvali-



Obr. 1.2

tatívne rozlíšenie a kvantitatívne hodnotenie rôznych mechanických pohybov definujeme ďalšie fyzikálne veličiny, medzi ktoré patria predovšetkým **rýchlosť** a **zrýchlenie**.

Nech hmotný bod, ktorý sa pohybuje z bodu P_1 s polohovým vektorom \vec{r}_1 do bodu P_2 s polohovým vektorom \vec{r}_2 , prejde za časový interval Δt dráhu Δs (Obr.1.2).

Priemernú rýchlosť pohybujúceho sa bodu definujeme vzťahom:

$$v_s = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ak uvažujeme čoraz menšiu priamu vzdialenosť medzi bodmi P_1 a P_2 , časový interval Δt sa skraca a rýchlosť sa blíži svojou hodnotou k okamžitej rýchlosti v v bode P_1 , ktorá je definovaná vzťahom:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}.$$

So skracujúcim sa časovým intervalom sa znižuje rozdiel medzi $\Delta r = |\Delta \vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ a Δs a v limitnom prípade ($\Delta t \rightarrow 0$) bude platiť: $dr = ds$. Okamžitú

rýchlosť potom možno vyjadriť vzťahom:

$$v = \frac{ds}{dt},$$

kde ds nazývame elementárnou dráhou a dt elementárnym časovým intervalom.

Vektor okamžitej rýchlosti je definovaný vzťahom:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Okamžitá rýchlosť v bode P_1 je teda prvou deriváciou polohového vektora pohybujúceho sa hmotného bodu v bode P_1 podľa času. Z definície vyplýva, že rýchlosť má smer dotyčnice k dráhe pohybu v danom bode.

Vektor rýchlosti možno zapísať v zložkovom tvare:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

a pre príslušné súradnice vektora rýchlosti platí:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Veľkosť rýchlosti $|\vec{v}| = v$ vypočítame zo vzťahu:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

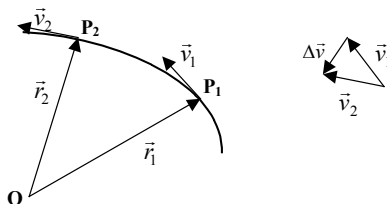
Smer vektora okamžitej rýchlosti v súradnicovej sústave $(0, x, y, z)$ možno charakterizovať uhlami $\alpha_v, \beta_v, \gamma_v$, ktoré zvierajú vektor okamžitej rýchlosti so súradnicovými osami x, y, z :

$$\cos \alpha_v = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \beta_v = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \gamma_v = \frac{v_z}{v}$$

Vo všeobecnosti vektor rýchlosti môže byť funkciou času. Na kvantifikovanie zmeny rýchlosti v čase definujeme veličinu, ktorá sa nazýva **zrýchlenie**.

Ak označíme $\Delta \vec{v}$ zmenu rýchlosti, ku ktorej došlo počas časového intervalu Δt (Obr.1.3), **priemerné zrýchlenie** definujeme vzťahom:

$$\vec{a}_s = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$



Obr. 1.3

Okamžité zrýchlenie bodu v danom mieste potom definujeme vzťahom:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}.$$

Okamžité zrýchlenie sa teda rovná prvej derivácii rýchlosti podľa času alebo druhej derivácii polohového vektora podľa času.

Pre vektor zrýchlenia v zložkovom tvare postupne dostaneme:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k} \\ \vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \end{aligned}$$

$$\text{kde } a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

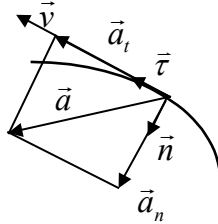
Pre veľkosť a charakteristiku smeru zrýchlenia platia analogické vzťahy ako pre vektor rýchlosti:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\cos \alpha_a = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \beta_a = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \gamma_a = \frac{a_z}{a}$$

Pri štúdiu všeobecného pohybu je často užitočné rozložiť zrýchlenie \vec{a} na **tangenciálnu** \vec{a}_t a **normálovú zložku** \vec{a}_n . Ako to vyplýva z názvu, tangenciálna zložka zrýchlenia \vec{a}_t je zložka spadajúca do smeru dotýčnice (v smere jednotkového vektora $\vec{\tau}$) v danom bode dráhy a normálová zložka \vec{a}_n je na ňu kolmá (v smere jednotkového vektora \vec{n}) (Obr. 1.4): Platí:

$$\vec{v} = v \vec{\tau}, \quad \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n, \quad a = |\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$



Obr. 1.4

Vektor zrýchlenia možno vyjadriť pomocou definičného vzťahu takto:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Zložka $\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$ je rovnobežná s dotyčnicou v skúmanom bode.

Ukážeme, že normálová zložka zrýchlenia je kolmá na tangenciálnu zložku zrýchlenia. Platí:

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1.$$

Diferencovaním tejto rovnice postupne dostaneme:

$$d(\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}) = 0,$$

$$2\vec{\tau} \cdot d\vec{\tau} = 0.$$

Z poslednej rovnice vyplýva, že platí $\vec{\tau} \perp d\vec{\tau}$.

Zložka $\vec{a}_n = v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ je teda kolmá na tangenciálnu zložku - je to normálová zložka zrýchlenia.

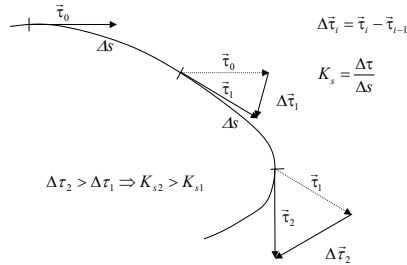
Vzťah pre normálové zrýchlenie môžeme upraviť pomocou tzv. polomeru krivosti. Uvažujme všeobecnú priestorovú krivku (Obr.1.5). Veličinu K , definovanú vzťahom

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{\tau}|}{\Delta s} = \frac{|d\vec{\tau}|}{ds} = \frac{d\tau}{ds},$$

nazývame **krivosť** v danom bode. Jej prevrátená hodnota $R = \frac{1}{K}$ sa nazýva **polomer krivosti**.

Keďže platí $d\tau = \frac{ds}{R}$, normálová zložka zrýchlenia sa dá upraviť nasledovne:

$$\vec{a}_n = v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = v\frac{d\tau}{dt}\vec{n} = v\frac{ds}{dt}\frac{1}{R}\vec{n} = \frac{v^2}{R}\vec{n}.$$



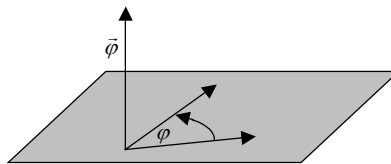
Obr. 1.5

Ak získané výsledky zhrnieme, dostávame pre jednotlivé zložky zrýchlenia vzťahy:

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}, \quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n}.$$

Tangenciálne zrýchlenie vyjadruje zmenu veľkosti rýchlosti a normálové zrýchlenie zmenu smeru rýchlosti.

Pri hodnotení krivočiarych pohybov často používame uhlové fyzikálne veličiny. Najprv popíšeme postup, ako priradíme uhlu vektor. Vektor uhla je kolmý na rovinu, v ktorej sa tento uhol vytvára. Jeho veľkosť (absolútna hodnota) sa rovná veľkosti tohto uhla. Vektor uhla je orientovaný tým smerom, odkiaľ sa jeho vytváranie javí proti smeru pohybu hodinových ručičiek (Obr.1.6): **Veľkosť**



Obr. 1.6

uhlovej dráhy je uhol, ktorý vytvára polohový vektor pohybujúceho sa bodu s nejakým pevne zvoleným smerom (napr. so smerom polohového vektora v momente počiatku merania času $t = 0$). **Vektor uhlovej rýchlosti** definujeme

vzťahom:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt},$$

kde $d\vec{\varphi}$ je vektor elementárneho uhla opísaného polohovým vektorom (sprievodičom) za elementárny časový interval dt .

Pomocou takto zavedenej uhlovej rýchlosti možno definovať **uhlové zrýchlenie**:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$$

ako deriváciu vektora uhlovej rýchlosti $\vec{\omega}$ podľa času, alebo druhú deriváciu vektora uhlovej dráhy $\vec{\varphi}$ podľa času.

Pohyby rozdeľujeme spravidla podľa časovej závislosti veľkosti rýchlosti a podľa tvaru dráhy. Z hľadiska časovej zmeny veľkosti rýchlosti potom hovoríme o rovnomernom a nerovnomernom pohybe a z hľadiska tvaru dráhy o priamočiariom a krivočiariom pohybe.

V prípade pohybu v rovine, všetky tri vektory - $\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$ ležia na spoločnej priamke, ktorá je kolmá na rovinu pohybu a na popis pohybu potom stačia skalárne veličiny φ , ω , α , pre ktoré platí:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

1.2 Niektoré typy pohybov

1.2.1 Priamočiary pohyb

V prípade, že sa teleso pohybuje po priamke, napr. pozdĺž jednej súradnicovej osi, polohový vektor, vektory rýchlosti a zrýchlenia ležia v jednej priamke, hovoríme o **priamočiariom pohybe** a na popis takéhoto pohybu stačia dve skalárne rovnice:

$$v = \int a(t) dt, \quad s = \int v(t) dt,$$

kde v je rýchlosť a s je poloha hmotného bodu v časovom okamihu t .

Ak je zrýchlenie telesa nulové, ide o **priamočiary rovnomerný pohyb** popísaný rovnicami:

$$v = v_0, \quad s = v_0 t + s_0.$$

Ak je zrýchlenie hmotného bodu konštantné ($a = \text{konšt.}$), rovnice nadobudnú tvar:

$$v = at + v_0, \quad s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0,$$

kde v_0 je rýchlosť a s_0 dráha v čase $t = 0$.

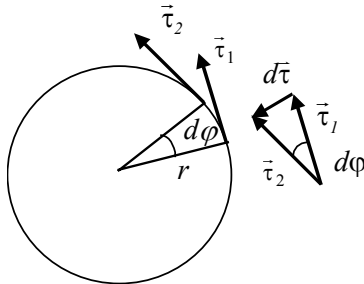
V prípade, že vektor rýchlosti a zrýchlenia majú rovnakú (opačnú) orientáciu, hovoríme o **priamočiarom rovnomerne zrýchlenom (spomalenom) pohybe**.

Pri vertikálnom pohybe v gravitačnom poli ($a = g$), tieto pohyby nazývame voľný pád ($v_0 = 0$), vrh zvislý nadol ($\vec{v} \downarrow \vec{g} \downarrow$), vrh zvislý nahor ($\vec{v} \uparrow \vec{g} \downarrow$).

1.2.2 Pohyb po kružnici

Pohyb po kružnici je zvláštny prípad krivočiareho pohybu. Ide o rovinný pohyb, ktorého trajektória má tvar kružnice v danej rovine. Priamka vedená stredom tejto kružnice kolmo na jej rovinu sa nazýva **os otáčania (rotácie)**. Polohový vektor bodu vzhľadom na stred kružnice (sprievodič) má v tomto prípade konštantnú veľkosť, avšak jeho smer v rovine dráhy sa mení.

Ľahko môžeme ukázať, že polomer krivosti je totožný s polomerom kruhovej dráhy. Stačí si uvedomiť, že sprievodič a vektor \vec{r} opíšu rovnaký uhol (Obr.1.7). Dĺžku úseku kružnice s , pri ktorom opíše sprievodič uhol φ , možno vyjadriť



Obr. 1.7

vzťahom: $s = r\varphi$, kde r je polomer kružnice. Pre elementárny úsek ds potom platí: $ds = r d\varphi$. Keďže vektory \vec{r}_1, \vec{r}_2 sú jednotkové vektory, pre veľkosť $d\tau = |d\vec{r}|$ platí: $d\tau = |\vec{r}_1| d\varphi = d\varphi$ (Obr.1.7).

Elementárny úsek ds teda možno vyjadriť ako $ds = r d\varphi = r d\tau$ a pre polomer

kružnice platí vzťah $\frac{1}{r} = \frac{dr}{ds}$, ktorý je definičným vzťahom pre polomer krivosti. Pri pohybe po kružnici je teda polomer krivosti zhodný s polomerom kružnice. Ako bolo uvedené v predchádzajúcej časti, vektory $\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$ ležia na tej istej priamke, kolmej na rovinu pohybu, pretože pohyb po kružnici je pohyb v rovine, a teda vystačíme so skalárnym popisom, t. j.:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Keďže platí $ds = rd\varphi$, ľahko možno nájsť súvis medzi veľkosťami obvodovej a uhlovej rýchlosti:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{rd\varphi}{dt} = r\omega.$$

Pre tangenciálne zrýchlenie potom platí:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha.$$

Pre normálové zrýchlenie dostaneme:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2.$$

Periódou alebo dobu obehu T definujeme ako časový interval, ktorý hmotný bod potrebuje na jeden obeh pri danej uhlovej rýchlosti, t.j.:

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Frekvencia $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ je počet otáčok za sekundu.

Ak je závislosť uhlového zrýchlenia od času známa, možno určiť závislosť uhlovej rýchlosti od času, pretože platí:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \omega = \int \alpha(t) dt.$$

Analogickým spôsobom možno zo známej závislosti uhlovej rýchlosti pohybujúceho sa telesa od času odvodiť závislosť uhlovej dráhy od času, pretože platí:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \varphi = \int \omega(t) dt.$$

Ak je uhlové zrýchlenie hmotného bodu konštantné, hovoríme o **rovnomerne zrýchlenom (spomalenom) pohybe po kružnici**. Pohyb možno popísať rovnicami:

$$\omega = at + \omega_0, \quad \varphi = \frac{1}{2}at^2 + \omega_0 t + \varphi_0,$$

kde ω_0 a φ_0 sú uhlová rýchlosť a uhlová dráha v čase $t = 0$.

Ak je uhlové zrýchlenie nulové, teleso sa pohybuje po kružnici **rovnomerným pohybom**, pre ktorý platia rovnice:

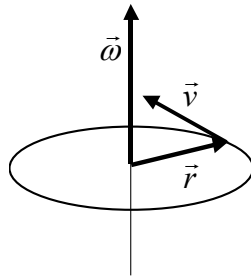
$$\omega = \omega_0, \quad \varphi = \omega_0 t + \varphi_0,$$

kde ω_0 a φ_0 sú uhlová rýchlosť a uhlová dráha v čase $t = 0$.

Keďže sa hmotný bod v tomto prípade pohybuje po kružnici konštantnou rýchlosťou, tangenciálne zrýchlenie je nulové, pretože $\frac{dv}{dt} = 0$. Na rozdiel od priamočiareho rovnomerného pohybu, pri rovnomernom pohybe po kružnici má hmotný bod nenulové celkové zrýchlenie, a to zrýchlenie normálové (dostredivé), ktoré charakterizuje zmenu smeru vektora rýchlosti.

Vektorový popis súvisu medzi obvodovou a uhlovou rýchlosťou a uhlovým zrýchlením

Napriek tomu, že pohyb po kružnici je rovinný pohyb, je niekedy užitočné použiť vektorový popis. Vzájomná orientácia príslušných vektorov je znázornená na Obr.1.8.



Obr. 1.8

Vektory \vec{v} , $\vec{\omega}$, \vec{r} sú na seba kolmé, ich vzájomný súvis možno vyjadriť vektorovým súčynom:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Použitím tohto vzťahu dostávame pre zrýchlenie:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \\ &= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).\end{aligned}$$

Pre tangenciálnu a normálovú zložku zrýchlenia platí:

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r},$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}),$$

pretože vektor $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ má smer vektora \vec{v} a vektor $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ má opačný smer ako vektor \vec{r} .

2 Dynamika hmotného bodu

2.1 Newtonove pohybové zákony

Dynamika hľadá odpoveď na otázku čo zapríčiňuje pohyb a aký bude pohyb, ak je známa jeho príčina. Príčina zmeny mechanického pohybu telies tkvie vo vzájomnom pôsobení telies alebo ich častí, pričom pôvod pôsobení môže byť rôzny. Vzájomné pôsobenie telies možno popísať pomocou jediného pojmu nazvaného **sila**.

Dynamika je založená na troch základných princípoch, ktoré vyslovil v r. 1678 Isaac Newton a ktoré sa nazývajú Newtonove pohybové zákony.

2.1.1 Prvý Newtonov zákon (zákon zotrvačnosti)

Teleso zotrva v pokoji alebo rovnomernom priamočiarom pohybe, kým nie je nútené vonkajšími silami tento stav zmeniť.

Tento zákon nemožno priamo overiť, lebo nemožno vytvoriť také podmienky, aby na nejaké teleso nepôsobili iné materiálne objekty. Je výsledkom zovšeobecnenia pozorovaní potvrdzujúcich jeho správnosť. Relatívny pokoj mnohých telies okolo nás si vysvetľujeme ako výsledok vzájomnej kompenzácie rôznych silových účinkov pôsobiacich na dané teleso.

Vzhľadom na relativnosť pohybového stavu, t.j. závislosť veličín charakterizujúcich pohybový stav (rýchlosť, zrýchlenie) na voľbe konkrétnej vzťažnej sústavy, vyššie uvedená formulácia I. Newtonovho zákona implicitne predpokladá existenciu sústavy či sústav, na ktoré je jej platnosť viazaná. Sú to sústavy, ktoré sú vzhľadom na seba v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe. Takéto sústavy budeme nazývať **inerciálnymi**.

2.1.2 Druhý Newtonov zákon (princíp sily)

Ako vieme, pri rovnomernom priamočiarom pohybe je rýchlosť konštantným vektorom a zrýchlenie je nulové. Je teda prirodzené predpokladať, že pôsobením sily teleso získa určité zrýchlenie. Sila, podobne ako zrýchlenie, bude potom vektorovou veličinou. O súvisi medzi silou a zrýchlením vyslovuje 2. Newtonov zákon nasledovné tvrdenie:

Zrýchlenie, ktoré určitá sila hmotnému bodu udeľuje, je priamo úmerné pôsobiacej sile a má smer pôsobiacej sily.

Ak budeme pôsobiť na rôzne telesá rovnakou silou, zistíme, že získajú spravidla rôzne zrýchlenia. Tieto telesá sa líšia ďalšou objektívnou vlastnosťou, ktorú nazývame **hmotnosť**. Skúsenosť ukazuje, že ak chceme dosiahnuť rovnaké zrých-

lenie u rôznych telies, musíme na telesá pôsobiť tým väčšou silou, čím je väčšia hmotnosť príslušného telesa. Súvis medzi silou, zrýchlením a hmotnosťou možno vyjadriť rovnicou:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

2. Newtonov pohybový zákon sa zvyčajne vyjadruje v tvare:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Sila \vec{F} je priamo úmerná súčinu hmotnosti telesa m a zrýchlenia \vec{a} , ktoré táto sila vyvoláva.

V sústave SI máme pre mechaniku tri na sebe nezávislé základné jednotky: kilogram (kg) pre hmotnosť, meter (m) pre dĺžku a sekundu (s) pre čas. Jednotkou sily je 1 Newton. Je to taká sila, ktorá telesu o hmotnosti 1 kg udeľuje zrýchlenie 1 ms^{-2} .

Nech sa hmotný bod hmotnosti m pohybuje rýchlosťou \vec{v} . Definujeme **hybnosť** \vec{p} hmotného bodu ako dynamickú mieru jeho pohybu:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (\text{kgms}^{-1}).$$

Zmenu charakteristiky pohybového stavu - hybnosti v čase možno vyjadriť nasledovne:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

V špeciálnom prípade, ak sa hmotnosť telesa v čase nemení, platí:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a},$$

ale všeobecne možno 2. Newtonov zákon napísať v tvare:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Zmena hybnosti hmotného bodu je priamo úmerná vonkajšej sile, ktorá na hmotný bod pôsobí. Toto vyjadrenie 2. Newtonovho pohybového zákona je najvšeobecnejšie - platí v nezmenenom tvare aj v špeciálnej teórii relativity.

Princíp zotrvačnosti potom možno formulovať nasledovne: hybnosť hmotného bodu, na ktorý nepôsobia žiadne vonkajšie sily, zostáva v čase nemenná, čo

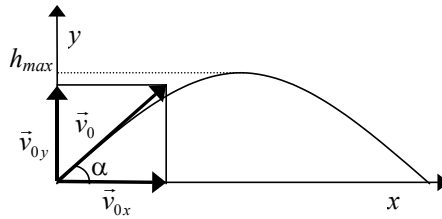
možno matematicky vyjadriť rovnicou $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, t.j., $\vec{p} = \overline{\text{konšt.}}$. Princíp zotrvačnosti teda vyjadruje zákon zachovania hybnosti pre hmotný bod.

2. Newtonov zákon možno vyjadriť vektorovou rovnicou, z ktorej postupným pre násobením jednotkovými vektormi \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} dostaneme tri skalárne rovnice:

$$ma_x = F_x, \quad ma_y = F_y, \quad ma_z = F_z.$$

Ak je známa vonkajšia sila, riešením týchto rovníc získame charakteristiky mechanického pohybu hmotného bodu - závislosť rýchlosti hmotného bodu od času a ďalším integrovaním závislosť polohy od času, preto 2. Newtonov zákon nazývame **pohybovou rovnicou**. A naopak, zo známeho priebehu polohy, prípadne rýchlosti, možno určiť vonkajšiu silu, ktorá pohyb zapríčinila.

Pohyb telesa v gravitačnom poli Zeme - šikmý vrh



Obr. 2.1

Nech je teleso vrhnuté počiatočnou rýchlosťou \vec{v}_0 pod uhlom α (Obr.2.1). Na teleso pôsobí tiažová sila $\vec{G} = -mg\vec{j}$ a pohyb sa deje v rovine xy . Súradnicovú sústavu zvolíme tak, že v časovom okamihu $t = 0$ je $x_0 = y_0 = 0$. Vektor počiatočnej rýchlosti možno vyjadriť ako vektorový súčet dvoch na seba kolmých zložiek:

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j},$$

pričom

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad \text{a} \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha.$$

Pohybové rovnice potom nadobudnú tvar:

$$F_x = m \frac{dv_x}{dt} = 0, \quad F_y = m \frac{dv_y}{dt} = -mg.$$

Z prvej rovnice dostaneme

$$dv_x = 0, \quad v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha$$

a integrovaním druhej rovnice

$$dv_y = -gdt, \quad \int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y = \int_0^t -gdt \quad \Rightarrow \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

Získali sme závislosť zložiek rýchlosti telesa od času. Ďalším integrovaním získame závislosť súradníc od času:

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2.$$

Ak z týchto dvoch rovníc vylúčime čas (vyjadríme ho z prvej rovnice a dosadíme do druhej), dostaneme matematické vyjadrenie krivky pohybu:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2,$$

čo je rovnica paraboly.

2.1.3 Tretí Newtonov zákon (princíp akcie a reakcie)

Tento zákon umožňuje prechod od dynamiky jedného hmotného bodu k dynamike sústavy hmotných bodov a hovorí: **sily, ktorými na seba pôsobia dve telesá, sú rovnako veľké opačného smeru.**

Nech \vec{F}_{12} je sila, ktorou pôsobí hmotný bod 1 na hmotný bod 2 a sila \vec{F}_{21} je sila, ktorou pôsobí hmotný bod 2 na 1, potom platí:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}.$$

Sily akcie a reakcie ležia na spoločnej priamke. Túto skutočnosť možno matematicky vyjadriť pomocou veličiny moment sily, ktorú zavedieme neskôr. **Sily akcie a reakcie pôsobia vždy na rôzne telesá, preto ich nemožno sčítať do výslednej sily a nemôžu sa navzájom rušiť.**

Poznámka

Keď na hmotný bod pôsobí súčasne niekoľko síl, potom sa výsledné zrýchlenie

hmotného bodu rovná vektorovému súčtu zrýchlení, ktoré by tomuto bodu udelili tieto sily samostatne.

Tento empirický poznatok vyjadruje tzv. princíp nezávislosti pôsobenia síl.

Platí:

$$\vec{a} = \sum \vec{a}_i = \sum \frac{\vec{F}_i}{m} = \frac{\sum \vec{F}_i}{m} \Rightarrow \vec{F} = \sum \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Je teda vidieť, že súčasné pôsobenie viacerých síl je rovnocenné s pôsobením jednej sily, tzv. výslednice síl, ktorá sa rovná vektorovému súčtu jednotlivých síl.

Toto tvrdenie platí samozrejme aj naopak: danú silu môžeme rozložiť na sily, ktorých vektorový súčet sa rovná danej sile.

2.2 Časový a dráhový účinok sily

Aj keď sa väčšina problémov v dynamike dá riešiť pomocou Newtonových pohybových zákonov, pretože to sú najvšeobecnejšie zákony, v niektorých prípadoch je takéto riešenie dosť zdlhavé. Na zjednodušenie riešenia boli z pohybových zákonov odvodené niektoré ďalšie súvislosti.

Pohybová rovnica

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

sa dá zapísať v tvare

$$m d\vec{v} = \vec{F} dt.$$

Integrujme túto rovnicu od okamihu $t = 0$, kedy sila začala pôsobiť na hmotný bod, ktorý mal v tomto okamihu rýchlosť \vec{v}_0 , po okamih t , kedy má hmotný bod rýchlosť \vec{v} :

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} m d\vec{v} = \int_0^t \vec{F} dt,$$

z tejto rovnice dostaneme

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_0^t \vec{F} dt.$$

Pravá strana tejto rovnice vyjadruje tzv. **časový účinok sily - impulz sily**

$\vec{I} = \int_0^t \vec{F} dt$, takže predchádzajúcu rovnicu možno zapísať:

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{I}.$$

Zmena hybnosti spôsobená vonkajšou silou počas časového intervalu t je určená čo do veľkosti i smeru impulzom sily.

Videli sme, že účinok sily na pohyb hmotného bodu sa dal kvantitatívne posúdiť pomocou časového intervalu, počas ktorého sila na bod pôsobila, vychádzajúc z 2. pohybového zákona. Podobne, vychádzajúc z toho istého zákona, sa dá posúdiť účinok pôsobiacej sily pomocou dráhy, pozdĺž ktorej na hmotný bod pôsobí - tzv. dráhový účinok sily.

Pohybovú rovnicu v tvare

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

vynásobme skalárne elementárnym vektorovým posunutím $d\vec{r}$:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Ľavá strana rovnice sa dá zapísať v tvare:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v} = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = mvdv$$

pretože platí $d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\vec{v} \cdot d\vec{v}$ a súčasne $d(v^2) = 2vdv$. Keďže $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$, potom je $\vec{v} \cdot d\vec{v} = vdv$.

Po dosadení dostaneme

$$mvdv = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Ak sila pôsobí na bod po dráhe, ktorej počiatočný bod je určený polohovým vektorom \vec{r}_1 a koncový bod polohovým vektorom \vec{r}_2 , pričom veľkosť rýchlosti bodu v počiatočnom bode pôsobenia sily je v_1 a v koncovom bode je v_2 , po integrovaní poslednej rovnice dostaneme

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2.1)$$

Výraz $\frac{1}{2}mv^2$ je kinetická energia E_k hmotného bodu hmotnosti m pohybujúceho sa rýchlosťou v . Na ľavej strane poslednej rovnice je rozdiel kinetických energií hmotného bodu na konci a na začiatku pôsobenia sily, ktorý vyjadruje výsledok pôsobenia sily po dráhe.

Výraz na pravej strane je definíciou **práce** W :

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^s |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \alpha = \int_0^s F ds \cos \alpha,$$

kde α je uhol medzi vektormi \vec{F} a $d\vec{r}$. Ak sila \vec{F} , pôsobiaca na hmotný bod, má nenulovú zložku ($F \cos \alpha \neq 0$) spadajúcu do smeru posunutia $d\vec{r}$, koná prácu. Práca je teda dráhovým účinkom sily.

Rovnica (2.1) sa nazýva aj **veta o kinetickej energii** a hovorí, že ak na hmotný bod pôsobí sila pozdĺž nejakej dráhy, táto sila vykoná prácu, ktorá sa prejaví v zmene kinetickej energie bodu.

Jednotka práce a kinetickej energie je rovnaká - joule: $1\text{ J} = 1\text{ kgm}^2\text{s}^{-2}$.

Vo fyzike, ale aj v praktickom živote, nás často zaujíma nielen veľkosť vykonanej práce, ale tiež časový interval, za ktorý sa práca vykonala. Na charakterizovanie tejto skutočnosti používame veličinu nazývanú výkon.

Priemerný výkon definujeme vzťahom:

$$P_s = \frac{\Delta W}{\Delta t},$$

teda ako podiel celkovej práce ΔW vykonanej počas časového intervalu Δt a tohto časového intervalu.

Vo všeobecnosti práca nemusí byť vykonávaná rovnomerne v čase a je preto užitočné zaviesť tzv. **okamžitý výkon**:

$$P = \frac{dW}{dt},$$

pričom dW je elementárna práca vykonaná za elementárny časový interval dt . Tento výraz možno upraviť nasledovne:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

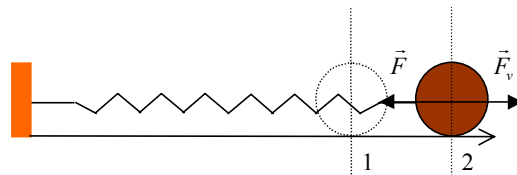
Okamžitý výkon teda možno vyjadriť skalárnym súčinom sily a rýchlosti, ktorou sa pôsobisko sily pohybuje.

Jednotkou výkonu v SI je watt ($1\text{ W} = 1\text{ Js}^{-1} = 1\text{ kgm}^2\text{s}^{-3}$).

2.3 Potenciálna energia, zákon zachovania mechanickej energie

2.3.1 Potenciálna energia

Z vety o kinetickej energii vyplýva, že ak sila pôsobí v smere pohybu hmotného bodu - jej práca je kladná, kinetická energia bodu vzrastie; ak sila pôsobí proti pohybu hmotného bodu - jej práca je záporná, kinetická energia bodu sa zmenší.



Obr. 2.2

Majme guľôčku - hmotný bod pripustený na koniec pružiny a ťahom ruky ju premiestnime z polohy 1 do polohy 2 po dráhe s ako je to na Obr.2.2.

V oboch krajných polohách má guľôčka nulovú kinetickú energiu, takže napriek tomu, že sme vykonali prácu $W_v = \int_1^2 F_v ds$, kinetická energia guľôčky sa nezmenila, guľôčka je v pokoji. To je možné v súlade s 1. pohybovým zákonom len tak, že existuje sila \vec{F} (pružná sila pružiny), pre ktorú platí:

$$\vec{F}_v + \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\vec{F}_v.$$

Nami vykonaná práca sa prejaví v tom, že sa guľôčka premiestni z polohy 1 do polohy 2 (pružina je natiahnutá). Keď ťah ruky postupne zmenšujeme, pružina vráti guľôčku do počiatočnej polohy 1. Teda napätá pružina (k jej napätiu bolo potrebné vykonať vonkajšiu prácu) má schopnosť konať prácu, čo sa prejaví pri premiestnení hmotného bodu z miesta 2 do miesta 1.

Celková práca síl pôsobiacich na hmotný bod je v tomto prípade nulová, ale prácou vonkajšej sily hmotný bod upevnený na pružine získal schopnosť konať prácu, teda má určitú formu energie, aj v prípade, že je v pokoji. Túto energiu nazývame **potenciálna energia**.

Potenciálnu energiu možno definovať len v poli **konzervatívnych síl**. Sila je konzervatívna, ak závisí iba od polohy a práca vykonaná touto silou závisí iba od počiatočného a koncového bodu dráhy, pozdĺž ktorej sila pôsobí na hmotný bod. Práca teda nezávisí od dĺžky a tvaru prejdenej dráhy. To znamená, že práca vykonaná pozdĺž uzavretej dráhy je nulová. Je treba si uvedomiť, že na rozdiel od kinetickej energie, potenciálna energia hmotného bodu závisí nielen od charakteristík hmotného bodu, ale aj od vlastností silového poľa (v tomto prípade pružiny). Preto sa pre potenciálnu energiu nedá určiť jediný konečný výraz ako pre kinetickú energiu.

Zmenu potenciálnej energie hmotného bodu pri jeho premiestnení z miesta

1 do miesta 2 v poli konzervatívnej sily \vec{F} definujeme vzťahom:

$$\Delta E_p = W_v = \int_1^2 \vec{F}_v \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Podľa uvedenej definície predstavuje zmena potenciálnej energie prácu vonkajších síl potrebnú na premiestnenie telesa medzi danými dvoma polohami za neustálej rovnováhy vonkajšej sily a sily poľa. Môžeme však určiť len zmenu potenciálnej energie a ak chceme hovoriť o potenciálnej energii v danom mieste, musíme si zvoliť jej hodnotu v jednom bode. Inými slovami potenciálna energia je určená s presnosťou na ľubovoľnú aditívnu konštantu.

Pre elementárnu zmenu potenciálnej energie zrejme platí:

$$dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Ak poznáme potenciálnu energiu hmotného bodu v poli nejakej konzervatívnej sily, pomocou nasledovného súvisu môžeme určiť pôsobiacu silu:

$$\begin{aligned} -\vec{F} \cdot d\vec{r} &= dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz = \\ &= \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}) = \\ &= \vec{\nabla} E_p \cdot d\vec{r} = \text{grad} E_p \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

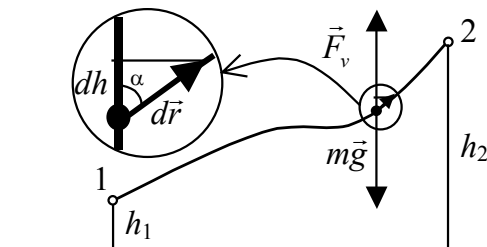
a teda

$$\vec{F} = -\text{grad} E_p.$$

Potenciálna energia telesa v malej výške v gravitačnom poli Zeme

Jedným z najznámejších prípadov poľa konzervatívnych síl je gravitačné pole. Vyjadríme zmenu potenciálnej energie telesa hmotnosti m pri jeho prenesení z miesta 1 vo výške h_1 nad zemským povrchom do miesta 2 vo výške h_2 nad zemským povrchom (Obr. 2.32.3). Obidve výšky sú oveľa menšie ako je polomer Zeme. Pri premiestnení telesa vykonajú vonkajšie sily prácu W_v , ktorá sa rovná nárastu potenciálnej energie telesa v gravitačnom poli:

$$\begin{aligned} W_v = \Delta E_p &= \int_1^2 \vec{F}_v \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \left| \vec{F}_v \right| |d\vec{r}| \cos \alpha = \\ &= \int m g ds \cos \alpha = \int_{h_1}^{h_2} m g dh = m g h_2 - m g h_1, \end{aligned}$$



Obr. 2.3

pretože platí

$$\frac{dh}{ds} = \cos \alpha \Rightarrow ds \cos \alpha = dh.$$

Vykonaná práca a zmena potenciálnej energie nezávisí od tvaru ani dĺžky trajektórie, ale závisí iba od počiatočnej a konečnej polohy telesa v gravitačnom poli.

Pre potenciálnu energiu telesa hmotnosti m , ktoré je v nie veľkej výške h nad zemským povrchom, vzhľadom na povrch Zeme platí:

$$E_p = mgh.$$

2.3.2 Zákon zachovania mechanickej energie

Z definície potenciálnej energie pre prácu síl v konzervatívnom silovom poli a z vety o kinetickej energii môžeme písať:

$$-\Delta E_p = W, \quad \Delta E_k = W,$$

kde

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}, \quad \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}$$

a z rovnosti pravých strán prvých dvoch rovníc dostaneme:

$$-(E_{p2} - E_{p1}) = E_{k2} - E_{k1},$$

alebo

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}.$$

Ak definujeme **celkovú mechanickú energiu** E telesa ako súčet kinetickej a potenciálnej energie

$$E = E_k + E_p,$$

potom z poslednej rovnice pre mechanickú energiu telesa v poli konzervatívnych síl platí:

$$E = E_k + E_p = \text{konšt.}$$

Celková mechanická energia telesa, na ktoré pôsobia len konzervatívne sily, ostáva konštantná, teda celková mechanická energia v poli konzervatívnych síl sa zachováva. Tento výsledok sa nazýva **zákon zachovania mechanickej energie** pre konzervatívne sily. Je zvláštnym prípadom všeobecného zákona - **zákona zachovania energie**: celková energia izolovanej sústavy (všetky vonkajšie pôsobenia na ňu sú nulové) je konštantná, rôzne formy energie sa však vo vnútri sústavy môžu vzájomne meniť jedna na druhú. Zákon zachovania energie patrí medzi niekoľko základných najvšeobecnejších prírodných zákonov.

Zákon zachovania mechanickej energie v gravitačnom poli Zeme

a) Zvislý vrh nahor

Hmotný bod hmotnosti m bol vrhnutý zvisle nahor. Pohybuje sa rovnomerne spomaleným pohybom až do maximálnej výšky h_{max} , potom padá voľným pádom na zemský povrch. Pre ľubovoľné dva body, napr. bod 1 vo výške h_1 kde má hmotný bod rýchlosť v_1 a bod 2 vo výške h_2 , s rýchlosťou hmotného bodu v_2 , platí podľa zákona zachovania mechanickej energie hmotného bodu v gravitačnom poli Zeme:

$$E_1 = E_2$$

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2.$$

Pri pohybe nahor teda kinetická energia hmotného bodu klesá, pretože jeho rýchlosť sa znižuje až po maximálnu výšku, kde je rýchlosť a teda aj kinetická energia nulová, a súčasne potenciálna energia sa zväčšuje s rastúcou výškou až po maximálnu výšku, kde je potenciálna energia maximálna. Od tohto bodu padá voľným pádom, pričom s klesajúcou výškou klesá potenciálna energia až na nulu v bode dopadu a súčasne rastie s rýchlosťou aj kinetická energia až na svoju maximálnu hodnotu v bode dopadu.

Ak teda bodom 1 je maximálna výška h_{max} a bodom 2 je bod dopadu, kde rýchlosť má hodnotu v_{max} , zo zákona zachovania mechanickej energie máme:

$$0 + E_{p \max} = E_{k \max} + 0$$

$$mgh_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2.$$

b) Šikmý vrh

Pomocou zákona zachovania mechanickej energie hmotného bodu hmotnosti m vrhnutého šikmo nahor pod uhlom α v gravitačnom poli Zeme môžeme veľmi jednoducho získať hodnotu maximálnej výšky hmotného bodu pri tomto pohybe. Zapišeme celkovú mechanickú energiu bodu v mieste dopadu (alebo vrhnutia), keď je potenciálna energia nulová (výška je nulová) a rýchlosť je rovná počiatkovej rýchlosti v_0 a v bode maximálnej výšky h_{max} , kedy rýchlosť hmotného bodu má iba x -ovú zložku v_x (y -ová zložka rýchlosti je v tomto mieste nulová) a dáme ich do rovnosti:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_x^2 + mgh_{\max},$$

celú rovnicu možno predeliť hmotnosťou m (maximálna výška nebude závisieť od hmotnosti) a po úprave dostaneme:

$$h_{\max} = \frac{1}{2g} (v_0^2 - v_x^2).$$

Po dosadení $v_x = v_0 \cos \alpha$ dostaneme pre maximálnu výšku vzťah:

$$h_{\max} = \frac{1}{2g} v_0^2 (1 - \cos^2 \alpha) = \frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2 \alpha.$$

4 Dynamika tuhého telesa

4.1 Pohybové rovnice a podmienky rovnováhy tuhého telesa

Dokonale tuhé teleso je špeciálnym prípadom sústavy hmotných bodov, v ktorej sa vzájomná vzdialenosť hmotných bodov nemení. Hmotné body sú tak blízko seba, že hmotnosť tuhého telesa považujeme za spojito rozloženú.

Pohybové rovnice (veta o pohybe ťažiska a veta o momente hybnosti), tak ako sme ich odvodili pre sústavu hmotných bodov, platia i v prípade tuhého telesa a spoločne úplne charakterizujú pohyb tuhého telesa. V prípade spojitého telesa je ale potrebné diskrétny súčet nahradiť spojitým, t.j. integráciou.

Matematické vyjadrenie vety o hybnosti a vety o momente hybnosti teda je:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Keď je teleso v pokoji, rýchlosť a zrýchlenie jeho ťažiska sa rovnajú nule, takže podľa prvej rovnice aj súčet všetkých síl na teleso pôsobiacich sa rovná nule. Keď je teleso v pohybe, nule sa rovná aj jeho celkový moment hybnosti a teda aj jeho časová zmena. Z druhej rovnice potom plynie, že aj súčet momentov všetkých vonkajších síl na teleso pôsobiacich sa rovná nule a to vzhľadom na každý bod, lebo ak súčet vonkajších síl sa rovná nule, súčet ich momentov vzhľadom na každý bod je rovnaký.

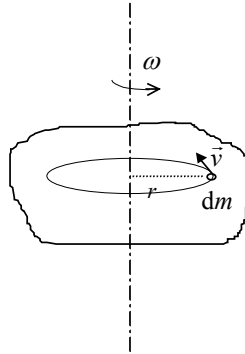
Podmienkou **rovnováhy** tuhého telesa teda je aby vektorový súčet všetkých síl a vektorový súčet ich momentov vzhľadom na ľubovoľný bod sa rovnali nule.

Ďalej sa budeme zaoberať otáčavým pohybom tuhého telesa. Budeme uvažovať otáčavý pohyb telesa v súradnicovej sústave, kde os otáčania nemení svoju polohu a budeme tento pohyb nazývať otáčaním okolo pevnej osi. Pri otáčavom pohybe telesa sa všetky jeho body pohybujú po kružniciach, pričom stredy týchto kružníc ležia na priamke, ktorá sa nazýva os otáčania. Kružnice ležia v rovinách kolmých na os otáčania. V danom časovom intervale opíšu všetky body rovnaký uhol a teda majú rovnakú uhlovú rýchlosť. (Pri posuvnom pohybe sa pohybujú všetky body telesa po priamkach a v danom časovom intervale prejdú rovnakú vzdialenosť - majú rovnakú rýchlosť).

4.2 Kinetická energia telesa rotujúceho okolo pevnej osi

Ak sa tuhé teleso otáča okolo pevnej osi, jeho ľubovoľný hmotnostný element dm sa pohybuje po kružnici polomeru r (Obr.4.1). Pre kinetickú energiu tohto

elementu môžeme písať:



Obr. 4.1

$$dE_k = \frac{1}{2}v^2 dm,$$

kde v je rýchlosť elementu dm . Celková kinetická energia telesa pri otáčavom pohybe sa rovná súčtu kinetických energií všetkých jeho hmotnostných elementov, t.j.,

$$E_k = \int dE_k = \int \frac{1}{2}v^2 dm = \frac{1}{2} \int v^2 dm.$$

Ak využijeme súvis medzi obvodovou a uhlovou rýchlosťou $v = r\omega$, a uvedomíme si, že uhlová rýchlosť je rovnaká pre všetky elementy, dostaneme:

$$E_k = \frac{1}{2} \int dm (\omega r)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 I.$$

Veličina definovaná integrálom

$$I = \int r^2 dm$$

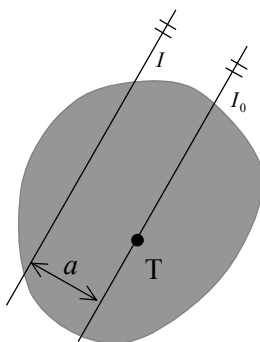
sa nazýva **moment zotrvačnosti**. V prípade otáčajúceho sa telesa je to moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania. Je mierou zotrvačných vlastností otáčajúceho sa telesa, podobne ako ňou je hmotnosť pri postupnom pohybe. Z definície je vidieť, že moment zotrvačnosti nezávisí iba od hmotnosti telesa, ale aj od jej rozloženia vzhľadom na os otáčania.

Ak teleso nie je upevnené a pôsobia naň vonkajšie sily, môže jeho ťažisko konať postupný pohyb a celé teleso môže konať aj otáčavý pohyb okolo osi prechádzajúcej ťažiskom.

V tomto prípade sa výsledná kinetická energia pohybujúceho sa telesa rovná súčtu kinetickej energie rotácie okolo osi prechádzajúcej ťažiskom a kinetickej energie postupného pohybu spojeného s pohybom ťažiska

$$E_k = \frac{1}{2}I_0\omega^2 + \frac{1}{2}mv_T^2.$$

Steinerova veta. Na výpočet momentu zotrvačnosti rôznych telies sa využíva



Obr. 4.2

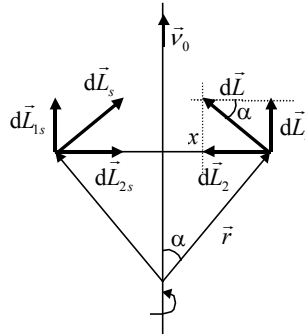
Steinerova veta, ktorá hovorí, že ak I je moment zotrvačnosti telesa hmotnosti m vzhľadom na ľubovoľnú os a I_0 je jeho moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom a rovnobežnú s prvou osou, pričom vzdialenosť oboch osí je a (Obr.4.2), potom platí:

$$I = I_0 + ma^2.$$

4.3 Moment hybnosti, pohybová rovnica rotujúceho telesa

Budeme uvažovať symetrické teleso, ktoré sa otáča okolo osi symetrie. Príspevok do celkového momentu hybnosti od ľubovoľného elementu hmotnosti dm je

$$d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{p} = \vec{r} \times \vec{v}dm,$$



Obr. 4.3

kde \vec{r} je jeho polohový vektor vzhľadom na ľubovoľný bod na osi a \vec{v} je obvodová rýchlosť (Obr.4.3). Ku každému vybranému elementu existuje element s ním symetrický vzhľadom na os otáčania. Rozložme oba príspevky k celkovému momentu hybnosti od vybraného elementu a od elementu s ním symetrického na dve na seba kolmé zložky: $d\vec{L}_1$, $d\vec{L}_{s1}$ - zložky rovnobežné s osou otáčania a zložky kolmé na os: $d\vec{L}_2$, $d\vec{L}_{s2}$. Je vidieť, že kolmé zložky k celkovému momentu hybnosti neprispievajú, pretože sú rovnako veľké a opačne orientované.

Výsledný moment hybnosti sa bude rovnať súčtu zložiek rovnobežných s osou otáčania od všetkých elementov. Tým je určený aj jeho smer - bude ležať v osi otáčania (smer jednotkového vektora \vec{v}_0).

$$\vec{L} = L\vec{v}_0$$

$L = \int dL_l$, kde $dL_1 = dL \sin \alpha$ a $dL = |\vec{r} \times \vec{v}| dm = r v dm$, teda $dL_1 = r v \sin \alpha dm = v x dm$, lebo z trojuholníka (Obr.4.3): $\frac{x}{r} = \sin \alpha$, keď x je kolmá vzdialenosť daného elementu od osi otáčania, teda jeho polomer otáčania.

Ak využijeme súvis obvodovej a uhlovej rýchlosti $v = x\omega$, máme

$$dL_1 = \omega x^2 dm,$$

odkiaľ

$$L = \int dL_1 = \int \omega x^2 dm = \omega \int x^2 dm = \omega I$$

$$\vec{L} = I\omega\vec{v}_0 = I\vec{\omega}.$$

Moment hybnosti je mierou otáčavého pohybu telesa. Jeho veľkosť sa rovná súčinu momentu zotrvačnosti telesa a jeho uhlovej rýchlosti. Smer leží v osi otáčania.

Ak do vety o momente hybnosti dosadíme za moment hybnosti podľa posledného vzťahu, dostaneme **pohybovú rovnicu** pre otáčajúce sa teleso:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}I) = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha},$$

ktorá hovorí, že celkový moment síl vzhľadom na pevnú os pôsobiaci na teleso otáčajúce sa okolo tejto osi sa rovná súčinu jeho momentu zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania a uhlového zrýchlenia. Keďže v uvažovanom prípade symetrického rotujúceho telesa všetky uvedené vektory ležia v osi otáčania, môžeme používať aj skalárny tvar pohybovej rovnice:

$$M = I\alpha.$$

Vyššie uvedené vzťahy pre moment hybnosti a moment sily platia aj pre teleso nesymetrické vzhľadom na os otáčania, avšak len pre zložky momentu hybnosti a momentu sily ležiace v osi otáčania.

Kyvadlá

a) Fyzikálne kyvadlo je ľubovoľné teleso, ktoré sa vplyvom vlastnej tiaže (v gravitačnom poli Zeme) kýve okolo vodorovnej osi neprechádzajúcej ťažiskom telesa (Obr.4.4) a preto ho možno riešiť použitím pohybovej rovnice pre otáčavý pohyb tuhého telesa:

$$I\vec{\alpha} = \vec{M}.$$

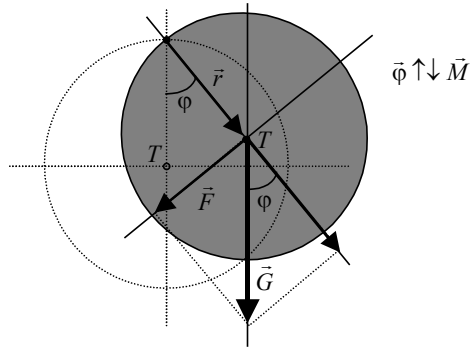
V prípade fyzikálneho kyvadla vektory $\vec{\alpha}$ a $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{G}$ ležia v osi otáčania, ale sú opačne orientované, preto skalárna pohybová rovnica má tvar:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgr \sin \varphi$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgr}{I} \sin \varphi,$$

v ktorej označíme $\frac{mgr}{I} = \omega^2$, kde ω^2 je kladná konštanta. Ak kmity kyvadla sú malé, s dostatočnosťou presnosťou platí, že $\sin \varphi = \varphi$, a rovnica nadobudne tvar:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega^2\varphi.$$



Obr. 4.4

Je to diferenciálna rovnica druhého rádu bez pravej strany a jej riešením je funkcia typu:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \beta),$$

kde φ_0 je maximálna výchylka, β je fázová konštanta a ω je uhlová frekvencia. Pre dobu kmitu fyzikálneho kyvadla potom dostávame:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr}}.$$

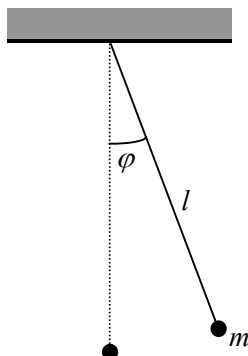
b) Matematické kyvadlo je špeciálnym prípadom fyzikálneho kyvadla. Prakticky ho možno zrealizovať tak, že zavesíme guľôčku, ktorá predstavuje hmotný bod, na niť zanedbateľnej hmotnosti (Obr.4.5).

Pre moment zotrvačnosti matematického kyvadla platí:

$$I = ml^2,$$

kde m je hmotnosť guľôčky a l je dĺžka nite (tiež je $r = l$). Ak tento výraz dosadíme za moment zotrvačnosti do výrazu pre dobu kmitu fyzikálneho kyvadla, pre dobu kmitu matematického kyvadla dostaneme:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$



Obr. 4.5

4.4 Práca, výkon, veta o kinetickej energii

Nech M je moment sily pôsobiaci na teleso, ktoré sa môže otáčať okolo pevnej osi a nech $d\varphi$ je elementárny uhol, o ktorý sa teleso otočilo počas elementárneho časového intervalu dt . Súčin $Md\varphi$ možno zapísať v tvare:

$$Md\varphi = I\alpha d\varphi = I \frac{d\omega}{dt} d\varphi = I \frac{d\varphi}{dt} d\omega = I\omega d\omega = d\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right).$$

Výraz na pravej strane je elementárna zmena kinetickej energie, ku ktorej môže dôjsť vtedy, ak sa vykoná práca. Výraz na ľavej strane je teda elementárna práca vykonaná vonkajšími silami:

$$dW = Md\varphi.$$

Integráciou dostaneme vzťah pre celkovú **prácu** W vykonanú vonkajšími silami pri otočení telesa o uhol $\varphi_2 - \varphi_1$:

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} Md\varphi.$$

Vetu o kinetickej energii v prípade otáčavého pohybu tuhého telesa okolo pevnej osi možno zapísať v tvare:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} Md\varphi = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega$$

$$W = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2,$$

kde ω_1 a ω_2 sú uhlové rýchlosti otáčania tuhého telesa na počiatku a na konci pôsobenia momentu vonkajších síl M .

Výkon, ako práca vykonaná za jednotku času, je v prípade otáčavého pohybu tuhého telesa daný vzťahom:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{Md\varphi}{dt} = M\omega.$$

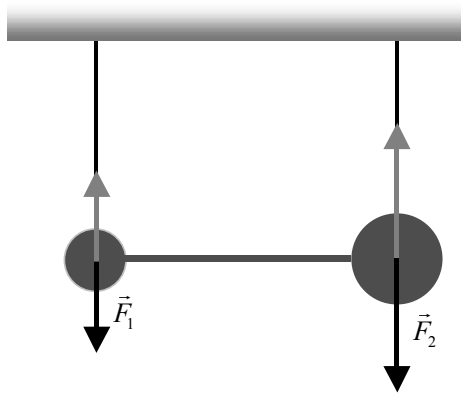
3 Dynamika sústavy hmotných bodov

3.1 Ťažisko sústavy hmotných bodov a telesa

Najjednoduchšou sústavou hmotných bodov sú dva hmotné body, ktorých hmotnosti označíme m_1 a m_2 . Z praktických dôvodov je potrebné definovať podmienky, za ktorých je sústava hmotných bodov v pokoji. Keby sme mali napr. činku s ťažkými závažiami spojenými tyčou zanedbateľnej hmotnosti, závažia na seba pôsobia gravitačnou silou. Tieto sily sú silami akcie a reakcie. Činka je však kvôli tomu, že sú závažia prepojené tyčou, v pokoji. Výslednica vnútorných interakčných síl v sústave je nulová

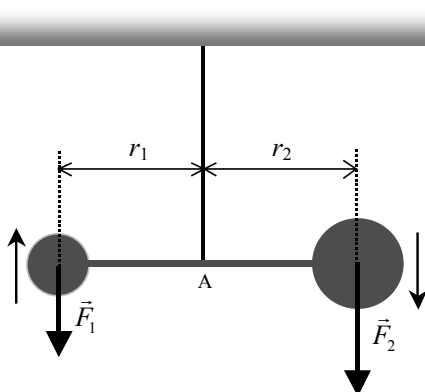
$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = 0.$$

Ak činku umiestnime do gravitačného poľa Zeme tak, aby sa nachádzala voľne



Obr. 3.1

v priestore nad zemským povrchom, účinkom gravitačnej sily sa začne pohybovať smerom nadol. Aby sme ju udržali v pokoji, je potrebné pôsobiť na obe závažia silou rovnako veľkou, ale opačne orientovanou. Môžeme to zrealizovať zavesením závaží na laná upevnené na konzole - gravitačná sila je kompenzovaná ťahom závesu (Obr.3.1). Sústava, teda činka, je v pokoji, ak výslednica všetkých vonkajších síl, ktoré na sústavu pôsobia, je nulová. Matematicky toto



Obr. 3.2

tvrdenie možno vyjadriť jednoduchou rovnicou:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0.$$

Činku je možné zavesiť aj v jednom bode A, ak lano upevníme na tyč (Obr.3.2). Keď to však prakticky skúsime, zistíme, že pri zavesení v strede tyče, závažia nezostanú v horizontálnej rovine, ale sa dajú do pohybu (Obr.3.3). Miera otáčavého účinku M bude tým väčšia, čím je vzdialenosť miesta upevnenia od ťažšieho závažia r_2 väčšia a čím je závažie ťažšie a čím je vzdialenosť r_1 od ľahšieho závažia menšia a závažie ľahšie. Matematicky to možno vyjadriť rovnicou:

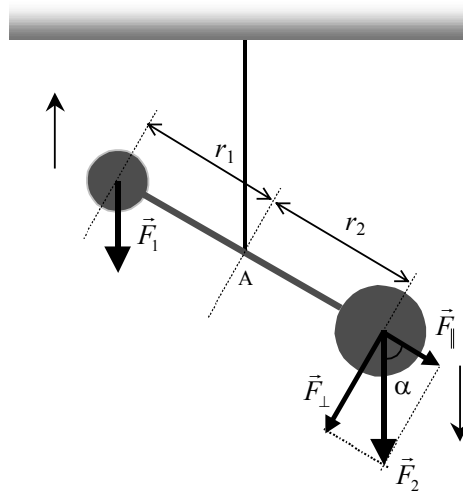
$$M = r_2 F_2 - r_1 F_1.$$

V prípade, že uhol medzi vektorom sily a polohovým vektorom jej pôsobiska vzhľadom na bod A je iný ako pravý (Obr.3.3), na otáčavý účinok má vplyv len tá zložka sily, ktorá je na polohový vektor kolmá, teda platí

$$M = r F_{\perp} = r F \sin \alpha.$$

Otáčavý účinok M možno chápať ako vektorovú veličinu a poslednú rovnicu môžeme zapísať vo vektorom tvare:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$



Obr. 3.3

Veličinu \vec{M} nazývame **moment sily**. Aby činka bola v gravitačnom poli v pokoji, musíme miesto závesu zvoliť tak, aby sa otáčavé účinky síl \vec{F}_1 a \vec{F}_2 kompenzovali, teda aby platilo: $\vec{M}_1 = -\vec{M}_2$ ($M_1 = M_2$, teda $r_2 F_2 = r_1 F_1$). Všeobecne platí, že sústava je v pokoji, ak výslednica momentov všetkých síl je nulová:

$$\sum_i \vec{M}_i = 0.$$

Bod na tyči, kde treba činku upevniť, aby bola splnená táto podmienka, sa chová tak, ako keby v ňom bola sústredená celá hmotnosť sústavy a tento bod nazývame ťažiskom sústavy.

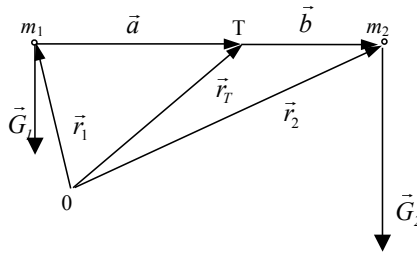
Pre veľkosti momentov tiažových síl sústavy dvoch bodov s hmotnosťami m_1 a m_2 vzhľadom na ťažisko (Obr.3.4) platí:

$$M_1 = m_1 g a \sin \frac{\pi}{2}$$

$$M_2 = m_2 g b \sin \frac{\pi}{2}$$

$$M_1 = M_2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow a = b \frac{m_2}{m_1}$$

V zhode s označením na obrázku pre polohový vektor ťažiska dostaneme:



Obr. 3.4

$$\vec{r}_T = \vec{r}_1 + \vec{a} = \vec{r}_1 + \vec{b} \frac{m_2}{m_1} = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_T) \frac{m_2}{m_1}$$

$$\vec{r}_T = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Analogicky možno definíciu polohového vektora ťažiska rozšíriť na n bodov. V tomto prípade dostaneme:

$$\vec{r}_T = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i.$$

Túto definíciu môžeme ďalej rozšíriť na teleso so spojitou rozloženou hmotnosťou tak, že sumáciu nahradíme integráciou:

$$\vec{r}_T = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm,$$

kde integráciu treba urobiť cez celé teleso, pričom \vec{r} je polohový vektor hmotnostného elementu dm telesa. Ťažisko v tomto prípade možno chápať ako hmotný bod, ktorým sme sa zaoberali v predchádzajúcich častiach. A teda hmotným bodom, pokiaľ je tento hmotný bod ťažiskom, možno v niektorých prípadoch nahradiť teleso so spojitou rozloženou hmotnosťou (napr. závažia činky sme chápali ako hmotné body).

3.2 Veta o hybnosti sústavy - veta o pohybe ťažiska

Predpokladajme, že na sústavu hmotných bodov budú pôsobiť vonkajšie sily, v súlade s druhým pohybovým zákonom pre i -tý hmotný bod platí $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$, kde \vec{F}_i je výslednica vonkajších síl pôsobiacich na i -tý hmotný bod. Výslednica všetkých síl pôsobiacich na sústavu potom bude

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i m_i \vec{a}_i \quad (3.1)$$

pričom platí

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i.$$

Teda pre výslednicu síl platí vzťah

$$\vec{F} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i,$$

ktorý možno ďalej upraviť na tvar

$$\vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}_T}{dt^2} = m\vec{a}_T, \quad (3.2)$$

ak zoberieme do úvahy, že pre polohový vektor ťažiska možno písať $\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = m\vec{r}_T$.

Rovnica (3.2) hovorí, že vektorový súčet všetkých síl \vec{F} pôsobiacich na sústavu sa rovná súčinu celkovej hmotnosti sústavy a zrýchlenia jej ťažiska, čo znamená, že ťažisko sústavy sa pohybuje ako častica hmotnosti m , na ktorú pôsobí výsledná sila \vec{F} . Kvôli tomu rovnicu (3.2) nazývame aj **veta o pohybe ťažiska**.

Ak pre hmotný bod využijeme definíciu hybnosti $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$, rovnicu (3.1) možno zapísať v tvare

$$\vec{F} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

kde \vec{p} je celková hybnosť sústavy.

Posledná rovnica hovorí, že vektorový súčet všetkých síl \vec{F} pôsobiacich na sústavu sa rovná derivácii celkovej hybnosti sústavy podľa času a nazýva sa **veta**

o hybnosti sústavy (iný tvar vety o pohybe ťažiska).

Ak je výslednica vonkajších síl \vec{F} pôsobiacich na sústavu nulová, potom celková hybnosť sústavy častíc ostáva v čase konštantnou - nemení sa:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konšt.}$$

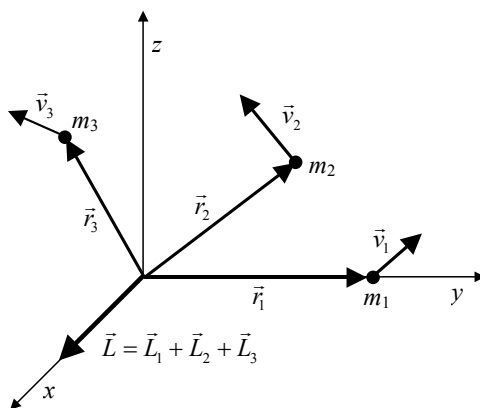
Táto rovnica je matematickým vyjadrením **zákona zachovania hybnosti pre sústavu častíc**. Sústava, na ktorú nepôsobí vonkajšia sila, sa nazýva izolovaná sústava a platí v nej zákon zachovania hybnosti.

3.3 Veta o momente hybnosti

Nech sa hmotný bod sústavy s hmotnosťou m_i pohybuje rýchlosťou \vec{v}_i . Vzhľadom na nejaký vzťažný bod môžeme definovať ďalšiu veličinu moment hybnosti \vec{L}_i :

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i,$$

kde \vec{r}_i je polohový vektor hmotného bodu m_i . Ak sa napr. hmotné body sústavy pohybujú v rovine yz , momenty hybnosti vzhľadom na počiatok súradnicovej sústavy sú vektory spadajúce do smeru osi x (Obr.3.5). Existuje súvis medzi



Obr. 3.5

momentom hybnosti a momentom sily, keďže platí:

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \frac{d\vec{L}_i}{dt},$$

pretože podľa pravidiel derivovania súčinnu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) &= \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \\ &= \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \mathbf{0} + \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i). \end{aligned}$$

Celkový moment hybnosti sústavy je daný rovnicou

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{L}_i$$

a pre vektorový súčet momentov síl pôsobiacich na celú sústavu dostávame:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{L}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Posledná rovnica hovorí, že vektorový súčet všetkých momentov síl na sústavu pôsobiacich sa rovná derivácii celkového momentu hybnosti sústavy podľa času - **veta o momente hybnosti**. Táto veta platí pre ľubovoľný vzťažný bod a tiež ľubovoľný pohyb sústavy.

Ak je celkový moment síl \vec{M} nulový, potom z predchádzajúcej rovnice dostaneme:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{konšt.},$$

čo je matematickým vyjadrením **zákona zachovania momentu hybnosti**: celkový moment hybnosti sústavy hmotných bodov, pre ktorú sa výsledný moment síl rovná nule, ostáva konštantný - nemení sa.

10 Gravitačné pole

10.1 Newtonov gravitačný zákon

Zo skúsenosti vieme, že všetky telesá na zemskom povrchu sú priťahované k Zemi. Keby sme teleso v malej výške nad zemským povrchom nechali voľne bez podložky, spadne na zemský povrch, pričom sa pohybuje rovnomerne zrýchleným pohybom. Pôsobí naň teda konštantná sila od iného telesa - Zeme, a to bez vzájomného dotyku, v skutočnosti obe telesá pôsobia na seba navzájom bez toho, aby sa dotýkali. Silové účinky sa uskutočňujú tak, že navzájom interagujú polia. **Gravitačné pole** je oblasť priestoru, kde sa prejavuje silové pôsobenie telesa na iné teleso bez vzájomného dotyku a je bezprostredne späté s jednou zo základných vlastností častíc - s ich hmotnosťou. V okolí každého telesa (má svoju hmotnosť) existuje gravitačné pole, ktoré sa prejaví silovými účinkami na iný objekt s hmotnosťou. Gravitačné silové pôsobenie, alebo gravitačná interakcia, je jednou zo štyroch základných interakcií v prírode a je hybnou silou Vesmíru. Ďalšími interakciami sú elektromagnetická, silná a slabá. Gravitačná a elektromagnetická interakcia majú nekonečný dosah a v týchto prípadoch budeme hovoriť o poliach, silná a slabá interakcia sa prejavuje iba v rozmeroch atómových jadier.

Gravitačný zákon vyjadruje skutočnosť, že dva ľubovoľné objekty vo Vesmíre sa priťahujú silou, ktorá je priamo úmerná hmotnostiam týchto objektov a klesá so štvorcem vzdialenosti medzi nimi. História jeho objavu začína u našich dávnych predkov, ktorí pozorovali pohyb planét na oblohe. Na začiatku 15. storočia sa veľa diskutovalo o tom, či sa planéty ozaj pohybujú okolo Slnka, alebo je to pohyb okolo Zeme. Tycho de Brahe si uvedomil, že k poznaniu v tomto prípade sa dá prísť starostlivým dlhodobým pozorovaním a dostatočne presným meraním polôh planét na oblohe, aby sa ukázalo ako sa pohybujú. Na základe rozsiahlych tabuliek, ktoré Brahe pri svojich pozorovaniach vyhotovil, Kepler formuloval tri zákony planetárneho pohybu:

1. Planéty obiehajú okolo Slnka po eliptických dráhach (blízkyh kružniciam), pričom Slnko sa nachádza v jednom ohnisku.
2. Plochy opísané sprievodičom (spojnica stredu planéty a stredu Slnka) počas rovnakých časových intervalov sú rovnaké.
3. Druhé mocniny dôb obehov ľubovoľných dvoch planét sú v takom istom pomere ako tretie mocniny veľkých poloosí ich obežných dráh:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Z týchto zákonov odvodil Newton gravitačný zákon. Mohlo by sa preto zdať, že Keplerove zákony sú všeobecnejšie, ale nie je to tak. Keplerove zákony vystihujú kinematiku pohybu planét a Newtonov gravitačný zákon ich dynamiku. Newtonov gravitačný zákon je všeobecný prírodný zákon a dá sa ukázať, že Keplerove zákony z neho vyplývajú spätne ako špeciálny prípad.

Odvozenie gravitačného zákona z Keplerových zákonov, za predpokladu eliptických dráh planét vyžaduje dlhší výpočet, preto si úlohu zjednodušíme. Budeme predpokladať kruhové dráhy, ktoré sú špeciálnym druhom elipsy a teda, ak sú Keplerove zákony (K.z.) správne, musia platiť aj pre takéto dráhy.

Z 1.K.z. vyplýva, že Slnko leží v strede kruhovej dráhy.

Podľa 2.K.z. sprievodič opisuje za rovnaký čas rovnaké plochy, musí teda ísť o rovnomerný pohyb po kružnici, a platí:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

kde v je rýchlosť planéty, r polomer kružnice, T doba obehu planéty.

Pre dostredivé zrýchlenie planéty a v prípade rovnomerného pohybu po kružnici platí:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Z 3.K.z. vyplýva:

$$T^2 = Cr^3,$$

kde C je konštanta. Uvedený vzťah platí pre ktorúkoľvek planétu, preto C nemôže závisieť od vlastností planéty, ale len od vlastností Slnka.

Podľa II. Newtonovho zákona teda na planétu pôsobí sila:

$$F = ma = m \frac{4\pi^2 r}{T^2} = m \frac{4\pi^2 r}{Cr^3} = \frac{4\pi^2}{C} \frac{m}{r^2} = k \frac{m}{r^2},$$

kde m je hmotnosť planéty a k je konštanta závislá len na vlastnostiach Slnka. Ak posledný vzťah je všeobecným vyjadrením pôsobenia jedného telesa na druhé, musí naopak planéta pôsobiť na Slnko silou (jej veľkosť):

$$F' = k' \frac{M}{r^2},$$

kde M je hmotnosť Slnka a k' je konštanta závislá len od vlastností planéty.

Podľa princípů akcie a reakcie musí platiť:

$$F = F' \Rightarrow km = k'M \Rightarrow \frac{k}{M} = \frac{k'}{m} = \kappa$$

a teda

$$k = \kappa M, \quad k' = \kappa m.$$

Pre veľkosť síl, ktorými na seba pôsobia Slnko a planéta, teda dostávame:

$$F = F' = \kappa \frac{mM}{r^2},$$

kde κ je gravitačná konštanta, jej hodnota je $\kappa = 6,67 \cdot 10^{11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$.

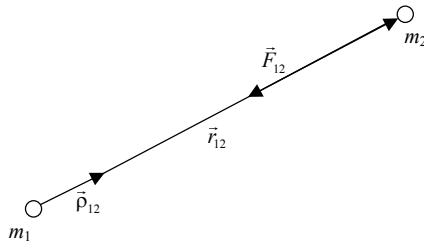
Pri odvodzovaní tohto vzťahu sme neuvažovali s konečnosťou rozmerov planéty a Slnka. Podľa Newtona je posledný vzťah vyjadrením sily, ktorou sa vzájomne priťahujú dva hmotné body.

Všeobecný Newtonov gravitačný zákon možno vyjadriť nasledovne:

Dva hmotné body s hmotnosťami m_1 a m_2 , ktoré sa nachádzajú vo vzájomnej vzdialenosti r , pôsobia na seba príťažlivými silami, spadajúcimi do spojnice bodov, veľkosť ktorej je rovná:

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Vo vektorovom tvare (Obr. 10.1) bude platiť:



Obr. 10.1

$$\vec{F}_{12} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{\rho}_{12},$$

kde \vec{F}_{12} je sila, ktorou pôsobí prvý hmotný bod na druhý, pričom $\vec{\rho}_{12}$ je jednotkový vektor v smere spojnice dvoch hmotných bodov, orientovaný od prvého k druhému, a

$$\vec{F}_{21} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \vec{\rho}_{21}$$

je sila, ktorou pôsobí druhý hmotný bod na prvý, pričom $\vec{\rho}_{21}$ je jednotkový vektor v smere spojnice orientovaný od druhého hmotného bodu k prvému.

Oba predchádzajúce vzťahy vyjadrujú Newtonov gravitačný zákon vo vektorovom tvare. Dva hmotné body teda na seba pôsobia gravitačnou silou, ktorej veľkosť je priamo úmerná ich hmotnostiam a nepriamo úmerná kvadrátu ich vzdialenosti. Táto sila je vždy príťažlivá.

10.2 Intenzita a potenciál gravitačného poľa

Intenzita gravitačného poľa vo vzdialenosti r od zdroja tohto poľa, ktorým je hmotný bod hmotnosti M , je rovná sile, ktorou gravitačné pole pôsobí v danom mieste na hmotný bod hmotnosti m , predelenou touto hmotnosťou:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} = -\kappa \frac{M}{r^3} \vec{r},$$

číselne sa rovná sile pôsobiacej na teleso jednotkovej hmotnosti. Jednotkou intenzity je ms^{-2} .

Ak vyjadríme silu pomocou intenzity, dostaneme:

$$\vec{F} = m\vec{E}.$$

Newtonov zákon sily hovorí:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Porovnaním oboch rovníc dostávame $\vec{E} = \vec{a}$, teda vektor intenzity gravitačného poľa sa rovná vektoru gravitačného zrýchlenia, ktoré telesu hmotnosti m udelí gravitačné pole v danom mieste. Keďže intenzita nezávisí od hmotnosti m , ani gravitačné zrýchlenie nebude závisieť od tejto hmotnosti, to znamená, že v danom mieste v gravitačnom poli sa budú všetky telesá pohybovať s rovnakým zrýchlením, bez ohľadu na svoju hmotnosť. Túto charakteristickú vlastnosť gravitačného poľa objavil už Galilei.

Ak je pole vytvorené N hmotnými bodmi, potom výsledná intenzita gravitačného poľa v danom mieste sa rovná vektorovému súčtu intenzít od jednotlivých zdrojov poľa:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = -\kappa \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{r_i^3} \vec{r}_i,$$

kde M_i je hmotnosť i -tého hmotného bodu a r_i je jeho vzdialenosť od miesta skúmania, vektor \vec{r}_i je orientovaný od hmotného bodu do miesta skúmania.

Potenciál gravitačného poľa. Prírastok potenciálnej energie hmotného bodu

hmotnosti m pri prechode z miesta 1 do miesta 2 v gravitačnom poli hmotného bodu hmotnosti M dosiahneme vykonaním práce silou \vec{F}' , ktorá je rovnako veľká, ale opačne orientovaná ako gravitačná sila \vec{F} . Preto zmenu potenciálnej energie hmotného bodu v gravitačnom poli možno vypočítať:

$$\begin{aligned}\Delta E_p &= \int_1^2 \vec{F}' \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \kappa M m \int_1^2 \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r^3} = \kappa M m \int_{r_1}^{r_2} \frac{r \cdot dr}{r^2} = \\ &= \kappa M m \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = -\frac{\kappa M m}{r_2} - \left(-\frac{\kappa M m}{r_1} \right) = E_{p2} - E_{p1}.\end{aligned}$$

Z výsledného vzťahu je zrejmé, že práca gravitačných síl závisí iba od polohy koncových bodov dráhy a nezávisí od tvaru dráhy, pozdĺž ktorej sily pôsobili. Gravitačná sila je sila konzervatívna a v poli gravitačnej sily platí zákon zachovania mechanickej energie.

Ak za vzťažné miesto zvolíme nekonečno ($r_1 \rightarrow \infty$), potom potenciálna energia v danom mieste sa rovná práci potrebnej na premiestnenie hmotného bodu s hmotnosťou m z nekonečna do daného miesta poľa vzdialeného o r od zdroja poľa:

$$E_p = -\frac{\kappa M m}{r}.$$

Potenciál v tomto mieste poľa definujeme ako podiel potenciálnej energie a hmotnosti m :

$$\varphi = \frac{E_p}{m} = -\frac{\kappa M}{r}.$$

Jednotkou potenciálu je Jkg^{-1} .

Ak je pole vytvorené N hmotnými bodmi, potom výsledný potenciál gravitačného poľa v danom mieste sa rovná súčtu potenciálov od jednotlivých zdrojov poľa:

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i = -\kappa \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{r_i},$$

kde M_i je hmotnosť i -tého hmotného bodu a r_i je jeho vzdialenosť od miesta skúmania.

Potenciál nie je definovaný v mieste, kde leží hmotný bod, ktorý je zdrojom poľa, rastie so vzdialenosťou a svojej maximálnej hodnoty (rovnej 0) nadobúda pre $r \rightarrow \infty$.

Potenciál gravitačného poľa hmotného bodu v konečnej vzdialenosti r od neho je definovaný prácou vonkajších síl, ktoré prekonávajú prácu síl poľa pri premiestňovaní iného hmotného bodu (hmotnosti m) z nekonečna do miesta r ,

predelenou hmotnosťou m :

$$\varphi(r) = \frac{1}{m} \int_{\infty}^r \vec{F}' \cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^r \vec{E}' \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r}.$$

Pre elementárnu zmenu potenciálu môžeme písať:

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (10.1)$$

Z tohto vzťahu napríklad vyplýva, že ak sa budeme pohybovať v gravitačnom poli po takej ploche, kde sa potenciál nemení (tzv. ekvipotenciálna plocha), intenzita bude kolmá na posunutie, teda intenzita je kolmá na ekvipotenciálnu plochu (pretože skalárny súčin dvoch vektorov je nulový ak sú tieto vektory na seba kolmé).

Súvis intenzity a potenciálu možno získať, ak rozpíšeme diferenciál $d\varphi$ (potenciál je funkciou polohy, teda súradníc x, y, z):

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz.$$

Pravú stranu predchádzajúceho zápisu možno zapísať ako skalárny súčin dvoch vektorov:

$$d\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = \text{grad}\varphi \cdot d\vec{r}.$$

Ak za $d\varphi$ dosadíme do rovnice (10.1), dostaneme:

$$\text{grad}\varphi \cdot d\vec{r} = -\vec{E} \cdot d\vec{r},$$

takže máme súvis intenzity a potenciálu gravitačného poľa v tvare:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi.$$

Ak poslednú rovnicu vynásobíme hmotnosťou m , dostaneme súvis medzi silou a potenciálnou energiou v konzervatívnom gravitačnom poli:

$$\vec{E}m = -\text{grad}(m\varphi)$$

$$\vec{F} = -\text{grad}E_p.$$

Intenzita a potenciál sú základnými charakteristikami poľa.

10.3 Gravitačné pole Zeme

Na teleso hmotnosti m v gravitačnom poli Zeme pôsobí gravitačná sila. Jej veľkosť na povrchu Zeme je

$$F = \frac{\kappa m M}{R^2},$$

kde M je hmotnosť a R polomer Zeme.

Podľa Newtonovho zákona sily ale tiež platí:

$$F = mg_0.$$

Z porovnania týchto dvoch rovníc pre gravitačné zrýchlenie na zemskom povrchu vyplýva:

$$g_0 = \frac{\kappa M}{R^2}.$$

Vo výške h nad zemským povrchom bude gravitačné zrýchlenie

$$g_h = \frac{\kappa M}{(R+h)^2} = \frac{\kappa M}{(R+h)^2} \cdot \frac{R^2}{R^2} = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2.$$

Teraz vypočítame prírastok potenciálnej energie hmotného bodu hmotnosti m pri jeho zdvihnutí zo zemského povrchu do výšky h nad povrchom:

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= -\frac{\kappa m M}{R+h} - \left(-\frac{\kappa m M}{R} \right) = \kappa m M \frac{-R+R+h}{R(R+h)} = \\ &= \kappa m M \frac{h}{R^2+Rh} = \frac{\kappa m M}{R^2} \cdot \frac{h}{1+\frac{h}{R}}. \end{aligned}$$

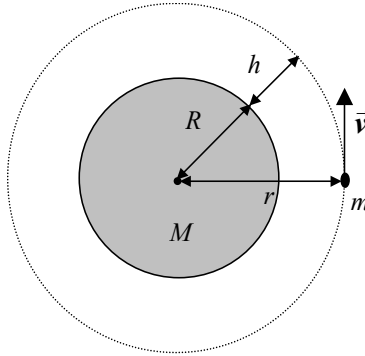
Tento výraz platí pre ľubovoľnú výšku. Ak ale platí $h \ll R$, potom $\frac{h}{R} \ll 1$ a pre prírastok potenciálnej energie dostávame:

$$\Delta E_p = \frac{\kappa M}{R^2} m h = m g_0 h,$$

čo je známy vzťah pre prírastok potenciálnej energie v zemskom gravitačnom poli pri premiestnení telesa zo zemského povrchu do nie veľmi veľkých výšok nad zemský povrch.

Pohyby v radiálnom gravitačnom poli. Najznámejšími príkladmi pohybov v radiálnom gravitačnom poli sú lety družíc a kozmických lodí.

a) **Pohyb družice.** Družica sa pohybuje okolo Zeme po dráhe tvaru kružnice. Jej rýchlosť závisí od polomeru kružnice. **Prvá kozmická rýchlosť** je minimálna počiatočná rýchlosť, ktorú treba družici udeliť pri vodorovnom vrhu z



Obr. 10.2

povrchu Zeme (pri zanedbaní odporu vzduchu), aby sa družica stala obežnicou Zeme.

Ak má družica hmotnosti m obiehať po kruhovej dráhe okolo Zeme rovnomerným pohybom vo výške h (Obr.10.2), dostredivou silou je sila gravitačná:

$$\frac{\kappa m M}{(R + h)^2} = \frac{m v^2}{R + h},$$

odkiaľ pre rýchlosť máme:

$$v^2 = \frac{\kappa M}{R^2} \frac{R^2}{R + h},$$

keď sme pravú stranu rovnice vynásobili jednotkou v tvare $\frac{R^2}{R^2}$ a teda:

$$v = R \left(\frac{g_0}{R + h} \right)^{\frac{1}{2}}$$

a ak $h = 0$, pre veľkosť prvej kozmickej rýchlosti dostávame:

$$v_I = \sqrt{R g_0} = 7,912 \text{ kms}^{-1}.$$

b) **Úniková rýchlosť kozmickej lode z gravitačného poľa Zeme.** Ak teleso vystrelíme zo zemského povrchu kolmo nahor, minimálna počiatočná rýchlosť, ktorá mu umožní vymaniť sa zo zemského gravitačného poľa, sa nazýva **druhá**

kozmickej rýchlosti.

Využijeme zákon zachovania mechanickej energie v izolovanej sústave tvorenej Zemou a vystreleným telesom. Rýchlosť telesa sa bude vplyvom zemskej gravitácie zmenšovať, aby ale úloha bola splnená, môže klesnúť na nulu až v nekonečne. Tam teda bude kinetická energia telesa nulová, v nekonečne je aj jeho potenciálna energia nulová (tak si ju môžeme zvoliť), takže celková mechanická energia je nulová. Potom zo zákona zachovania mechanickej energie vyplýva, že celková mechanická energia musí byť nulová aj v ľubovoľnom inom mieste, teda aj na povrchu Zeme v okamihu vystrelenia telesa:

$$E_p + E_k = 0$$

$$\frac{-\kappa m M}{R} + \frac{1}{2} m v^2 = 0.$$

Pre druhú kozmickej rýchlosti dostávame:

$$v^2 = \frac{2\kappa M}{R} = 2 \frac{\kappa M}{R^2} R = 2g_0 R,$$

keď sme pravú stranu rovnice vynásobili jednotkou v tvare $\frac{R}{R}$, a teda

$$v_{II} = \sqrt{2g_0 R} = 11,2 \text{ kms}^{-1}.$$

8 Ideálny plyn, kinetická teória plynov

8.1 Ideálny plyn, stavová rovnica

Skôr, ako sa budeme podrobnejšie zaoberať ideálnym plynom, urobme niekoľko úvodných poznámok o molekulárnom pohybe všeobecne ako o istom špeciálnom druhu pohybu, ktorým sa vyznačujú všetky látkové formy hmoty. Z každodennej skúsenosti vieme, že sa objekty okolo nás vyznačujú vlastnosťou, ktorú by sme mohli označiť ako ich tepelný stav. Tento stav kvantitatívne hodnotíme fyzikálnou veličinou zvanou teplota. Ak sa mení teplota, hovoríme, že sa zmenil tepelný stav látky. Tento makroskopicky pozorovaný stav látky súvisí so špeciálnym druhom pohybu stavebných častíc látky (atómy, molekuly), ktorý budeme ďalej označovať pojmom molekulárny alebo **tepelný pohyb**. Vo všeobecnosti je tento pohyb rôzny v rôznych skupenstvách látky. V tuhých látkach sú stavebné častice umiestnené v pevných bodoch odpovedajúcich rovnovážnym polohám a molekulárny pohyb tu predstavuje ich kmitanie vo všetkých možných smeroch okolo tejto rovnovážnej polohy. V plynnom skupenstve takéto rovnovážne polohy neexistujú a atómy resp. molekuly sa pohybujú rôznymi rýchlosťami vo všetkých možných smeroch rovnomerne priamočiara, kým zrážkou s inou časticou alebo so stenou nádoby nezmenia svoj smer rýchlosti. Molekulárny pohyb v kvapalných látkach je akýsi prechod medzi vyššie popísanými druhmi pohybov, častica istú dobu kmitá okolo svojej okamžitej rovnovážnej polohy, pričom sa zároveň chaoticky mení i táto rovnovážna poloha a častica akoby sa okrem kmitania ešte i preplietala medzi ostatnými molekulami.

Napriek tomu, že molekulárny pohyb nebol bezprostredne pozorovaný, o pravdivosti takéhoto modelu svedčí predovšetkým zhoda teoretických záverov s experimentom a praktickou skúsenosťou. Ako bezprostredne pozorovateľný prejav molekulárneho pohybu sa zvykne uvádzať tzv. **Brownov pohyb**. Ak vložíme do kvapaliny drobné čiastočky vhodnej látky, budú tieto pri pozorovaní mikroskopom vykonávať chaotický neusporiadaný pohyb, ktorého intenzita bude rásť s teplotou. Súčasný výklad tohto javu je založený na predstave molekulárneho pohybu. Existuje totiž nenulová pravdepodobnosť, že častice kvapaliny vykonávajúce chaotický pohyb a narážajúce na danú čiastočku z rôznych smerov budú svoj účinok na časticu navzájom kompenzovať, alebo naopak, v inom okamihu prevládne pôsobenie z istého smeru a dôjde k posunu čiastočky.

Ako to bolo naznačené, pri Brownovom pohybe intenzita molekulárneho pohybu je tým väčšia, čím je vyššia teplota látky. Molekulárny pohyb sa preto nazýva aj tepelný pohyb.

Základnou charakteristikou tepelného pohybu je predovšetkým to, že sa ho zú-

častňuje veľký počet častíc a že ide o úplne neusporiadaný chaotický pohyb. Preto okrem zákonov, ktoré platia pre individuálnu časticu, možno formulovať aj kolektívne zákonitosti majúce štatistický charakter.

Charakter molekulárneho pohybu v plynnom skupenstve je relatívne najjednoduchší, preto sa v ďalšom budeme zaoberať predovšetkým týmto skupenstvom, pričom pri formulácii modelových predstáv si zavedieme pojem tzv. ideálneho plynu. Vo všeobecnosti plyny predstavujú látky vyznačujúce sa veľkou stlačiteľnosťou a rozpínavosťou. Vypĺňujú celý priestor nádoby a netvoria voľný povrch ako kvapalina. Stav plynu charakterizujeme **stavovými veličinami**: hmotnosťou plynu m , objemom V , tlakom p a teplotou T . Prvé dve sú nám už známe, preto niekoľko poznámok k druhým dvom.

Tlak definujeme ako podiel sily F , pôsobiacej kolmo na plochu S , a tejto plochy:

$$p = \frac{F}{S}, \quad \left[1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] = [1\text{Pa}]$$

Okrem uvedenej jednotky SI sa používa aj jednotka $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.

Teplotou kvantitatívne hodnotíme tepelný stav telies, t.j. tú ich vlastnosť, ktorá v nás pri dotyku s nimi vyvoláva subjektívne tepelné pocity. Z rôznych teplotných stupníc najprv uvidíme Celziovu teplotnú stupnicu, ktorej jednotkou je $1 \text{ }^\circ\text{C}$. Je definovaná tak, že nulový bod na tejto stupnici odpovedá bodu, pri ktorom je v rovnováhe ľad a voda pri tlaku $101,324 \text{ kPa}$, $100 \text{ }^\circ\text{C}$ predstavuje teplotu rovnováhy vody a jej nasýtených pár pri tlaku $101,325 \text{ kPa}$. Túto teplotu budeme v ďalšom označovať symbolom t . Pre fyzikálne úvahy je najvhodnejšia tzv. termodynamická teplotná stupnica, v ktorej sa teplota vyjadruje v Kelvinoch, pričom 0 K zodpovedá najnižšej dosiahnuteľnej teplote $-273,16 \text{ }^\circ\text{C}$. Pre vyjadrenie teploty v tejto stupnici budeme používať symbol T . Pre vyššie uvedené teplotné stupnice platí:

$$T = T_0 + t = 273,16\text{K} + t.$$

Veľkosť jednotky termodynamickej teploty 1 K (Kelvin) je rovnaká ako veľkosť jednotky v Celziovej teplotnej stupnici.

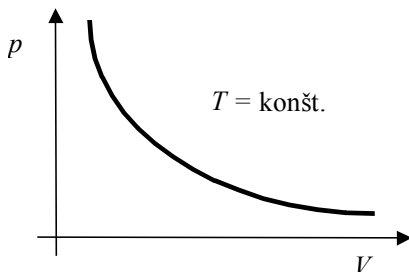
S teplotou sa menia vlastnosti plynu. V prípade, že sa nemení celková hmotnosť plynu, súvis medzi ostatnými tromi stavovými veličinami p, V, T vyjadruje rovnica, ktorú nazývame **stavová rovnica**.

K tejto rovnici môžeme dospieť na základe empiricky objavených zákonov popisujúcich súvis medzi dvojicou stavových veličín a konštantnou treťou stavovou veličinou.

8.1.1 Empirické zákony ideálneho plynu

Izotermická stavová zmena $T = \text{konšt.}$

Zmenu stavu plynu pri konštantnej teplote nazývame izotermickou zmenou a závislosť $p(V)$ pre $m = \text{konšt.}$ a $T = \text{konšt.}$ (rovnostranná hyperbola) nazývame izotermou (Obr. 8.1):



Obr. 8.1

$$pV = \text{konšt.}$$

Túto závislosť nazývame **Boyle-Mariottov zákon**. Skutočné plyny spĺňajú tento zákon len pri malých tlakoch a nie príliš nízkych teplotách.

Izochorická a izobarická stavová zmena Izochorickú ($V = \text{konšt.}$) a izobarickú ($p = \text{konšt.}$) stavovú zmenu ideálneho plynu popisujú Gay-Lussacove zákony:

$$p = p_0 (1 + \gamma_v t) \quad \text{pre } V = \text{konšt.}$$

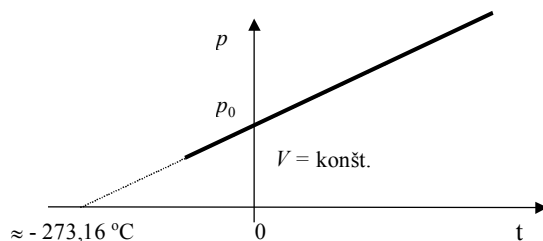
$$V = V_0 (1 + \gamma_p t) \quad \text{pre } p = \text{konšt.,}$$

kde p_0 , V_0 sú hodnoty tlaku a objemu pri $t = 0$ °C, γ_v je koeficient teplotnej rozpínavosti γ_p koeficient teplotnej rozťažnosti plynu. Pre všetky plyny približne platí:

$$\gamma_p = \gamma_v = \gamma = \frac{1}{273,16} \text{K}^{-1}.$$

Grafickými obrazmi posledných závislostí ($p(t)$ - izobara, $V(t)$ - izochora (Obr.8.2)) potom budú priamky pretínajúce teplotnú os pri $-273,16$ °C-273,16 C.

Pomocou termodynamickej teplotnej stupnice môžeme tieto vzťahy napísať v



Obr. 8.2

nasledujúcom tvare:

$$T = T_0 + t, \quad T_0 = \frac{1}{\gamma}$$

a teda

$$p = p_0 (1 + \gamma t) = p_0 \left(1 + \frac{1}{T_0} (T - T_0) \right) = p_0 \left(1 + \frac{T}{T_0} - 1 \right) = p_0 \frac{T}{T_0},$$

alebo

$$\frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0} = \text{konšt.} \quad \text{.pre } V = \text{konšt.}$$

Podobne by sme dostali i pre objem:

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0} = \text{konšt.} \quad \text{.pre } p = \text{konšt.}$$

Plyn, ktorý presne spĺňa uvedené zákony, nazývame **ideálnym plynom**.

Ku stavovej rovnici ideálneho plynu môžeme dospieť napríklad nasledovným spôsobom. Chceme previesť konštantné množstvo (hmotnosti m) plynu zo stavu (p_1, V_1, T_1) do stavu (p_2, V_2, T_2) . Urobme to v dvoch krokoch, napríklad tak, že plyn najskôr zohrejeme pri konštantnom tlaku p_1 z teploty T_1 na T_2 . Zrejme sa pri tom zmení objem z V_1 na V . Potom, v druhom kroku, izotermicky zmeníme tlak z p_1 na p_2 a objem V na V_2 . Vyjadrime tento postup matematicky:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V}{T_2} \Rightarrow V = \frac{V_1}{T_1} T_2, \quad p = p_1 = \text{konšt.}$$

$$p_1 V = p_2 V_2, \quad T = T_2 = \text{konšt.}$$

a teda

$$p_1 \frac{V_1}{T_1} T_2 = p_2 V_2 \Rightarrow \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \text{konšt.},$$

alebo

$$\frac{pV}{T} = \text{konšt.}$$

Posledná rovnica predstavuje stavovú rovnicu ideálneho plynu. Konštanta na pravej strane závisí od množstva plynu a od jednotiek, v ktorých meriame veličiny p , V , T .

Podľa Avogadrovho zákona majú rovnaké množstvá plynov pri rovnakom tlaku a teplote rovnaký objem. Konkrétne pri $p_0 = 101,325$ kPa a teplote $t_0 = 0^\circ\text{C}$ (t.j. $T_0 = 273,16$ K) má plyn, ktorý obsahuje $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ častíc, objem $V_0 = 22,4 \cdot 10^{-3}$ m³. Toto množstvo plynu sa nazýva 1 mól. Pre jeden mól teda platí:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = R = 8,314 \text{ JK}^{-1},$$

kde R je tzv. molárna plynová konštanta.

Stavovú rovnicu pre jeden mól môžeme napísať v tvare:

$$pV = RT.$$

n mólov plynu bude mať n -krát väčší objem a stavová rovnica nadobudne tvar:

$$pV = nRT.$$

Ak označíme symbolom M hmotnosť jedného mólu, symbolom N_A Avogadrovu konštantu, udávajúcu počet častíc (molekúl) v jednom móle, symbolom m hmotnosť plynu a symbolom N počet všetkých molekúl plynu, môžeme počet mólov vyjadriť nasledovne:

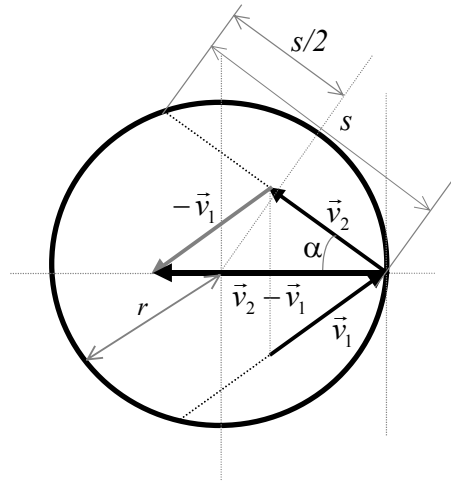
$$n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}.$$

8.2 Kinetický výklad tlaku a teploty plynu

8.2.1 Stredná kinetická energia molekulárneho pohybu

V rámci tzv. molekulárno-kinetickej teórie si plyn predstavujeme ako súbor molekúl, ktoré sa nachádzajú v neustálom neusporiadanom pohybe, pričom k ich vzájomnej interakcii dochádza predovšetkým pri vzájomných zrážkach a tieto molekuly prostredníctvom zrážok interagujú so stenami nádoby, v ktorej je plyn

uzavretý. Ideálnemu plynu odpovedá najjednoduchší model, pri ktorom predpokladáme, že zrážky molekúl sú jedinou vzájomnou interakciou medzi sebou navzájom, ako i so stenami nádoby. Zároveň predpokladáme, že ide o zrážky pružné, t.j. pri zrážke sa zachováva kinetická energia molekúl. V rámci takéhoto modelu si predstavme, že máme plyn uzavretý v guľovej nádobe s polomerom r (Obr. 8.3) a odvodíme niekoľko užitočných vzťahov najskôr pre jednu molekulu pohybujúcu sa v tejto nádobe rýchlosťou v . Pre veľkosť impulzu I , ktorý udelí molekule stena nádoby pri zrážke, postupne dostaneme:



Obr. 8.3

$$|\vec{I}| = I = |\vec{p}_2 - \vec{p}_1| = m |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|}{2v} = \frac{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|}{2v} \Rightarrow |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| = 2v \cos \alpha,$$

kde $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$ a

$$I = 2mv \cos \alpha.$$

Nech medzi zrážkami na stenu nádoby prejde molekula dráhu s . Tento pohyb je rovnomerný priamočiary a medzi dvoma nárazmi na stenu nech uplynie doba

τ . Potom platí:

$$s = v\tau, \quad \cos\alpha = \frac{s}{2r} = \frac{v\tau}{2r}.$$

Pre impulz teraz platí:

$$I = 2mv \frac{v\tau}{2r} = \frac{mv^2\tau}{r}.$$

Časovú strednú hodnotu sily, ktorou pôsobí táto molekula na stenu nádoby, môžeme postupne vyjadriť nasledovne:

$$F = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) dt = \frac{I}{\tau}$$

a teda

$$F = \frac{I}{\tau} = \frac{\frac{mv^2\tau}{r}}{\tau} = \frac{mv^2}{r}$$

Problém teraz rozšírme na celý súbor molekúl (plyn). Nech plyn obsahuje N molekúl a i -tá molekula nech má rýchlosť v_i . Pre celkovú silu, ktorou pôsobí plyn na stenu nádoby teraz môžeme písať:

$$F = \sum_{i=1}^N F_i = \sum_{i=1}^N \frac{mv_i^2}{r}.$$

Pre tlak plynu na stenu nádoby dostaneme:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{mv_i^2}{r}}{4\pi r^2} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N mv_i^2 = \frac{1}{V} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N mv_i^2$$

a teda:

$$pV = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N mv_i^2$$

Veličina daná vzťahom:

$$v_s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2$$

predstavuje strednú hodnotu štvorcov rýchlostí molekúl, takže v_s nazývame **strednou kvadratickou rýchlosťou** molekúl.

Veličinu:

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m v_i^2$$

nazveme **strednou kinetickou energiou molekulárneho pohybu**, ako je to zrejmé zo spôsobu jej zavedenia.

Pomocou týchto veličín môžeme vzťah pre tlak napísať nasledovným spôsobom:

$$pV = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N m v_i^2 = \frac{1}{3} m N v_s^2 = \frac{2}{3} N \varepsilon,$$

pre tlak plynu:

$$p = \frac{1}{3} m N_0 v_s^2,$$

alebo

$$p = \frac{2}{3} N_0 \varepsilon,$$

kde $N_0 = \frac{N}{V}$ je počet molekúl v jednotkovom objeme.

Súvis tlaku a strednej hodnoty kinetickej energie molekúl predstavuje jeden zo základných vzťahov molekulárno-kinetickej teórie plynov (**základná rovnica kinetickej teórie**). Vyjadruje súvis medzi tlakom plynu, t.j. makroskopicky merateľnou veličinou, a veličinami ε a N_0 , ktoré sú mikroskopické veličiny.

Ak ďalej použijeme stavovú rovnicu ideálneho plynu, postupne dostávame pre strednú kinetickú energiu molekúl plynu:

$$pV = \frac{N}{N_a} RT = \frac{2}{3} N \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{3}{2} \frac{R}{N_a} T = \frac{3}{2} kT,$$

kde

$$k = \frac{R}{N_a} = \frac{8,314 \text{ JK}^{-1}}{6,025 \cdot 10^{23}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$$

je tzv. Boltzmannova konštanta.

Stredná kinetická energia molekúl plynu teda závisí len od teploty a je priamo úmerná absolútnej teplote plynu. Strednú kinetickú energiu možno považovať za mieru intenzity molekulárneho pohybu a z vyššie uvedeného vyplýva, že so zvyšovaním teploty rastie i intenzita molekulárneho pohybu. Pojem teploty tak nadobúda celkom konkrétny fyzikálny význam. Vzťah medzi strednou kinetickou energiou a teplotou je opäť spojením makroskopicky merateľnej veličiny, ktorou je teplota, a veličiny charakterizujúcej mikrofyzikálny pohľad.

8.3 Vnútoraná energia plynov, princíp rovnomerného rozdelenia energie

V rámci modelu ideálneho plynu z predchádzajúcej časti si takýto plyn predstavujeme ako zložený z molekúl správajúcich sa ako pružné guľôčky, ktoré interagujú prostredníctvom pružných zrážok, pričom zanedbávame ich vzájomnú potenciálnu energiu. Jednoatómové plyny (napr. Ar, Ne, He, atď.) vyhovujú veľmi dobre takejto predstave za normálnych podmienok. U reálnych plynov je však potrebné uvažovať tiež vzájomnú interakciu medzi molekulami, reprezentovanú potenciálnou energiou. Zároveň tieto molekuly môžu byť viacatómové a potom je potrebné brať do úvahy nielen kinetickú energiu translačného pohybu molekuly, ale tiež kinetickú energiu spojenú s rotáciou molekuly ako celku, či kinetickú a potenciálnu energiu atómov vo vnútri molekuly samotnej.

Vo všeobecnosti nazývame **vnútornou energiou** plynu súčet kinetickej a potenciálnej energie všetkých molekúl plynu.

V prípade ideálneho plynu je potom vnútorná energia daná súčtom len kinetických energií všetkých molekúl:

$$U = N\varepsilon = N\frac{3}{2}kT = N\frac{3}{2}\frac{R}{N_a}T = \frac{N}{N_a}\frac{3}{2}RT = nU_0,$$

kde symbolom n je označený počet mólov plynu a $U_0 = \frac{3}{2}RT$ je **vnútorná energia jedného mólu plynu**.

Vnútoraná energia plynu je závislá iba od teploty. Experimentálne možno ukázať, že uvedený vzťah pre vnútornú energiu vyhovuje len pre jednoatómové plyny. V prípade viacatómových plynov k zhode s experimentom nemožno dôjsť bez rešpektovania príspevkov od rotácie molekúl, či pohybu vo vnútri molekuly samotnej. Základné charakteristiky molekulárneho pohybu, akými sú predovšetkým jeho chaotičnosť a neusporiadanosť, umožňujú vysloviť tzv. princíp rovnomerného rozdelenia energie.

Počet stupňov voľnosti mechanickej sústavy.

Pod počtom stupňov voľnosti rozumieme počet nezávislých súradníc, ktorých zmeny charakterizujú možné druhy mechanickeho pohybu sústavy. Napríklad hmotný bod pri pohybe po priamke má jeden stupeň voľnosti, hmotný bod pohybujúci sa v rovine má dva stupne voľnosti a v 3-rozmernom priestore tri stupne voľnosti. O rotácii hmotného bodu nemá zmysel hovoriť. Hmotný bod teda môže mať maximálne tri stupne voľnosti. N hmotných bodov pohybujúcich sa v priestore bude mať $3N$ stupňov voľnosti. Dokonale tuhé teleso, upevnené v troch bodoch neležiacych na priamke, sa nemôže pohybovať a teda bude

mať nulový počet stupňov voľnosti. Tuhé teleso upevnené v dvoch bodoch sa môže otáčať okolo osi určenej týmito bodmi. V tomto prípade má teleso jeden stupeň voľnosti. Ak je teleso upevnené v jednom bode, môže sa otáčať okolo troch navzájom kolmých osí prechádzajúcich bodom upevnenia a má teda tri stupne voľnosti. Pohyb voľného telesa môžeme rozložiť na rotačný a translačný (postupný) pohyb. Ak sčítame tri translačné a tri rotačné stupne voľnosti, dôjdeme k záveru, že dokonale tuhé teleso má maximálne 6 stupňov voľnosti. Ak pripustíme deformáciu telesa, môže mať reálne teleso ľubovoľný počet stupňov voľnosti.

Za predpokladu, že molekula je dokonale tuhá a jednoatómovú molekulu považujeme za hmotný bod, dôjdeme k nasledovným záverom. Jednoatómová molekula bude mať tri translačné stupne voľnosti, dvojatómová molekula bude mať tri translačné a dva rotačné stupne voľnosti odpovedajúce otáčaniu okolo dvoch osí kolmých na spojnicu atómov. Pri otáčaní okolo osi totožnej so spojnicou atómov sa poloha atómov nemení a preto uvažujeme len dva rotačné stupne voľnosti. Dokonale tuhá molekula, ktorá má viac ako dva atómy, bude mať 6 stupňov voľnosti rovnako ako dokonale tuhé teleso. Prirodzene, keby sme neuvažovali tuhú molekulu, pribudli by ďalšie stupne voľnosti od vzájomného pohybu atómov v molekule. Ako už bolo vyššie uvedené, základným predpokladom molekulárno-kinetickej teórie plynov je predpoklad úplnej neusporiadanosti pohybu molekúl. Táto neusporiadanosť sa netýka len postupného pohybu, ale i pohybu rotačného alebo kmitavého. Ani jeden druh pohybu nemá prednosť pred druhým. Zdá sa byť preto rozumný predpoklad, že na každý stupeň voľnosti pripadá rovnaká energia ε_0 . Tomuto princípu hovoríme **princíp rovnomerného rozdelenia energie** alebo tzv. **ekvipartičný princíp**. K veľkosti energie pripadajúcej na jeden stupeň voľnosti môžeme dospieť nasledovnou jednoduchou úvahou. Molekula v jednoatómovom plyne má tri stupne voľnosti a pre jej strednú kinetickú energiu sme odvodili vzťah:

$$\varepsilon = \frac{3}{2}kT.$$

Na jeden stupeň voľnosti potom pripadá energia:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}kT.$$

Ak má molekula i stupňov voľnosti, potom na molekulu pripadá stredná energia daná vzťahom:

$$\varepsilon = i\varepsilon_0 = \frac{i}{2}kT.$$

Vnútornú energiu plynu môžeme teraz vyjadriť vzťahom:

$$U = N\varepsilon = N \frac{i}{2} \frac{R}{N_a} T = n \frac{i}{2} RT = nU_0,$$

kde

$$U_0 = \frac{i}{2} RT$$

je vnútorná energia jedného mólu plynu.

9 Termodynamika

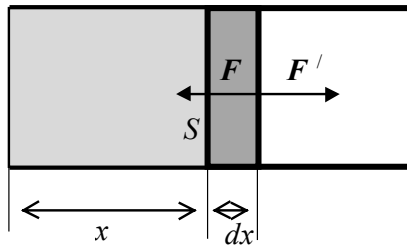
9.1 Práca plynu, teplo, prvý termodynamický zákon

Mnohé súvislosti medzi vlastnosťami látky možno vysvetliť i bez podrobného poznania vnútornej štruktúry látky, bez konkrétnej mikrofyzikálnej predstavy. Oblasť fyziky, ktorá takto postupuje, sa nazýva termodynamika a v ďalšom sa pokúsime na základe termodynamiky plynov objasniť aspoň základné princípy, na ktorých je tento prístup založený.

Majme plyn uzavretý vo valci s pohyblivým piestom s plochou S (Obr. 9.1). Nech tlak plynu je p , potom silu, ktorou pôsobí plyn na piest môžeme vyjadriť vzťahom:

$$F' = pS$$

Je zrejmé, že pre zabezpečenie rovnováhy musí okolie pôsobiť na piest silou F ktorá je rovnako veľká, ale opačne orientovaná. Pre prácu, ktorú vykoná plyn pri vratnom posunutí piesta o elementárnu dĺžku dx platí:



Obr. 9.1

$$dW' = F'dx = pSdx = p dV,$$

kde $dV = Sdx$ je elementárna zmena objemu plynu.

Ak sa piest posunie tak, že sa objem zmení z hodnoty V_1 na V_2 , platí:

$$W' = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

Ak označíme symbolom W prácu vonkajších síl, je zrejmé, že pre ten istý dej platí: $W = -W'$. Keďže vyššie zavedená práca plynu súvisí s objemovými zmenami plynu, hovoríme o **objemovej práci** plynu. O práci W , ktorú koná vonkajšia sila, hovoríme, že je to vonkajšia práca.

Ak plyn koná prácu, mení sa jeho energia. Takto sa dostávame k pojmu **vnútornej energie** plynu U v termodynamike, pre ktorú zrejme musí platiť:

$$dW' = -dW = -dU$$

$$W' = -W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = U_1 - U_2 = -\Delta U.$$

Prirodzene, že táto rovnica platí len v prípade ak súčasne nedochádza k inému spôsobu výmeny energie medzi plynom a okolím.

Z kinetickej teórie plynu vyplynulo, že jeho vnútorná energia závisí len od teploty. Ak sa mení vnútorná energia, mení sa i teplota a naopak. Ak je objemová práca plynu kladná, zmena vnútornej energie je záporná a teda musí klesať i teplota plynu. Plyn v takomto prípade odovzdáva energiu okoliu. Naopak pri stláčaní plynu bude objemová práca záporná, zmena vnútornej energie kladná, teplota rastie a hovoríme, že plyn dostáva od okolia energiu prostredníctvom vonkajšej práce. Takýto spôsob interakcie plynu s okolím označíme ako **mechanická interakcia**.

Teplota plynu a teda i vnútorná energia plynu sa môže meniť i tak, že dáme plyn do tepelného kontaktu s telesom inej teploty. Zo skúsenosti vieme, že po určitom čase sa teploty telesa a plynu vyrovnajú, teda dôjde k zmene vnútornej energie plynu. Ak budeme predpokladať, že nedochádza k mechanickej interakcii (konštantný objem plynu), analogicky ako pre prácu môžeme písať:

$$dQ' = -dQ = -dU$$

$$Q' = -Q = U_1 - U_2 = -\Delta U.$$

Veličina Q charakterizuje výmenu energie medzi sústavou a okolím pri takejto interakcii a nazývame ju **teplom**. Interakciu, medzi dvoma telesami rôznej teploty, počas ktorej cez nespočetné množstvo interakcií medzi stavebnými časticami telies dochádza k dynamickej rovnováhe (k rovnosti strednej kinetickej energie molekulárneho pohybu v oboch interagujúcich telesách) budeme nazývať **tepelnou interakciou**.

Ak súčasne dochádza k mechanickej i tepelnej interakcii plynu s okolím, pre

zmenu vnútornej energie platí:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = W + Q$$

alebo

$$dU = dW + dQ = dQ - dW', \quad dQ = dU + dW'.$$

, . Tieto vzťahy predstavujú matematickú formuláciu tzv. **prvého termodynamického zákona**. Táto veta hovorí, že teplo, ktoré dodáme plynu, sa spotrebuje na zvýšenie vnútornej energie plynu a na plynom vykonanú prácu. Je potrebné na tomto mieste uviesť, že vnútorná energia je jednoznačnou funkciou stavu plynu a je teda jednou zo stavových veličín plynu. Naopak práca a teplo nie sú stavovými veličinami. Majú svoj zmysel len v súvislosti s interakciou plynu a okolia, pri ktorej dochádza k energetickým výmenám.

9.2 Molárna a hmotnostná tepelná kapacita plynov

Pod molárnou tepelnou kapacitou budeme rozumieť množstvo tepla, ktoré musíme dodať jednému mólu plynu, aby sme ho ohriali o jeden stupeň (K alebo °C). Hmotnostná tepelná kapacita je definovaná rovnako, ale sa vzťahuje na hmotnostnú jednotku (1 kg). Venujme sa najskôr molárnej tepelnej kapacite, prechod k hmotnostnej tepelnej kapacite je potom jednoduchý.

Predovšetkým pri plynoch je potrebné rozlíšiť molárnu tepelnú kapacitu za stáleho objemu C_V a molárnu tepelnú kapacitu za stáleho tlaku C_p . Matematicky ich vyjadríme vzťahmi:

$$C_V = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V, \quad C_p = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p.$$

Ak dodávame teplo plynu za stáleho objemu, nedochádza k mechanickej interakcii s okolím, alebo inými slovami, plyn nekoná prácu a dodané teplo sa prejaví len zmenou vnútornej energie plynu. Teda platí:

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}.$$

Ak využijeme výsledky kinetickej teórie plynov, dostávame:

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{d}{dT} (nU_0) = \frac{d}{dT} \left(\frac{i}{2} RT \right) = \frac{i}{2} R.$$

Najlepšia zhoda s experimentom sa dosahuje v prípade jednoatómových plynov. S rastúcim počtom atómov v molekule sa objavuje čoraz väčší odklon od

hodnôt vyššie uvedeného modelu, pričom predovšetkým pre nízke teploty je pre uspokojivý výklad nevyhnutné použiť kvantovo-mechanický model.

Ak dodávame teplo plynu tak, že udržiavame konštantný tlak, môže tento plyn súčasne i mechanicky interagovať so svojím okolím. Pomocou 1. termodynamického zákona a vyššie uvedených výsledkov dostávame:

$$C_p = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p = \frac{1}{n} \frac{dU + dW'}{dT} = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} + \frac{1}{n} \frac{pdV}{dT}$$

$$pV = nRT \Rightarrow \frac{1}{n}pdV = RdT, \quad \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2}R = C_V.$$

Po dosadení a úprave

$$C_p = C_V + R.$$

Posledný vzťah udáva súvis medzi molárnymi tepelnými kapacitami a nazýva sa **Mayerovým vzťahom** (pre molárne tepelné kapacity).

Analogické vzťahy teraz napíšeme pre hmotnostné molárne kapacity, ak použijeme súvis medzi molárnou tepelnou kapacitou C a hmotnostnou tepelnou kapacitou c :

$$c = \frac{C}{M},$$

kde M je molárna hmotnosť.

Platí:

$$c_V = \frac{C_V}{M} = \frac{i}{2} \frac{R}{M}$$

$$c_p = \frac{C_p}{M} = \frac{C_V + R}{M} = c_V + \frac{R}{M}.$$

Posledný vzťah je Mayerovým vzťahom pre hmotnostné tepelné kapacity.

Pomocou molárnej a hmotnostnej tepelnej kapacity môžeme vyjadriť zmenu vnútornej energie nasledovnými spôsobmi:

$$dU_0 = C_v dT$$

$$dU = ndU_0 = nC_v dT = \frac{m}{M} C_v dT = \frac{m}{M} c_v M dT = mc_v dT.$$

9.3 Niektoré stavové zmeny ideálneho plynu

9.3.1 Izochorický dej

$$V = \text{konšt.}$$

$$W' = 0$$

$$Q = \Delta U = mc_V (T_2 - T_1).$$

V tomto prípade sa teda celé dodané teplo spotrebuje na zvýšenie vnútornej energie plynu, ak naopak plyn teplo odovzdáva, deje sa tak na úkor jeho vnútornej energie.

9.3.2 Izobarický dej

$$p = \text{kont.}$$

$$W' = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1)$$

$$\begin{aligned} Q &= \int dU + dW' = mc_V \int dT + \int p dV = mc_V \int dT + \int \frac{m}{M} R dT = \\ &= m \left(c_V + \frac{R}{M} \right) \int_{T_1}^{T_2} dT = mc_p (T_2 - T_1). \end{aligned}$$

9.3.3 Izotermický dej

$$T = \text{konšt.}$$

$$W' = \int p dV = \int \frac{p_1 V_1}{V} dV = p_1 V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$dU = mc_V dT = 0$$

$$Q = \int dU + dW' = \int dW' = W'.$$

Pri tejto stavovej zmene sa celé dodané teplo premení na prácu plynom vykonanú.

9.3.4 Adiabatická stavová zmena

Takáto stavová zmena sa realizuje v tepelne izolovanej sústave a teda môže dôjsť len k mechanickej interakcii medzi sústavou a okolím. Prirodzene, dokonale izolovaná sústava neexistuje. Za približne adiabatické možno považovať také deje, ktoré prebiehajú dostatočne rýchlo vzhľadom na rýchlosť tepelnej výmeny medzi sústavou a okolím. Platí:

$$dQ = 0$$

$$dU = dQ - dW' = -dW' \Rightarrow dW' = -dU.$$

Pri takomto deji teda plyn koná prácu na úkor vnútornej energie. Zrejme platí:

$$W' = - \int dU = - \int_{T_1}^{T_2} mc_V dT = -mc_V (T_2 - T_1).$$

Vzťah medzi elementárnou prácou a elementárnou zmenou vnútornej energie môžeme postupne upravovať tiež nasledovným spôsobom:

$$pdV = -mc_V dT \Rightarrow mc_V dT + pdV = 0.$$

Diferencovaním stavovej rovnice dostávame:

$$pdV + Vdp = nRdT \Rightarrow dT = \frac{pdV + Vdp}{nR}.$$

Potom po dosadení a úpravách:

$$mc_V \frac{pdV + Vdp}{\frac{m}{M}R} + pdV = 0$$

$$\left(c_V \frac{M}{R} + 1 \right) pdV + c_V \frac{M}{R} Vdp = 0 \quad / \cdot \frac{R}{M}$$

$$\left(c_V + \frac{R}{M} \right) pdV + c_V Vdp = 0$$

$$c_p pdV + c_V Vdp = 0. \quad / \cdot \frac{1}{c_V pV}$$

Ďalej nech

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v},$$

potom

$$\kappa \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0.$$

Integráciou poslednej rovnice dostávame:

$$\kappa \ln V + \ln p = \ln(\text{konšt.})$$

$$\ln(pV^\kappa) = \ln(\text{konšt.}) \Rightarrow pV^\kappa = \text{konšt.},$$

kde $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ je Poissonova konštanta. Posledná rovnica udáva súvis medzi tlakom a objemom pri adiabatycznej stavovej zmene. Obraz tejto závislosti v $p - V$ diagrame sa nazýva **adiabata**. Keďže Poissonova konštanta je vždy väčšia ako 1, adiabata je strmšou krivkou ako izoterma.

Pri adiabatycznej zmene sa mení aj teplota plynu. Platí:

$$pV^\kappa = \text{konšt.}, \quad \frac{pV}{T} = \text{konšt.}$$

Z pomeru týchto rovníc pre súvis objemu a teploty pri tomto deji dostaneme:

$$V^{\kappa-1}T = \text{konšt.}$$

Pri adiabatycznej kompresii teplota rastie, naopak pri expanzii klesá.

Prácu pri adiabatickom deji môžeme počítať i nasledovným spôsobom:

$$\begin{aligned} W' &= \int p dV = p_1 V_1^\kappa \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\kappa} = p_1 V_1^\kappa \frac{1}{1-\kappa} [V^{1-\kappa}]_{V_1}^{V_2} = \\ &= p_1 V_1^\kappa \frac{1}{1-\kappa} (V_2^{1-\kappa} - V_1^{1-\kappa}) = \frac{p_1 V_1^\kappa}{1-\kappa} V_1^{1-\kappa} \left(\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\kappa} - 1 \right) = \\ &= \frac{p_1 V_1}{1-\kappa} \left(\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} - 1 \right) = \frac{nRT_1}{1-\kappa} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = \frac{nR}{1-\kappa} (T_2 - T_1) = \\ &= \frac{\frac{m}{M} R}{\frac{c_v - c_p}{c_v}} (T_2 - T_1) = \frac{mc_v \frac{R}{M}}{-\frac{R}{M}} (T_2 - T_1) = -mc_v (T_2 - T_1). \end{aligned}$$

Postupne sme teda dospeli k rovnakému výsledku ako sme to už urobili vyššie na základe 1. termodynamického zákona.

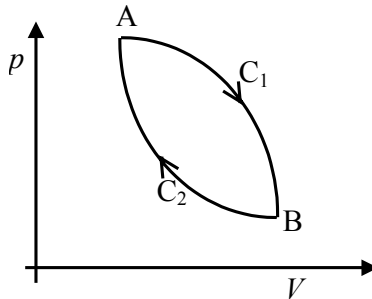
9.4 Carnotov ideálny kruhový dej

Pod **kruhovým dejom** budeme rozumieť dej, pri ktorom sa plyn, alebo všeobecne skúmaná sústava, dostane cez rad stavových zmien späť do pôvodného stavu. V $p - V$ diagrame bude takýto dej zobrazený uzavretou krivkou. Pretože plyn po kruhovom deji bude mať rovnaké hodnoty všetkých stavových veličín, teda aj rovnakú teplotu, celková zmena jeho vnútornej energie je nulová. V opačnom prípade by sme sa dostali do rozporu so zákonom zachovania energie. Matematicky možno túto skutočnosť vyjadriť vzťahom:

$$\oint dU = 0.$$

Táto rovnica je tiež jednou z matematických formulácií 1. termodynamického zákona.

Pomocou tohto vzťahu možno ukázať nasledovnú vlastnosť vnútornej energie. Majme dva stavy plynu, ktorých obrazmi v $p - V$ diagrame nech sú body A a B (Obr. 9.2). Prevedme plyn najskôr zo stavu A do stavu B po krivke AC_1B a potom späť z bodu B do A po krivke BC_2A . Celý tento proces predstavuje kruhový dej a teda platí:



Obr. 9.2

$$\oint dU = \int_{AC_1B} dU + \int_{BC_2A} dU = 0 \Rightarrow \int_{AC_1B} dU = - \int_{BC_2A} dU = \int_{AC_2B} dU.$$

Zrejme platí nasledovné tvrdenie:

Celková zmena vnútornej energie závisí len od počiatočného a koncového stavu

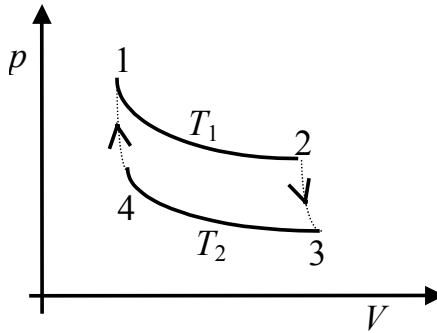
plynu a nezávisí od spôsobu akým sa prechod medzi uvedenými stavmi realizoval. Ďalej platí:

$$\oint dU = \oint (dQ + dW) = \oint dQ + \oint dW = Q + W = 0,$$

kde W a Q je práca a teplo, ktoré plyn prijal od okolia počas kruhového deja. Je zrejmé, že ak Q je kladné, W musí byť záporné alebo inými slovami, ak plyn prijíma teplo, musí okoliu odovzdávať prácu a naopak. Objavuje sa tu teda možnosť premeny tepla na prácu. Tomuto problému bude venovaná ďalšia časť tejto kapitoly.

Najprv stručne popíšeme tzv. **vratný** (reverzibilný) **dej**. Vratným nazývame dej, ktorý prebieha za neustálej rovnováhy s okolím. Táto rovnováha zabezpečuje, že ľubovoľne malou zmenou stavovej veličiny možno beh deja kedykoľvek zmeniť na opačný. Vratné deje sa vyznačujú maximálnou pracovnou úspornosťou. Sú limitným prípadom skutočných dejov, ktoré sú prakticky vždy nevratné. Uvažujme teraz kruhový dej ideálneho plynu pozostávajúci z nasledovných postupných vratných stavových zmien:

1. izotermická expanzia pri teplote T_1 ,



Obr. 9.3

2. adiabatická expanzia,
3. izotermická kompresia pri teplote T_2
4. adiabatická kompresia.

Takýto dej nazývame **Carnotovým ideálnym kruhovým dejom**.

Urobme energetickú bilanciu týchto dejov:

1. $Q_1 = W'_1 = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$
2. $W'_2 = -mc_v (T_2 - T_1), \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\kappa-1}$
3. $Q_2 = W'_3 = nRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}$
4. $W'_4 = -mc_v (T_1 - T_2), \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\kappa-1}$

Z rovníc 2. a 4. sa dá ukázať, že platí:

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{V_1}{V_4} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4},$$

$$W'_2 = -W'_4.$$

Pri celom kruhovom deji teda plyn získal od okolia prostredníctvom tepla energiu:

$$Q = Q_1 + Q_2 = W' = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} (T_1 - T_2).$$

Vidíme, že rovnaké množstvo energie bolo odovzdané okoliu prostredníctvom mechanickej práce.

Z celkového množstva energie, ktorú plyn odobral zo zásobníka tepla prostredníctvom tepla Q_1 pri teplote T_1 , sa len časť odovzdá okoliu prostredníctvom práce. **Účinnosť** Carnotovho kruhového deja potom definujeme ako podiel celkovej práce a tepla prijatého od zásobníka tepla, t.j. vzťahom:

$$\eta = \frac{A'}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1} = \frac{nR \ln \frac{V_2}{V_1} (T_1 - T_2)}{nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Zariadenie, ktoré prostredníctvom opakujúceho sa kruhového deja umožňuje premenu tepla na mechanicкую prácu, sa nazýva tepelný stroj. Jeho účinnosť je vždy menšia ako 1, pretože pre teploty, medzi ktorými stroj pracuje, platí $T_2 < T_1$.

Nakoľko deje v Carnotovom cykle sú vratné, je zrejmé, že môžu prebiehať v oboch smeroch. Ak tento cyklus prebieha v opačnom smere, ako sme to vyššie popísali, hovoríme o chladiacom stroji. Skutočné deje nie sú vratné, preto je význam ideálneho cyklu dôležitý v tom, že jeho účinnosť je maximálna aká sa vôbec dá dosiahnuť za daných podmienok.

9.5 Druhý termodynamický zákon

Priekopníkom v oblasti skúmania tepelných strojov bol francúzsky inžinier S. Carnot. Medzi významné závery jeho práce patrí tzv. Carnotova veta: Všetky

vratné stroje pracujúce medzi tými istými teplotami majú rovnakú účinnosť. Účinnosť pritom nezávisí od pracovnej látky ani od charakteru vratného kruhového deja. Podľa tejto vety je vzťah pre účinnosť, odvodený pre Carnotov kruhový dej, platný pre akékoľvek stroje pracujúce vratne medzi teplotami T_1 a T_2 . Hoci vo všeobecnosti tepelné stroje premieňajú teplo na mechanickú prácu, ani ideálny stroj nie je schopný premeniť všetko teplo získané z vonkajších zdrojov úplne na prácu. Hypotetický stroj, ktorý by dokázal úplne meniť teplo na prácu, sa nazýva perpetuum mobile druhého druhu. Všetky doterajšie skúsenosti potvrdzujú, že takýto stroj zásadne nemožno zostrojiť. Tento empirický poznatok vyjadruje **2. termodynamický zákon**. Existuje niekoľko jeho formulácií:

Planck: Nie je možné zostrojiť periodicky pracujúci stroj, ktorý by nič iné nespôsobil, len odoberal teplo zo zásobníka a konal rovnocennú prácu.

Clausius: Pri styku dvoch telies s rozličnou teplotou teplo prechádza vždy z telesa teplejšieho na chladnejšie a nikdy nie naopak.

Možno ukázať, že rôzne formulácie 2. termodynamického zákona sú rovnocenné, teda ich tvrdenia vyplývajú jedno z druhého a naopak.

Uvažujme ideálny Carnotov kruhový dej, pre ktorý ako už vieme platí:

$$\frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

Veličina Q/T sa nazýva redukované teplo, takže posledný vzťah môžeme slovne vyjadriť nasledovne: pri vratnom Carnotovom cykle sa súčet redukovaných teplí rovná nule. Každý všeobecný vratný kruhový dej si môžeme rozdeliť na "elementárne" cykly, pre ktoré platí vyššie uvedené tvrdenie. Možno potom ukázať, že pri akomkoľvek vratne uskutočnenom kruhovom deji je splnená rovnica:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0,$$

kde dQ je teplo prijaté vratným procesom pri teplote T a integrácia sa vzťahuje na celý kruhový dej. Tento vzťah je zvykom označovať za **matematické vyjadrenie 2. termodynamického zákona**.

Rovnakým spôsobom, ako sme to urobili pri vnútornej energii, môžeme ukázať, že platí:

$$\int_{AC_1B} \frac{dQ}{T} = - \int_{BC_2A} \frac{dQ}{T} = \int_{AC_2B} \frac{dQ}{T}.$$

Táto rovnica hovorí, že výsledok integrálu $\int_A^B \frac{dQ}{T}$, vzťahujúci sa na vratný prechod zo stavu A do stavu B, závisí len od týchto stavov a nezávisí od spôsobu ako sa tento prechod uskutočnil. Tento integrál preto umožňuje definovať novú stavovú veličinu, ktorú nazývame **entrópiou** a je zvykom označovať ju symbolom S . Pre jej diferenciál platí:

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

Jej celková zmena pri prechode zo stavu A do B bude:

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T}.$$

Týmto vzťahom je určená zmena entrópie. Pre výpočet jej hodnoty potrebujeme preto poznať túto hodnotu aspoň v jednom bode. Táto hodnota plyní s tzv. Nernstovej vety, ktorá sa niekedy označuje tiež aj ako tretí termodynamický zákon a znie: Entrópia každej kryštalickej chemicky čistej látky pri nulovej absolútnej teplote je nulová (s približovaním sa k absolútnej nule konverguje k nule).

Uvažujme teraz tepelne izolovanú sústavu. Zrejme platí:

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T} = 0 \Rightarrow S_B = S_A.$$

Pri vratných adiabatických dejoch sa entrópia sústavy nemení. Hovoríme, že adiabatický dej je izentropický.

Doteraz sme sa zaoberali vratnými dejmi. Teraz nás bude zaujímať, ako sa zmení entrópia pri samovoľne v prírode prebiehajúcich nevratných dejoch. Ako príklad uvedieme dva takéto deje - prenos tepla z telesa teplejšieho na chladnejšie a expanziu plynu do vákuu.

Prenos tepla.

Majme dve telesá, teleso A s teplotou T_1 a teleso B s teplotou T_2 , pričom $T_1 > T_2$. Ak ich spojíme, podľa druhej vety termodynamickej bude teplo prechádzať z teplejšieho na chladnejšie teleso, až kým sa teploty vyrovnajú. Bude nás zaujímať ako sa pritom zmení celková entrópia tejto izolovanej sústavy. Prvé teleso odovzdá teplo dQ' a druhé teleso prijme teplo dQ , pričom platí $dQ' = -dQ$. Zmena entrópie prvého telesa teda bude $dS_A = -\frac{dQ}{T_1}$ a zmena entrópie

druhého $dS_B = \frac{dQ}{T_2}$. Keďže entropia je aditívna veličina, celková zmena entropie skúmanej izolovanej sústavy bude:

$$dS = dS_A + dS_B = \frac{-T_2 + T_1}{T_1 T_2} dQ = \frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2} dQ.$$

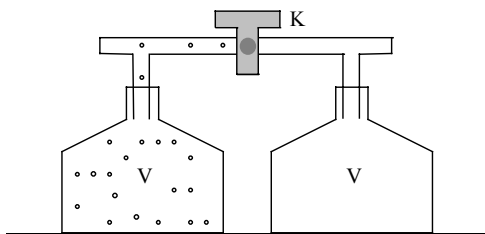
Keďže $T_1 > T_2$, celková zmena entropie je kladné číslo, to znamená, že pri tomto deji entropia narastá:

$$dS > 0.$$

Expanzia do vákua.

Majme v kalorimetri uložené dve nádoby objemu V , ktoré sú spojené kohútikom K. V prvej nádobe je plyn a v druhej je vákuum (Obr. 9.4). Keď otvoríme kohútik K, plyn z prvej nádoby bude expandovať aj do druhej, až nakoniec bude objem plynu $2V$. Pri tomto deji plyn nekoná prácu (pretože sa rozpína do vákua) a keďže je uzavretý v nádobe s nevodivými stenami, je aj prenos tepla nulový.

Z prvého termodynamického zákona vyplýva, že aj zmena vnútornej energie



Obr. 9.4

je potom nulová, a keďže ide o ideálny plyn a vnútorná energia je iba funkciou teploty, pri tomto deji nedochádza ani k zmene teploty: $T_1 = T_2$. Tento dej je nevratný a určite existuje rozdiel entropií medzi konečným a počiatočným stavom, ale nie je možné ho vypočítať podľa definičného vzťahu pre rozdiel entropií, pretože ten platí iba pre vratný dej. Nájdeme preto ľubovoľnú vratnú cestu, ktorá spája počiatočný a koncový stav. Môže to byť izotermická expanzia z V na $2V$, a keďže entropia je stavová veličina, jej zmena nezávisí od cesty, ale iba od počiatočného a koncového stavu. Ak teda vypočítame zmenu entropie pre izotermickú zmenu z objemu V na objem $2V$, výsledná zmena entropie

bude rovnaká ako pre náš nevratný dej.:

$$\Delta S = \int_V^{2V} \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} nRT \ln \frac{2V}{V} = nR \ln 2.$$

Opäť teda máme výsledok:

$$\Delta S > 0,$$

teda entrópia aj pri tomto samovoľne prebiehajúcom nevratnom deji narastá. Druhý termodynamický zákon sa dá formulovať aj takto: **prirodený proces**, ktorý začína v jednom a končí v druhom rovnovážnom stave, bude prebiehať tým smerom, ktorý spôsobí, že **entrópia systému a okolia vzrastie**.

Prirodzený proces je vždy nevratný. V prípade vratných dejov entrópia systému a okolia bude konštantná, a ak napr. sústava prijala teplo pri konštantnej teplote od okolia, jej entrópia vzrastie, ale entrópia okolia sa o tú istú hodnotu zmenší. Celková entrópia sústavy a okolia teda ostane nezmenená. Pomocou entrópie sa teda dá zistiť na základe druhého termodynamického zákona, či daný dej môže v prírode prebiehať samovoľne.

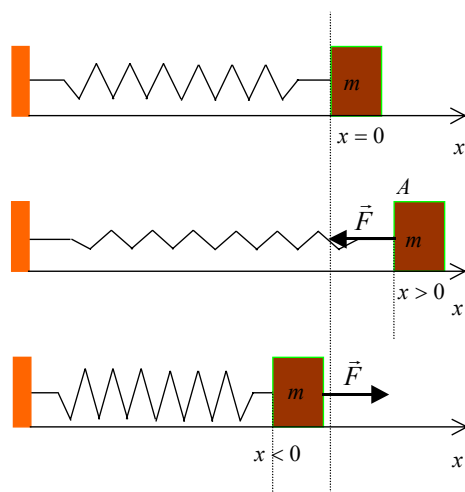
Ak sa v rovnovážnom systéme v dôsledku nejakého vonkajšieho podnetu poruší rovnováha, bude v ňom prebiehať samovoľne nevratný dej až po nejaký nový rovnovážny stav tak, že pritom narastie entrópia. To, že **narastie entrópia**, možno vyjadriť aj tvrdením, že **narastie neusporiadanosť systému** - tieto dve tvrdenia sú ekvivalentné. Pri prenose tepla by sme mohli počiatkový stav charakterizovať výrokom: častice prvého telesa majú teplotu T_1 a častice druhého teplotu T_2 , kým pre konečný stav platí: častice oboch telies majú konečnú teplotu T . Pri expanzii do vákua v počiatkovom stave boli všetky molekuly plynu v objeme V , kým v konečnom stave boli v dvojnásobnom objeme $2V$. Je vidieť, že v oboch prípadoch sú počiatkové tvrdenia "silnejšie" - vyjadrujú väčšiu usporiadanosť systému, ako konečné.

5 Mechanický kmitavý pohyb

5.1 Netlmený harmonický kmitavý pohyb

Pod kmitanie a vlnenie zahŕňame široké spektrum fyzikálnych procesov - od mechanických kmitov a vln, cez elektromagnetické kmity a vlny, až k vlnám popisujúcim vlnové vlastnosti častíc. Aj keď všetky uvedené deje majú rôznu fyzikálnu podstatu, ich formálny - matematický popis sa zásadne nelíši.

Mechanickým kmitavým pohybom (mechanickým kmitaním - osciláciami)



Obr. 5.1

nazývame taký mechanický pohyb hmotného bodu, pri ktorom je hmotný bod viazaný na istú, tzv. rovnovážnu polohu, a to tak, že pri svojom pohybe neprekróči konečnú vzdialenosť od tejto polohy. Ak je časový priebeh pravidelný, t.j. opakuje sa po istom časovom intervale T (perióda), ide o periodický kmitavý pohyb. Ak sa kmitavý pohyb dá popísať pomocou funkcií sínus a kosínus, hovoríme o **harmonickom** kmitavom pohybe. Dá sa ukázať, že ľubovoľný kmitavý pohyb možno vyjadriť ako superpozíciu harmonických kmitavých pohybov (Fourierova veta), preto harmonický kmitavý pohyb možno pokladať za základný typ periodického pohybu.

Majme kocku hmotnosti m upevnenú na konci pružiny, ktorá sa môže kĺzať

bez trenia po vodorovnej podložke s ideálne hladkým povrchom (Obr.5.1). Ak nepôsobí vonkajšia sila, kocka na pružine je v pokoji v rovnovážnej polohe. Ak vonkajšou silou posunieme kocku do polohy A , pružina sa natiahne a ak následne kocku pustíme, bude vplyvom pružných síl vykonávať pohyb po priamke okolo rovnovážnej polohy s najväčšou výchylkou A striedavo na obidve strany od rovnovážnej polohy. V takomto ideálnom prípade, ak neuvažujeme odporové sily (trenie, odpor vzduchu), bude kocka vykonávať netlmený kmitavý pohyb. Sila, ktorá na kocku pôsobí, je priamo úmerná výchylke (konštanta úmernosti k charakterizuje elastické vlastnosti pružiny tzv. tuhosť pružiny) a je orientovaná smerom k rovnovážnej polohe, teda proti smeru výchylky:

$$\vec{F} = -k\vec{x}, \quad (5.1)$$

alebo v skalárnom tvare:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x,$$

kde x je výchylka a $\frac{k}{m} = \omega^2$ je kladná konštanta. Získali sme diferenciálnu rovnicu, ktorej všeobecné riešenie môžeme napísať v jednom z nasledovných tvarov:

$$x = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

$$x = A \sin(\omega t + \gamma)$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Tieto tri tvary sú úplne ekvivalentné, pretože ak napr. posledné vyjadrenie rozpíšeme podľa súčtového vzorca pre $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, dostaneme:

$$x = A \cos \omega t \cos \varphi - A \sin \omega t \sin \varphi$$

a označíme $a = A \cos \varphi$ a $b = -A \sin \varphi$, dostaneme prvé vyjadrenie riešenia.

V ľubovoľnom časovom okamihu teda vieme vyjadriť výchylku kmitajúceho bodu. Konštanta A je daná počiatočným natiahnutím pružiny z rovnovážnej polohy a nazýva sa **amplitúda** (maximálna výchylka) kmitov. Fázová konštanta φ je začiatočná fáza. Ak budeme napr. uvažovať riešenie $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, fázová konštanta je určená výchylkou v okamihu $t = 0$. Počiatok merania času

môžeme zvoliť tak, že $\varphi = 0$, t.j. meranie začneme v okamihu, kedy hmotný bod dosiahol svoju maximálnu výchylku.

Riešením diferenciálnej rovnice pre netlmený kmitavý pohyb je napr. kosínuso-
ida s amplitúdou A a fázovou konštantou φ , je to teda netlmený harmonický
kmitavý pohyb - **netlmené harmonické oscilácie**.

Ak **dobou kmitu** alebo periódou T nazveme časový interval, za ktorý sa osci-
látor vráti späť do danej polohy (jeden kmit), dostaneme:

$$A \cos(\omega t) = A \cos[\omega(t + T)]$$

a teda

$$\omega T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

kde ω je uhlová frekvencia kmitavého pohybu. **Frekvencia** f je počet kmitov
za jednotku času (za sekundu):

$$f = \frac{1}{T}.$$

Rýchlosť a zrýchlenie kmitajúceho hmotného bodu môžeme vyjadriť nasledovne:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi),$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi).$$

Časové priebehy výchylky, rýchlosti a zrýchlenia sú na Obr.5.2. Celková mecha-
nická energia netlmeného kmitajúceho hmotného bodu hmotnosti m bude rovná
súčtu jeho kinetickej a potenciálnej energie.

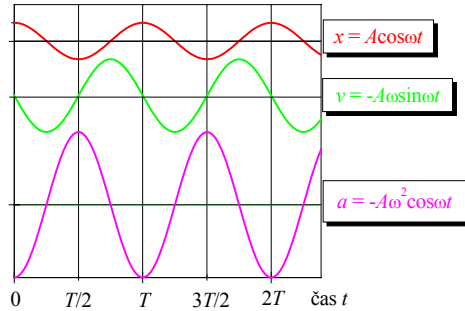
Pre kinetickú energiu platí:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi).$$

Potenciálnu energiu vzhľadom na rovnovážnu polohu určíme ako prácu potrebnú
na vychýlenie z rovnovážnej polohy:

$$\begin{aligned} E_p &= -\int_0^x F dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2 = \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Celková mechanická energia pri netlmenom harmonickom kmitavom pohybe sa
zachováva. Ak sa hmotný bod nachádza vo svojej maximálnej výchylke, je jeho

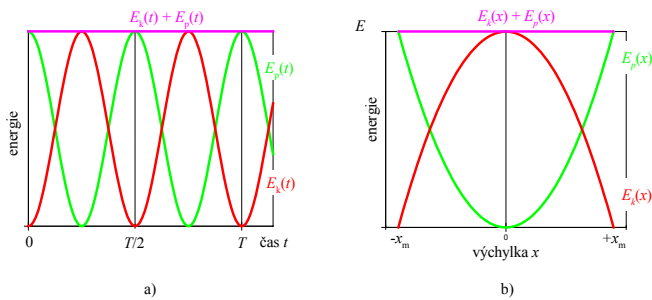


Obr. 5.2

potenciálna energia maximálna a keďže má rýchlosť nulovú, jeho kinetická energia je v tomto bode nulová. Pri prechode rovnovážnou polohou je jeho rýchlosť i kinetická energia maximálna a potenciálna energia je nulová. Teda s rastom kinetickej energie klesá potenciálna energia a naopak, a to tak, že ich súčet je v ľubovoľných okamihoch (Obr.5.3a) a pri ľubovoľnej výchylke (Obr.5.3b) rovnaký.

Pre celkovú energiu dostaneme:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 [\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)] = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 = \text{konšt.}$$



Obr. 5.3

5.2 Skladanie kmitov

5.2.1 Skladanie rovnosmerných kmitov

1) Nech je hmotný bod nútený konať súčasne dva netlmené harmonické kmitavé pohyby s rovnakou frekvenciou, ale rôznymi amplitúdami a fázovými konštantami, dané rovnicami:

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).\end{aligned}$$

Výchylka výsledného pohybu sa v každom okamihu rovná algebraickému súčtu výchýliek x_1 a x_2 :

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Využijeme súčtový vzorec:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

a označíme:

$$\begin{aligned}A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 &= A \cos \varphi \\A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 &= A \sin \varphi\end{aligned}\tag{5.2}$$

Pre výchylku výsledného pohybu potom dostaneme:

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi),$$

teda ide opäť o netlmený harmonický kmitavý pohyb s rovnakou frekvenciou a výslednou amplitúdou A a fázovou konštantou φ , pre ktoré z rovníc (5.2) platí:

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.\end{aligned}$$

Ak pre fázový rozdiel platí:

$$|\varphi_2 - \varphi_1| = k2\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

potom výsledná amplitúda nadobúda svoju maximálnu hodnotu:

$$A = A_1 + A_2.$$

V tomto prípade majú skladané kmitavé pohyby rovnakú fázu a výsledná amplitúda sa rovná súčtu amplitúd skladaných kmitov.

Pre fázový rozdiel:

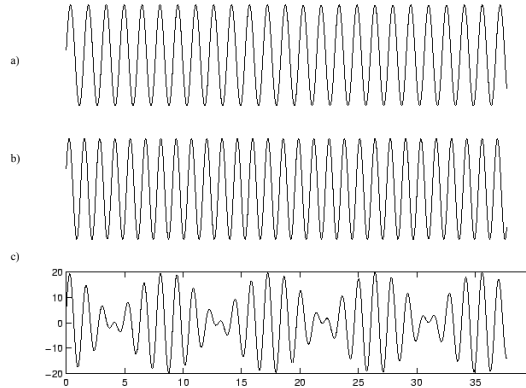
$$|\varphi_2 - \varphi_1| = (2k + 1)\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

sa výsledná amplitúda rovná rozdielu amplitúd jednotlivých pohybov:

$$A = |A_1 - A_2|$$

a hovoríme o skladaní kmitov s opačnou fázou. Ak sa pritom amplitúdy rovnajú, dochádza k úplnému potlačeniu kmitavého pohybu.

2) Uvažujme opäť dva rovnosmerné harmonické kmitavé pohyby, ale nech tieto majú teraz rovnaké amplitúdy a fázové konštanty a nech sa líšia frekvenciami:



Obr. 5.4

$$\begin{aligned} x_1 &= A \cos(\omega_1 t + \varphi) \\ x_2 &= A \cos(\omega_2 t + \varphi). \end{aligned}$$

Ak využijeme vzťah:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2},$$

dostaneme

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi\right).$$

Ak predpokladáme, že frekvencie skladaných kmitov sa od seba len málo líšia (v porovnaní s absolútnou veľkosťou frekvencie), môžeme sa na výsledný kmitavý pohyb pozerať ako na harmonický pohyb so začiatočnou fázou φ , uhlovou frekvenciou ω a amplitúdou B , pre ktoré platí:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad B = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right).$$

Amplitúda výsledného kmitavého pohybu sa potom mení s relatívne malou frekvenciou, pre ktorú platí:

$$\omega' = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}.$$

Graficky je tento kmitavý pohyb znázornený na Obr. 5.4c. Amplitúda kmitavého pohybu dosahuje periodicky maximá a minimá. O harmonickom pohybe takéhoto typu hovoríme, že sa vyznačuje **rázmi**. Períodu rázov dostaneme ako minimálny časový interval, za ktorý amplitúda dosiahne opäť minimum (maximum):

$$T_r = \frac{T'}{2} = \frac{\frac{2\pi}{\omega'}}{2} = \frac{\pi}{\omega'} = \frac{\pi}{\left|\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right|} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{2\pi}{T_2} - \frac{2\pi}{T_1}\right|} = \frac{1}{\left|\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right|}$$

a pre frekvenciu:

$$f_r = \frac{1}{T_r} = \left|\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right| = |f_2 - f_1|.$$

Frekvencia rázov sa teda rovná rozdielu frekvencií skladaných kmitov a je zrejmé, že pri rovnosti týchto frekvencií rázy vymiznú.

5.2.2 Skladanie kmitov na seba kolmých

Nech hmotný bod koná súčasne dva harmonické kmitavé pohyby, jeden v priamke x a druhý v priamke y kolmej na priamku x , frekvencia oboch kmitov nech je rovnaká, ale nech majú rôzne amplitúdy a fázové konštanty:

$$\begin{aligned} x &= A \sin(\omega t + \alpha) \\ y &= B \sin(\omega t + \beta). \end{aligned}$$

Po úprave dostaneme:

$$\frac{x}{A} = \sin(\omega t) \cos(\alpha) + \cos(\omega t) \sin(\alpha) \quad / \cdot \cos(\beta) \quad / \cdot \sin(\beta)$$

$$\frac{y}{B} = \sin(\omega t) \cos(\beta) + \cos(\omega t) \sin(\beta) \quad / \cdot \cos(\alpha) \quad / \cdot \sin(\alpha)$$

Po postupnom vykonaní naznačených operácií a vzájomnom odčítaní rovníc dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{x}{A} \cos(\beta) - \frac{y}{B} \cos(\alpha) &= \\ = \cos(\omega t) [\sin(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\beta) \cos(\alpha)] &= \cos(\omega t) \sin(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{A} \sin(\beta) - \frac{y}{B} \sin(\alpha) &= \\ = \sin(\omega t) [\cos(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\beta) \sin(\alpha)] &= \sin(\omega t) \sin(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

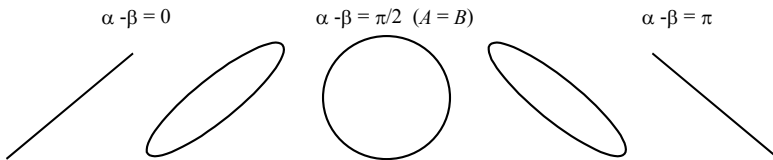
Po umocnení a sčítaní oboch rovníc dostaneme:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} (\cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)) = \sin^2(\alpha - \beta)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha - \beta).$$

Dostávame takto všeobecnú rovnicu elipsy, ktorej vlastnosti sú určené rozdielom fáz skladaných kmitov.

Uvedieme niektoré špeciálne prípady:



Obr. 5.5

1) $\alpha = \beta$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} = \left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B} \right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{A} - \frac{y}{B} = 0 \Rightarrow y = \frac{B}{A}x$$

Posledná rovnica je rovnicou priamky prechádzajúcej začiatkom súradnicovej sústavy so smernicou B/A . Hmotný bod koná harmonické kmity po tejto priamke.

$$2)\alpha - \beta = \pi$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + 2\frac{xy}{AB} = \left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{B}{A}x$$

Teraz teda hmotný bod kmitá v priamke so smernicou $-B/A$.

$$3)\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Je to rovnica elipsy, ktorej osi spadajú do smeru súradných osí x, y . Ak $\alpha - \beta = \pi/2$, hmotný bod sa pohybuje v smere hodinových ručičiek. V špeciálnom prípade, keď $A = B$:

$$x^2 + y^2 = A^2$$

rovnica elipsy prechádza na rovnicu kružnice, hmotný bod sa bude pohybovať po kružnici polomeru A s uhlovou rýchlosťou ω . To znamená, že zložením dvoch na seba kolmých kmitavých pohybov s rovnakou amplitúdou, rovnakou frekvenciou a s fázovým rozdielom $\frac{\pi}{2}$:

$$x = A \cos(\omega t)$$

$$y = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A \sin(\omega t)$$

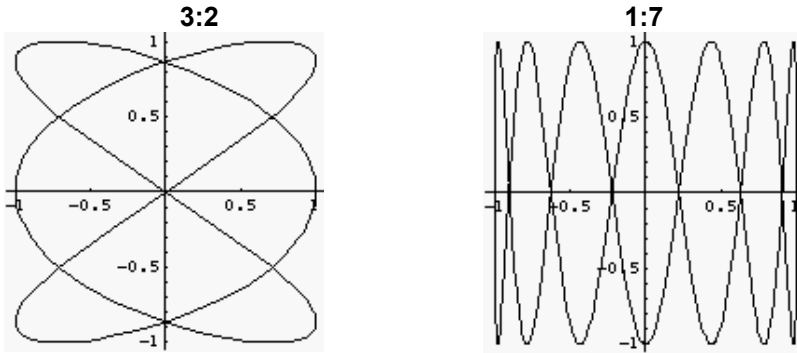
dostávame pohyb po kružnici (Obr.5.5 5.5). Ak hmotný bod koná rovnomerný pohyb po kružnici s uhlovou rýchlosťou ω , možno ho rozložiť na dva na seba kolmé kmitavé pohyby.

Ak budeme skladať dva na seba kolmé kmitavé pohyby s frekvenciami v pomere malých celých čísel, dostaneme pre výsledný pohyb zložitejšie krivky - tzv. Lissajousove krivky (Obr.5.6).

5.3 Tlmený kmitavý pohyb

Pri reálnom kmitavom pohybe pôsobia na hmotný bod odporové sily (popri harmonickej sile), ktoré postupne jeho pohyb utlmia. Pri malých rýchlostiach je tlmiaca sila približne priamo úmerná rýchlosti a môžeme ju teda popísať vzťahom:

$$F = -k_b v,$$



Obr. 5.6

kde $k_b > 0$. Táto sila je orientovaná proti smeru rýchlosti.

Na hmotný bod pôsobia dve sily - harmonická a odporová, preto Newtonov zákon sily môžeme v tomto prípade zapísať:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - k_b \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k_b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Ak označíme

$$\frac{k_b}{m} = 2b, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2,$$

kde b je tzv. koeficient tlmenia a ω_0 je uhlová frekvencia netlmeného kmitavého pohybu, potom rovnica má tvar

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Získali sme diferenciálnu rovnicu druhého rádu bez pravej strany s konštantnými koeficientami, ktorú budeme riešiť pomocou substitúcie:

$$x = z e^{-bt},$$

kde z je funkciou času: $z = f(t)$. Po zderivovaní, dosadení do diferenciálnej rovnice a úprave dostávame rovnicu:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -(\omega_0^2 - b^2) z.$$

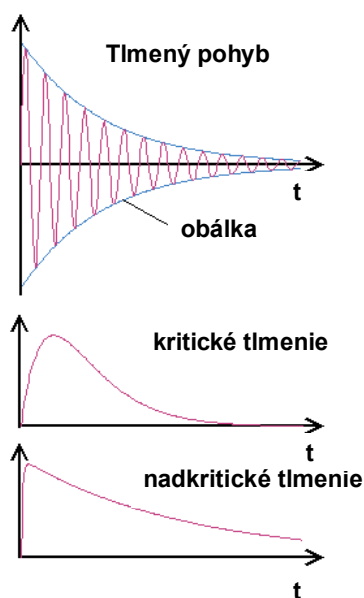
Ak $\omega_0 > b$ a označíme: $\omega_0^2 - b^2 = \omega^2$, potom dostaneme riešenie predchádzajúcej rovnice v tvare:

$$z = A \cos(\omega t + \varphi).$$

S ohľadom na zavedenú substitúciu môžeme pre časovú závislosť výchylky písať:

$$x = Ae^{-bt} \cos(\omega t + \varphi).$$

Amplitúda tlmeného kmitavého pohybu Ae^{-bt} teda s časom exponenciálne



Obr. 5.7

klesá. Uhlová frekvencia $\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - b^2)}$ je menšia ako by bola pri pohybe bez tlmenia. Doba kmitu $T = \frac{2\pi}{\omega}$ je väčšia v porovnaní s netlmeným kmitavým pohybom (Obr.5.7). Takýto kmitavý pohyb tlmením zanikne, jeho mechanická energia sa postupne premení na vnútornú energiu prostredia.

Tlmený kmitavý pohyb nastane, ak $\omega_0^2 > b^2$.

Pre $\omega_0^2 - b^2 = 0$, diferenciálna rovnica $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$ má riešenie $z = A + Bt$ a ide o tzv. kritické tlmenie: $x = (A + Bt)e^{-bt}$ (Obr.5.7).

Ak $b^2 > \omega_0^2$, periodický pohyb nevzniká, je to prípad nadkritického tlmenia (posledná časť obrázku). Označme $b^2 - \omega_0^2 = c^2$, potom výslednú diferenciálnu rovnicu môžeme zapísať v tvare:

$\frac{d^2z}{dt^2} = c^2z$ a jej riešenie je $z(t) = Ae^{ct} + Be^{-ct}$. Riešenie pre výchylku potom má tvar: $x = Ae^{(c-b)t} + Be^{-(c+b)t}$.

Na popis tlmeného kmitavého pohybu sa okrem uvedených charakteristík používajú nasledovné veličiny:

- **útlm** definovaný ako podiel dvoch po sebe nasledujúcich výchyliek (napr. maximálnych), medzi ktorými je časový interval T :

$$\lambda = \frac{x(t)}{x(t+T)} = \frac{Ae^{-bt}}{Ae^{-b(t+T)}} = e^{bT}$$

- **logaritmický dekrement útlmu** definovaný vzťahom:

$$\delta = \ln \lambda = bT.$$

5.4 Vynútený kmitavý pohyb

Tlmené kmity po určitom čase zaniknú. Ak má hmotný bod dlhodobo vykonávať kmitavý pohyb, je nutné pôsobiť naň periodicky sa meniacou vonkajšou silou. Takúto silu nazývame **vynucujúca sila** a môžeme ju zapísať:

$$F' = H \cos(\Omega t),$$

kde Ω je uhlová frekvencia a H amplitúda vynucujúcej sily.

Pohybová rovnica takéhoto oscilátora (obmedzujeme sa na pohyb po priamke) teraz bude:

$$\begin{aligned} F &= -kx - k_b v_x + H \cos(\Omega t) \\ m \frac{d^2x}{dt^2} &= -kx - k_b \frac{dx}{dt} + H \cos(\Omega t) \\ \frac{d^2x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x &= h \cos(\Omega t), \end{aligned}$$

kde $2b = \frac{k_b}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $h = \frac{H}{m}$.

Z matematického hľadiska ide o diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientmi a pravou stranou. Všeobecné riešenie takejto rovnice sa skladá z všeobecného riešenia rovnice bez pravej strany a z partikulárneho riešenia rovnice s pravou stranou. Všeobecné riešenie rovnice bez pravej strany sme našli pri riešení tlmených kmitov a vyjadrili sme ho v tvare:

$$x_1 = Be^{-bt} \cos(\omega t + \varphi),$$

kde B je amplitúda v čase $t = 0$.

Partikulárne riešenie rovnice s pravou stranou hľadáme skusmo v tvare:

$$x_2 = A \cos(\Omega t + \alpha),$$

kde α , A sú konštanty. V ďalšom urobíme príslušné derivácie, dosadíme do diferenciálnej rovnice a postupne upravujeme:

$$\frac{dx_2}{dt} = -A\Omega \sin(\Omega t + \alpha), \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = -A\Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha)$$

$$-A\Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha) - 2bA\Omega \sin(\Omega t + \alpha) + \omega_0^2 A \cos(\Omega t + \alpha) = h \cos(\Omega t).$$

Použitím súčtových vzorcov a nasledovnými úpravami postupne dostaneme:

$$-A\Omega^2 (\cos \Omega t \cos \alpha - \sin \Omega t \sin \alpha) - 2bA\Omega (\sin \Omega t \cos \alpha + \cos \Omega t \sin \alpha) + \omega_0^2 A (\cos \Omega t \cos \alpha - \sin \Omega t \sin \alpha) = h \cos(\Omega t)$$

$$\begin{aligned} & (-A\Omega^2 \cos \alpha - 2bA\Omega \sin \alpha + \omega_0^2 A \cos \alpha - h) \cos \Omega t + \\ & + (A\Omega^2 \sin \alpha - 2bA\Omega \cos \alpha - \omega_0^2 A \sin \alpha) \sin \Omega t = 0. \end{aligned}$$

Posledná rovnica platí pre ľubovoľný časový okamih len ak:

$$-A\Omega^2 \cos \alpha - 2bA\Omega \sin \alpha + \omega_0^2 A \cos \alpha - h = 0$$

$$A\Omega^2 \sin \alpha - 2bA\Omega \cos \alpha - \omega_0^2 A \sin \alpha = 0.$$

Úpravou dostaneme:

$$A(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \alpha - 2bA\Omega \sin \alpha = h \quad (5.3)$$

$$A(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \alpha + 2bA\Omega \cos \alpha = 0. \quad (5.4)$$

Po umocnení a sčítaní rovníc (5.3) a (5.4) dostaneme:

$$A^2 (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2 A^2 \Omega^2 = h^2$$

a teda

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2 \Omega^2}}.$$

Úpravou rovnice (5.4) môžeme získať hodnotu výslednej fázovej konštanty:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2b\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

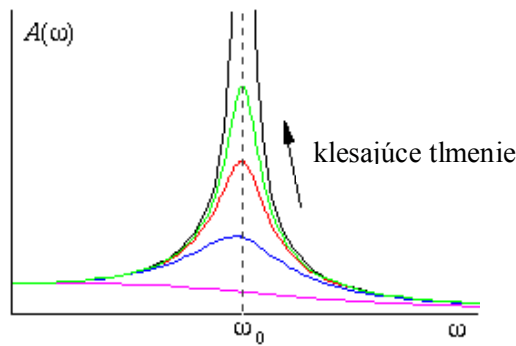
Možno sa presvedčiť, že ak konštanty A a α spĺňajú vyššie uvedené vzťahy, je navrhnutý výraz pre x_2 skutočne partikulárnym riešením danej diferenciálnej rovnice. Všeobecné riešenie teda bude mať tvar:

$$x = x_1 + x_2 = Be^{-bt} \cos(\omega t + \varphi) + A \cos(\Omega t + \alpha).$$

Je zrejmé, že po uplynutí dostatočne dlhého časového intervalu prvý člen riešenia bude zanedbateľne malý, oscilátor bude v ustálenom stave a jeho pohyb bude popísaný rovnicou:

$$x = A \cos(\Omega t + \alpha).$$

V ustálenom stave teda koná hmotný bod harmonický pohyb s uhlovou frek-



Obr. 5.8

venciou vynucujúcej sily α .

Amplitúda A a fázová konštanta α závisia od uhlovej frekvencie Ω sily, ktorá ich vynucuje, od vlastnej uhlovej frekvencie oscilátora ω_0 a od koeficientu tlmenia b . Vo všeobecnosti kmitanie nie je vo fáze s vynucujúcou silou. Takáto situácia by nastala keby nebolo tlmenie ($b = 0$).

Ďalej zo vzťahu pre A je zrejmé, že amplitúda vynútených kmitov je úmerná amplitúde vynucujúcej sily (h resp. H). Aj pri konštantnej amplitúde vynucujúcej sily H môžeme meniť amplitúdu vynútených kmitov A zmenou Ω . Nech h , ω_0 , b sú konštantné a hľadáme pre akú uhlovú frekvenciu vynucujúcej sily bude amplitúda maximálna. Zo vzťahu pre amplitúdu A je zrejmé, že takáto situácia nastane, keď menovateľ bude minimálny, t.j keď bude minimálny výraz:

$$y = (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2$$

a teda:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\Omega} &= 2(\omega_0^2 - \Omega^2)(-2\Omega) + 8b^2\Omega = 0 \\ -4\Omega(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2b^2) &= 0 \Rightarrow \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}.\end{aligned}$$

Ak amplitúda vynútených kmitov dosahuje takéto maximum, hovoríme, že dochádza ku **rezonancii**. Posledný vzťah potom určuje rezonančnú frekvenciu vynútených kmitov. Pre maximálnu amplitúdu (rezonančnú) dostaneme vzťah:

$$\begin{aligned}A_r &= \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - (\omega_0^2 - 2b^2))^2 + 4b^2(\omega_0^2 - 2b^2)}} = \\ &= \frac{h}{\sqrt{4b^4 + 4b^2\omega_0^2 - 8b^4}} = \frac{h}{2b\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}.\end{aligned}$$

Bez tlmenia by k rezonancii došlo v prípade, keby sa rovnali uhlové frekvencie vlastných kmitov a vynucujúcej sily ($\Omega = \omega_0$). Amplitúda by bola v takomto prípade nekonečne veľká.

Pre $b \neq 0$ (teda v reálnych prípadoch) je amplitúda pri rezonancii vždy konečná a dosahuje sa pri frekvencii $\Omega < \omega_0$. Závislosť amplitúdy vynútených kmitov od uhlovej frekvencie Ω (alebo Ω/ω_0) sa nazýva rezonančnou krivkou. Je to závislosť s maximom pri rezonančnej frekvencii. Čím je b väčšie, tým menej ostré je toto maximum (Obr.5.8).

1 Elektrostatické pole

1.1 Coulombov zákon

Elektrické pole je oblasť priestoru, kde sa prejavuje silové pôsobenie elektrického náboja na iný elektrický náboj bez ich vzájomného dotyku. **Elektrostatické pole** vzniká v okolí každého elektrického náboja, ktorý je v pokoji, a je špeciálnym prípadom elektromagnetickej interakcie, ktorej magnetická zložka je nulová. Takéto elektrické pole sa v čase nemení.

Zo skúsenosti vieme, že existujú dva typy náboja - kladný a záporný. Náboje rovnakého typu sa odpudzujú a náboje rôzneho typu sa priťahujú. Ďalší empirický poznatok hovorí, že celkové množstvo elektrického náboja v ľubovoľnom procese sa nemení. Túto skutočnosť vyjadruje **zákon zachovania elektrického náboja**.

Atóm sa skladá z ťažkého, kladne nabitého jadra (zloženého z kladne nabitých protónov a neutrálnych neutrónov), ktoré je obklopené záporne nabitými elektrónmi. V elektricky neutrálnom atóme je počet kladných a záporných nábojov rovnaký. Veľkosť náboja jedného protónu a jedného elektrónu je $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C a nazýva sa **elementárny náboj**. Jednotkou elektrického náboja v sústave jednotiek SI je coulomb (C). Jednotka coulomb je definovaná ako množstvo náboja, ktoré pretečie cez ľubovoľný prierez vodiča za 1 sekundu, ak vodičom tečie konštantný elektrický prúd 1 A.

Zákon popisujúci vzájomné silové pôsobenie medzi nábojmi sformuloval na základe experimentálneho štúdia elektrického priťahovania a odpudzovania Ch. A. Coulomb (1736 - 1806). Obsahom tohto zákona je tvrdenie, že veľkosť sily, ktorou vzájomne pôsobia na seba vo vákuu dva bodové náboje, je priamo úmerná súčinu veľkostí nábojov a nepriamo úmerná kvadrátu vzdialenosti medzi nimi:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad (1.1)$$

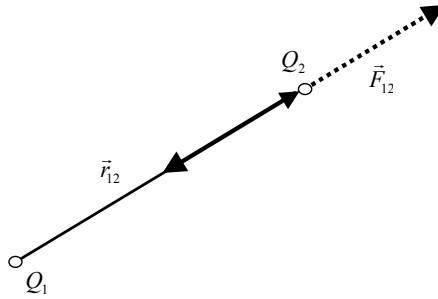
kde $\epsilon_0 = 8,85418 \cdot 10^{-12}$ A²kg⁻¹m⁻³s⁴ je elektrická konštanta, Q_1, Q_2 sú uvažované bodové náboje a r je vzdialenosť medzi nábojmi.

Rovnica (1.1) vyjadruje veľkosť sily vzájomného pôsobenia medzi bodovými nábojmi, pričom jej smer spadá do smeru spojnice uvažovaných nábojov. Uvedomujúc si túto skutočnosť možno veľmi ľahko prejsť k vektorovému vyjadreniu tejto sily. Vektorové vyjadrenie **Coulombovho zákona** má tvar:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}. \quad (1.2)$$

\vec{F}_{12} je sila, ktorou pôsobí náboj Q_1 na náboj Q_2 a \vec{r}_{12} je polohový vektor náboja Q_2 vzhľadom k náboju Q_1 . Náboje Q_1 a Q_2 môžu byť kladné alebo záporné a podľa toho bude orientovaná elektrická sila (pozri Obr.1.1). Ak náboje Q_1 a Q_2 majú rovnaké znamienka, vektory \vec{r}_{12} a \vec{F}_{12} sú rovnosmerné (paralelné) (vyznačené čiarkovane na Obr.1.1 - ide o odpudivú silu). Ak sú znamienka nábojov Q_1 a Q_2 opačné, vektory \vec{r}_{12} a \vec{F}_{12} sú opačného smeru (antiparalelné) (vyznačené plnou čiarou na Obr.1.1 - ide o príťažlivú silu).

Coulombov zákon platí pre bodové náboje, alebo pre objekty, ktorých rozmery



Obr. 1.1

sú zanedbateľne malé v porovnaní s ich vzájomnou vzdialenosťou. Ak je nábojov viac, výsledná sila pôsobiaca na jednotlivý náboj, bude rovná vektorovému súčtu síl medzi týmto nábojom a všetkými ostatnými. Ak je za daných podmienok možné považovať rozloženie náboja za spojité, sumu nahradíme integrálom.

1.2 Intenzita elektrostatického poľa

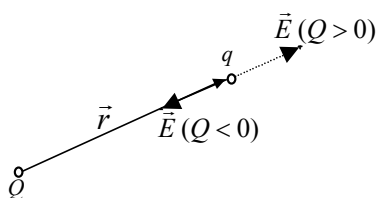
Na popis elektrostatického poľa je vhodné zaviesť novú veličinu, ktorú budeme nazývať **intenzita elektrického poľa**. Môžeme to urobiť nasledovným spôsobom. Umiestnime malý testovací bodový náboj q (pre jednoduchosť uvažujme kladný náboj) do bodu, kde chceme pole vyšetrovať, a odmeriame elektrostatickú silu \vec{F} , ktorá pôsobí na tento náboj. Intenzitu elektrického poľa \vec{E} v tomto mieste definujeme vzťahom:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1.3)$$

Intenzita elektrického poľa (Obr. 1.2) predstavuje silu pôsobiacu na testovací náboj predelenú veľkosťou tohto náboja a nezávisí teda od testovacieho náboja. Jednotkou intenzity elektrického poľa v sústave SI je:

$$[E] = \frac{[F]}{[q_0]} = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Použijúc vzťahy (1.2) a (1.3) môžeme intenzitu elektrického poľa v okolí bode-



Obr. 1.2

vého náboja \$Q\$ vyjadriť vzťahom:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}.$$

Ak je pole vytvárané viacerými bodovými nábojmi \$Q_i\$ (pozri Obr.1.3), platí:

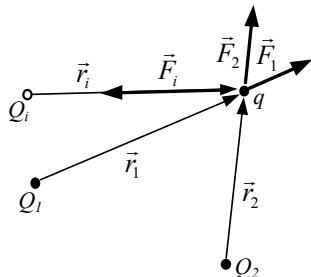
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{q} = \frac{\sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i q}{r_i^3} \vec{r}_i}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i^3} \vec{r}_i = \sum_i \vec{E}_i. \quad (1.4)$$

Rovnica (1.4) je príkladom princípu superpozície, ktorý v tomto prípade hovorí, že výsledná intenzita elektrického poľa v danom mieste je vektorovým súčtom intenzít polí vytvorených jednotlivými nábojmi.

Princíp superpozície možno využiť aj pre výpočet intenzity elektrického poľa v okolí telies so spojitým rozloženým nábojom. Ako uvidíme v ďalšom, náboj môže byť rozložený jednak v objeme (objemový náboj), ale tiež aj v tenkej povrchovej vrstve nabitého telesa (plošný náboj).

Pre opis rozloženia objemového náboja definujeme veličinu objemová hustota náboja:

$$\rho = \frac{dQ}{dV},$$

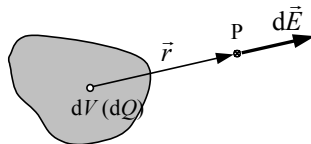


Obr. 1.3

kde dQ je elementárny náboj nachádzajúci sa v elementárnom objeme dV . Podobne pre opis rozloženia náboja na povrchu telesa definujeme veličinu plošná hustota náboja:

$$\sigma = \frac{dQ}{dS},$$

kde dQ je elementárny náboj rozložený na elementárnej ploche dS . Intenzita elektrického poľa pre náboj rozložený v objeme s objemovou hustotou



Obr. 1.4

ρ môže byť pomocou princípu superpozície vyjadrená vzťahom (pozri Obr.1.4):

$$\vec{E} = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r^3} \vec{r},$$

pričom integrujeme cez celý objem V , v ktorom je náboj rozložený. Podobne môžeme vyjadriť pole pre prípad, že náboj je rozložený na povrchu

telesa s plošnou hustotou σ :

$$\vec{E} = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^3} \vec{r}$$

a integrujeme cez celú plochu S , na ktorej je náboj rozložený.

Elektrické pole môžeme znázorniť pomocou **elektrických siločiar**. Ich vlastnosti možno zhrnúť takto:

1. Dotyčnica k siločiare v každom bode určuje smer intenzity \vec{E} v tomto bode.
2. Siločiar sa navzájom nepretínajú. Počet siločiar na jednotku prierezu (kolmo na siločiar) je úmerný veľkosti intenzity \vec{E} . Ak sú teda siločiar blízko k sebe, intenzita poľa E je väčšia, ak sú siločiar vzájomne vzdialené, intenzita poľa E je menšia.
3. Siločiar majú začiatok iba na kladných nábojoch a končia iba na záporných nábojoch.

1.3 Tok intenzity elektrostatického poľa, Gaussov zákon

Pri úvahách v tejto časti si môžeme pomôcť predstavou elektrických siločiar, ktorých vlastnosti boli uvedené v predchádzajúcej časti. Uvažujme elementárnu plošku dS v elektrostatickom poli, ktoré môže byť vo všeobecnosti nehomogénne. Táto elementárna ploška je taká malá, že môže byť považovaná za rovinnú a pole možno pokladať za konštantné pre všetky body tejto plošky (pozri Obr.1.5). Pomocou predstavy o siločiarach môžeme vyjadriť **tok vektora intenzity** dT_E , ktorý je úmerný počtu siločiar prechádzajúcich cez danú plošku:

$$dT_E = E dS_{\perp} = E dS \cos \alpha, \quad (1.5)$$

kde dS_{\perp} je priemet dS na rovinu kolmú na \vec{E} a α je uhol medzi dS a dS_{\perp} .

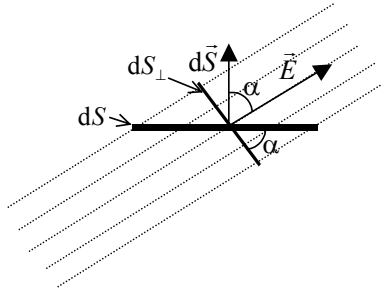
Je zrejmé, že tok vektora intenzity elektrického poľa cez danú plošku je úmerný počtu siločiar prechádzajúcich cez danú plošku.

Ak zavedieme vektor

$$d\vec{S} = dS \vec{n},$$

kde \vec{n} je jednotkový vektor kolmý na elementárnu plošku dS , zrejme platí

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = dS \vec{E} \cdot \vec{n} = E dS \cos \alpha. \quad (1.6)$$



Obr. 1.5

Z porovnania rovníc (1.5) a (1.6) dostávame:

$$dT_E = \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (1.7)$$

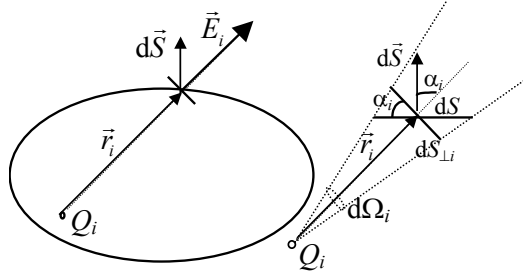
Táto rovnica definuje tok vektora \vec{E} cez elementárnu plôšku dS .

Gaussov zákon sa týka toku intenzity cez ľubovoľnú uzavretú plochu, teda cez plochu, ktorá úplne obopína určitý objem (napríklad guľu). Orientáciu dS pre uzavretú plochu definujeme v smere von z uzavretého objemu. Potom tok pre siločiaru vychádzajúce z uzavretého objemu je kladný a tok pre siločiaru vchádzajúce do neho je záporný.

Tok intenzity cez uzavretú plochu je daný vzťahom:

$$T_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S},$$

pričom sa integruje cez celú uzavretú plochu S . Ako už vieme, tok intenzity cez plochu je úmerný počtu elektrických siločiar prechádzajúcich plochou a zároveň siločiaru môže začínať a končiť len v mieste náboja. Ak sa v uvažovanom objeme nenachádzajú náboje, každá siločiaru začína aj končí mimo tohto objemu. Kolkokrát takáto siločiaru prejde do daného objemu cez uzavretú ohraničujúcu plochu, toľkokrát musí z objemu cez túto plochu aj vystúpiť. Veľmi ľahko príde taktu k záveru, že tok intenzity cez uzavretú plochu je nenulový iba v prípade, ak niektoré siločiaru majú počiatok alebo koniec v objeme, ktorý je plochou obopínaný. Inými slovami, tok bude nenulový len vtedy, keď sa v danom objeme nachádzajú náboje. Predpokladajme preto, že plocha S obopína



Obr. 1.6

elektrické náboje $Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots$ (Obr. 1.6).

Využijúc princíp superpozície, môžeme písať

$$\begin{aligned} T_E &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \oint_S \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^3} \vec{r}_i \cdot d\vec{S} = \\ &= \oint_S \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^3} r_i dS_{\perp i} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{dS_{\perp i}}{r_i^2}. \end{aligned}$$

Ak $d\Omega_i$ je priestorový uhol pod ktorým vidíme plôšku dS z miesta uvažovaného náboja, platí:

$$dS_{\perp i} = r_i^2 d\Omega_i$$

a teda:

$$T_E = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{dS_{\perp i}}{r_i^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i \int_0^{4\pi} d\Omega_i = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{\epsilon_0}.$$

Gaussov zákon, ktorý môžeme vyjadriť takto:

$$T_E = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

hovorí, že tok intenzity cez ľubovoľnú uzavretú plochu je rovný náboju, ktorý táto plocha obopína, predelenému elektrickou konštantou vákua.

Je treba mať na pamäti, že Q je výsledný náboj - algebraický súčet všetkých nábojov (berúc do úvahy ich znamienka), pričom nezáleží na tom, kde a ako je náboj v danom objeme rozložený.

1.3.1 Niektoré aplikácie Gaussovho zákona

1. Elektrické pole pri povrchu vodivých nabitých telies

V prípade statickej situácie, t.j. ak sú náboje v pokoji, elektrické pole vo vnútri vodivého telesa musí byť nulové. Ak by intenzita elektrického poľa bola nenulová, na voľné náboje, ktoré sa nachádzajú vo vnútri vodivého telesa, by pôsobila sila $\vec{F} = e\vec{E}$ a tieto náboje by sa dali do usmerneneného pohybu, to znamená, že vo vodiči by tiekol elektrický prúd. Takýto prúd ale nebol pozorovaný.

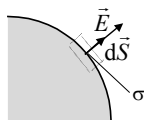
Smer vektora intenzity poľa \vec{E} , pre body blízke povrchu, je kolmý na plochu povrchu a pre kladný náboj je orientovaný von z plochy. Ak by vektor \vec{E} nebol kolmý na povrch, mal by zložku v rovine povrchu. Táto zložka by pôsobila na voľné náboje na povrchu a spôsobila by povrchové prúdy. Keďže takéto prúdy neboli pozorované, zložka vektora \vec{E} v rovine povrchu musí byť nulová a teda vektor \vec{E} musí byť kolmý na povrch.

Skutočnosť, že elektrické pole je vo vnútri vodivého telesa nulové, má jeden zaujímavý dôsledok: Každý náboj privedený na vodivé teleso sa rozloží v povrchovej vrstve. Dokážeme to pomocou Gaussovho zákona.

Majme vodivé teleso, ktoré je nabité nábojom Q . Uvažujme ľubovoľný objem vo vnútri telesa, ktorý obopína uzavretá plocha S . Elektrické pole vo všetkých bodoch tejto plochy je nulové, takže tok intenzity cez túto plochu je nulový. Z Gaussovho zákona je zrejmé, že potom algebraický súčet nábojov vo vnútri tejto plochy je nulový. Keďže to platí pre ľubovoľnú uzavretú plochu vnútri telesa, vnútro nabitého vodivého telesa je elektroneutrálne. Náboj Q , privedený na takéto teleso, môže byť rozložený len v povrchovej vrstve telesa. Gaussov zákon umožňuje určiť veľkosť elektrického poľa E tesne pri povrchu ľubovoľného nabitého telesa.

Majme vodivé teleso, na povrchu ktorého je rozložený náboj Q s plošnou hustotou σ . Ako uzavretú integračnú plochu si zvolíme valcovú plochu so základňou dS veľmi malej výšky, takže jedna základňa valca je tesne pod povrchom telesa a druhá základňa je tesne nad jeho povrchom a plášť obopína plôšku povrchu telesa veľkosti dS , na ktorej je náboj dQ (pozri Obr. 1.7). Výška valca je kolmá na povrch telesa. Elektrické pole je vo vnútri telesa nulové a tesne nad povrchom má smer kolmý na povrch, aj na vektor plochy plášte valca v každom jeho bode. Preto tok intenzity je nenulový iba cez vonkajšiu základňu valcovej plochy. Plocha dS základne valca je malá, takže pole môžeme považovať všade na nej za konštantné. Potom z Gaussovho zákona máme

$$d\Gamma_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = EdS = \frac{dQ}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0},$$



Obr. 1.7

kde σ je plošná hustota náboja na povrchu telesa.

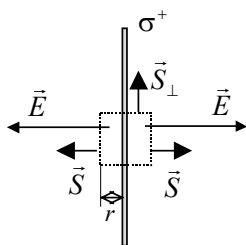
Takto sme dostali pre veľkosť intenzity elektrického poľa tesne nad povrchom nabitého vodivého telesa výsledok

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

ktorý platí pre teleso ľubovoľného tvaru.

2. Elektrostatické pole v okolí nekonečnej nabitej roviny.

Majme rovinu, na ktorej je kladný náboj, ktorý je rozložený rovnomerne, s plošnou hustotou σ . Aby sme určili intenzitu elektrického poľa, vyberieme si uzavretú valcovú plochu so základňami S a výškou $2r$ okolo roviny tak ako je to na Obr. 1.8. Očakávame kvôli symetrii, že \vec{E} je kolmé na rovinu z oboch strán a je homogénne na oboch základniach vybranej valcovej plochy. Keďže \vec{E} je v každom bode plochy plášťa valca kolmé na jej vektor, tok cez plášť valcovej plochy je nulový a do celkového toku prispieva iba tok cez základne. Z Gaussovho zákona dostávame:



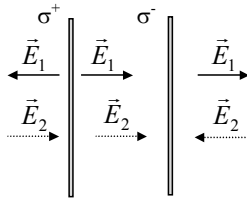
Obr. 1.8

$$T_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E2S = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Vidíme, že pole je všade rovnaké, E má rovnakú hodnotu pre body blízke k rovine i pre body od nej vzdialené. V prípade záporného náboja sa vektor intenzity zmení na opačný.

Majme teraz rovnomerne rozložený náboj na dvoch rovnobežných rovinách. Prvá z nich nech je nabitá kladným nábojom a druhá záporným nábojom, obe s nábojovou hustotou σ , pozri Obr. 1.9.

Určíme elektrostatické pole medzi týmito rovinami a mimo nich. K tomu využij-



Obr. 1.9

jeme princíp superpozície. Vidíme, že pre veľkosť intenzity poľa medzi rovinami platí

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

a všade inde

$$E = E_2 - E_1 = 0.$$

1.4 Práca a potenciálna energia v elektrostatickom poli, elektrický potenciál

Elektrostatické pole vytvorené v okolí nabitých telies môže byť popísané nielen pomocou vektora \vec{E} , ale aj pomocou skalárnej veličiny φ , ktorá sa nazýva **elektrický potenciál**. Táto skalárna veličina je definovaná pomocou potenciálnej energie náboja v elektrickom poli.

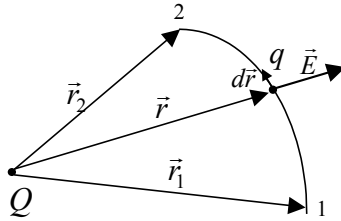
Predstavme si kladný náboj q uložený v elektrostatickom poli intenzity \vec{E} . Sila \vec{F}_{el} , ktorá pôsobí na tento náboj, je daná vzťahom:

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E}.$$

Práca vykonaná touto silou pri premiestnení náboja q z bodu 1 do bodu 2 je:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{r} = q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (1.8)$$

Nech je elektrické pole \vec{E} vytvorené kladným bodovým nábojom Q a \vec{r} je



Obr. 1.10

polohový vektor náboja q vzhľadom na náboj Q (Obr. 1.10). Práca vykonaná poľom náboja Q , pri premiestnení náboja q z bodu 1 do bodu 2, je

$$\begin{aligned} W &= q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r^3} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1} - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

a závisí iba od polohy týchto bodov a nezávisí od prejdenej dráhy. Z (1.9) je tiež vidno, že ak sa náboj q pohybuje po uzavretej dráhe, t.j. vráti sa do východiskového bodu, práca elektrostatickej sily je rovná nule. Je to základná vlastnosť elektrostatického poľa a môžeme ju zapísať vzťahom

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Táto rovnica hovorí, že elektrostatická sila je **konzervatívna sila**. Teda náboj v elektrostatickom poli má potenciálnu energiu E_p , ktorej zmena súvisí s prácou síl elektrostatického poľa podľa nasledovného vyťahu

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1} = -W = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{r} = -q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}.$$

V poli bodového náboja môžeme písať

$$\Delta E_p = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_2} - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1}.$$

Potenciál φ elektrostatického poľa definujeme ako podiel potenciálnej energie bodového náboja q v danom mieste a tohto náboja:

$$\varphi = \frac{E_p}{q}.$$

Pre rozdiel elektrických potenciálov medzi bodmi 1 a 2 máme

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{E_{p2}}{q} - \frac{E_{p1}}{q} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (1.10)$$

Pre elementárnu zmenu elektrického potenciálu

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (1.11)$$

V špeciálnom prípade bodového náboja

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta E_p}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

alebo

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + C,$$

kde C je konštanta, ktorej hodnota závisí od voľby vzťažného bodu 1.

Za tento bod (dohodou) berieme spravidla nekonečno a elektrický potenciál v tomto bode je rovný nule. V tomto prípade pre elektrický potenciál v bode 2 dostávame

$$\varphi_2 = - \int_{\infty}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

a pre **elektrický potenciál v poli bodového náboja** vo vzdialenosti r máme

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (1.12)$$

Potenciál môže byť graficky zobrazený **ekvipotenciálnymi čiarami** alebo (v trojrozmernom prípade) **ekvipotenciálnymi plochami**. Je to množina bodov s rovnakým potenciálom, t. j. $d\varphi = 0$ a na premiestnenie náboja z jedného bodu do druhého nie je potrebná žiadna práca. Ekvipotenciálna plocha musí byť v každom bode kolmá na intenzitu elektrostatického poľa pretože podľa vzťahu (1.11) ak $d\varphi = 0$, potom vektory \vec{E} a $d\vec{r}$ musia byť na seba kolmé.

Potenciál v ľubovoľnom bode poľa vytvoreného viacerými bodovými nábojmi sa nájde vypočítaním potenciálu φ_i od každého jednotlivého náboja, ako keby iné náboje neboli, a sčítaním takto získaných hodnôt:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i}.$$

Ak je náboj rozložený spojitě, suma sa nahradí integrálom

$$\varphi = \int d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{r},$$

kde dQ je element náboja a r je jeho vzdialenosť od bodu, v ktorom sa φ počíta. Prácu síl poľa vykonanú pri premiestnení náboja q z bodu 1 do bodu 2 danú vzťahom (1.8), s využitím vzťahu (1.10) môžeme vyjadriť nasledovne:

$$W = q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU, \quad (1.13)$$

kde

$$U = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = (\varphi_1 - \varphi_2)$$

je **elektrické napätie** medzi bodmi 1 a 2. Teda elektrické napätie na istom úseku dráhy sa rovná rozdielu elektrických potenciálov medzi koncovými bodmi uvažovaného úseku dráhy. Jednotkou napätia je 1 volt (V).

Teraz vyjadríme súvis medzi intenzitou elektrického poľa \vec{E} a elektrickým potenciálom φ . Budeme uvažovať dva blízke body (x, y, z) a $(x+dx, y+dy, z+dz)$. Zmena elektrického potenciálu pri prechode z prvého bodu do druhého je

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

podľa (1.11) je:

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

a z porovnania posledných dvoch rovníc:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

alebo

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi.$$

Znamienko mínus zohľadňuje skutočnosť, že intenzita poľa je orientovaná od oblasti kladného potenciálu k oblasti záporného potenciálu, kým vektor $\text{grad}\varphi$ je podľa definície orientovaný v smere narastania φ . Na kladný náboj v elektrostatickom poli pôsobí sila smerujúca od miesta s vyšším potenciálom do miesta s nižším potenciálom. Jednotkou elektrického potenciálu je joule/coulomb = volt (V).

1.5 Pohyb nabitej častice v elektrickom poli

Preskúmame pohyb častice s hmotnosťou m a nábojom q , ktorá sa pohybuje v homogénnom elektrickom poli. Homogénnym elektrickým poľom nazývame pole, v ktorom má vektor intenzity v každom bode rovnaký smer a veľkosť, t. j. $\vec{E} = \text{konšt.}$. Z praktické hľadiska sú najzaujímavejšie prípady pohybu častice v pozdĺžnom a priečnom elektrickom poli. O pohybe v pozdĺžnom elektrickom poli hovoríme, keď častica vletí do poľa tak, že jej počiatočná rýchlosť \vec{v}_0 je rovnobežná s vektorom intenzity poľa \vec{E} . O pohybe v priečnom poli hovoríme, keď počiatočná rýchlosť je kolmá na vektor intenzity poľa.

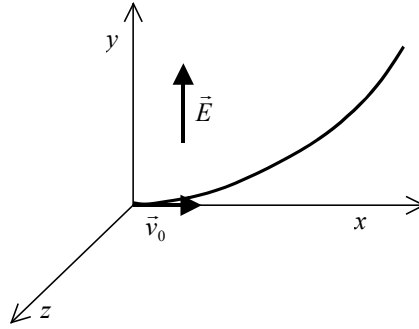
Ak má veľkosť rýchlosti náboja q v homogénnom elektrickom poli v mieste s potenciálom φ_1 hodnotu v_0 , v dôsledku pôsobenia elektrostatickej sily náboj prejde do miesta s potenciálom φ_2 , kde bude mať jeho rýchlosť veľkosť v . Využívajúc vetu o kinetickej energii a vzťah (1.13), pre pohyb v **pozdĺžnom poli** platí:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU.$$

Pre opis pohybu častice v priečnom poli si zvoľme súradnicovú sústavu tak, ako je na Obr. 1.11.

Silu pôsobiacu na časticu môžeme vyjadriť vzťahom:

$$\vec{F} = q\vec{E} = qE\vec{j} \quad (1.14)$$



Obr. 1.11

a pre počiatočnú rýchlosť platí:

$$\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}.$$

Druhý Newtonov pohybový zákon ($\vec{F} = m\vec{a}$) v kombinácii so vzťahom (1.14) poskytuje rovnice:

$$F_x = ma_x = m \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$F_y = ma_y = m \frac{d^2y}{dt^2} = qE.$$

Integráciou týchto rovníc určíme súradnice rýchlosti a súradnice polohy častice v ľubovoľnom časovom okamihu t . Dostaneme

$$v_x = v_0,$$

$$v_y = \frac{qE}{m}t,$$

$$x = v_0t, \tag{1.15}$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2. \tag{1.16}$$

Elimináciou času v rovniciach (1.15) a (1.16) určíme rovnicu dráhy častice:

$$y = \frac{1}{2} \frac{qE}{mv_0^2} x^2 = konst.x^2.$$

Častica sa teda pohybuje po parabolickej dráhe.

1.6 Energia sústavy nábojov, nabitého vodiča a elektrostatického poľa

Na vytvorenie sústavy nábojov musíme vykonať prácu spojenú s prekonaním odpudivých či príťažlivých síl pôsobiacich medzi nimi. Pod energiou sústavy nábojov budeme potom rozumieť celkové množstvo práce, ktorú musí vykonať vonkajšia sila na jej vytvorenie. Predstavme si napríklad, že vytvárame sústavu bodových nábojov. K prvému náboju by sme priniesli druhý náboj, pričom by sme konali prácu proti silám poľa vytvoreného prvým nábojom. Pri „prinášaní“ tretieho náboja by sme konali prácu proti silám poľa vytvoreného prvou dvojicou nábojov a analogicky by to bolo pri postupnom „prinášaní“ ďalších nábojov.

Ak využijeme definíciu potenciálnej energie, ktorú vzťahujeme na nekonečno, môžeme pre prácu potrebnú na vytvorenie sústavy dvoch nábojov Q_1, Q_2 písať

$$W' = \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}' \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_p(r) - E_p(\infty) = E_p(r) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}}, \quad (1.17)$$

kde \vec{F}' je vonkajšia sila, \vec{F} je sila poľa, \vec{r}_{12} je polohový vektor náboja Q_2 vzhľadom na polohu náboja Q_1 .

Pre elektrický potenciál φ_1 prvého náboja v poli druhého a pre potenciál φ_2 druhého náboja v poli prvého náboja môžeme na základe vzťahu (1.12) písať

$$\varphi_1 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}} \quad \text{a} \quad \varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}}. \quad (1.18)$$

Z (1.17), (1.18) môžeme vyjadriť energiu E_p uvažovanej dvojice nábojov nasledovne

$$E_p = W' = Q_1\varphi_1 = Q_2\varphi_2. \quad (1.19)$$

Vzťah (1.19) môžeme vyjadriť aj nasledovným spôsobom:

$$E_p = \frac{1}{2} (Q_1\varphi_1 + Q_2\varphi_2).$$

Postupom naznačeným v úvode tejto kapitoly možno odvodiť analogický vzťah platný pre ľubovoľný počet nábojov:

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \varphi_i, \quad (1.20)$$

kde sčítavame cez všetky náboje, Q_i označuje i -ty náboj a φ_i je elektrický potenciál poľa v mieste i -teho náboja, ktorý je vytvorený ostatnými nábojmi.

Zo vzťahu (1.20) možno veľmi jednoducho vyjadriť energiu nabitého vodiča. Umožňuje to skutočnosť, že nabitý vodič predstavuje ekvipotenciálny útvar. Môžeme sa o tom presvedčiť nasledovnou úvahou. Vieme, že vo vnútri vodiča je $E = 0$. Ak spojíme dva ľubovoľné body ľubovoľnou krivkou a urobíme nižšie naznačenú integráciu, zrejme platí:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$$

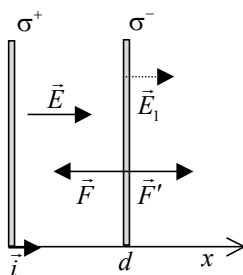
a teda $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ pre ľubovoľnú dvojicu bodov vodiča.

Pre **energiu nabitého vodiča** teraz zo vzťahu (1.20) dostaneme

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \varphi = \frac{1}{2} \varphi \sum_i Q_i = \frac{1}{2} \varphi Q,$$

kde $Q = \sum_i Q_i$ je celkový náboj na vodiči.

Teraz prejdeme k vyjadreniu energie elektrostatického poľa. Uvažujme dve nekonečné rovnobežné roviny nabité s rovnakou plošnou hustotou náboja opačného znamienka (pozri Obr. 1.12). Ak sa tieto roviny dotýkajú, energia je nulová ($Q = 0$). Ak sú vo vzájomnej vzdialenosti d , veľkosť intenzity homogénneho elektrostatického poľa vytvoreného v objeme medzi nimi je



Obr. 1.12

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Vieme tiež, že pole vytvorené jednou rovinou v mieste, kde je uložená druhá, je

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Potenciálna energia odpovedajúca ploche S roviny môže byť vyjadrená

$$\begin{aligned} E_p &= - \int_0^d \vec{F} \cdot \vec{i} dx = \int_0^d F dx = S\sigma \int_0^d E_1 dx = \\ &= S\sigma \int_0^d \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} Sd = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sd. \end{aligned} \quad (1.21)$$

To je **energia elektrostatického poľa**, ktoré je vytvorené v objeme $V = Sd$. Výraz

$$w_{el} = \frac{E_p}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

potom vyjadruje **hustotu energie**, teda energiu elektrostatického poľa v objemovej jednotke.

1.7 Kapacita vodiča, elektrický kondenzátor

V predošlej časti sme ukázali, že nabitý vodič predstavuje ekvipotenciálny útvar. Táto skutočnosť nám umožňuje definovať kapacitu vodiča nasledovným spôsobom. **Kapacita vodiča** C je definovaná ako podiel náboja Q na vodiči a absolútneho potenciálu φ vodiča ($\varphi = 0$ pre $r \rightarrow \infty$):

$$C = \frac{Q}{\varphi}.$$

Jednotkou kapacity v sústave SI, ktorá vyplýva z definície, je coulomb/volt. Táto jednotka sa nazýva farad (F):

$$1\text{F} = \frac{1\text{C}}{1\text{V}}.$$

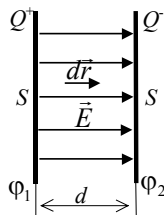
Sústava pozostávajúca z dvoch vodičov nabitých rovnakým nábojom opačného znamienka sa nazýva kondenzátor. **Kapacita kondenzátora** je definovaná:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

kde φ_1 a φ_2 sú elektrické potenciály na jednotlivých vodičoch a Q je náboj vodiča, ktorý má potenciál φ_1 .

Kapacita doskového kondenzátora

Na ilustráciu nájdeme vyjadrenie kapacity pre doskový kondenzátor, ktorý tvoria dve rovnobežné vodivé dosky vo vzdialenosti d , ktorá je malá v porovnaní s rozmermi dosák. Nech na dosky, ktorých plošný obsah je S , sú privedené opačné náboje $\pm Q$. Rozdiel potenciálov dosák môže byť vyjadrený



Obr. 1.13

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = - \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_0^d E dr = - Ed. \quad (1.22)$$

a s využitím vzťahu $E = \frac{\sigma^+}{\varepsilon_0}$ dostávame:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{\sigma^+}{\varepsilon_0} d = \frac{Q^+}{S\varepsilon_0} d.$$

Potom pre kapacitu dostávame z definície

$$C = \frac{Q^+}{\varphi_1 - \varphi_2} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}. \quad (1.23)$$

Zo vzťahu (1.22) pre elektrické napätie medzi doskami rovinného kondenzátora platí:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = Ed \quad (1.24)$$

a zo vzťahov (1.21), (1.23) a (1.24) určíme energiu nabitého kondenzátora:

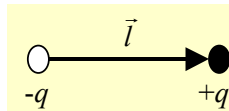
$$E_p = \frac{1}{2} CU^2. \quad (1.25)$$

Aj keď vzťah (1.25) sme získali v špeciálnom prípade doskového kondenzátora, jeho platnosť je všeobecná a platí pre ľubovoľný elektrický kondenzátor. Môžeme sa o tom presvedčiť, ak použijeme vzťah (1.20), vyjadrujúci energiu sústavy nábojov, a definíciu kapacity elektrického kondenzátora. Zo vzťahu (1.20) dostaneme:

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} (Q^+ \varphi_1 + Q^- \varphi_2) = \frac{1}{2} (Q^+ \varphi_1 - Q^+ \varphi_2) = \\ &= \frac{1}{2} Q^+ (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} Q^+ U = \frac{1}{2} C U^2. \end{aligned}$$

1.8 Dielektriká

Niektoré aspekty elektrického poľa vo vodičoch boli diskutované v predchádzajúcich kapitolách. V tejto kapitole sa budeme venovať izolantom, nazývaným tiež dielektriká. Napriek tomu, že atóm, molekula obsahuje rovnaké množstvo kladného a záporného náboja, rozloženie náboja vo vnútri takej častice môže viesť k nenulovému elektrickému poľu v jej okolí. Skôr ako sa budeme podrobnejšie zaoberať touto problematikou, uveďme niekoľko krátkych poznámok k pojmu elektrický dipól a definujme veličinu elektrický dipólový moment. Pod pojmom elektrický dipól rozumieme sústavu dvoch rovnako veľkých elektrických nábojov s opačnými znamienkami $-q$ a $+q$, vzdialených od seba o l (pozri Obr. 1.14). Elektrický dipólový moment definujeme vzťahom



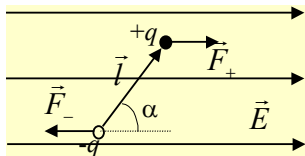
Obr. 1.14

$$\vec{p} = q\vec{l},$$

kde q je kladný náboj a \vec{l} je polohový vektor kladného náboja vzhľadom na záporný.

Preskúmame chovanie sa dipólu v homogénnom elektrickom poli. Je zrejmé, že sily pôsobiace na jednotlivé náboje tvoria dvojicu síl a, v súlade s označením na obrázku, pre jej moment platí:

$$\vec{T} = \vec{l} \times \vec{F}_+ = \vec{l} \times q\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad T = |\vec{T}| = pE \sin \alpha.$$



Obr. 1.15

Moment síl bude nulový pre $\alpha = 0$ a teda dipól sa snaží natočiť do smeru poľa. Z hľadiska atomárneho pohľadu na chovanie sa dielektrických materiálov sú dôležité dva nasledujúce aspekty:

1. Molekuly dielektrika majú nesymetrické rozloženie atómov pričom rozdelenie kladného a záporného náboja je také, že ich stredovaním nedospejeme k tomu istému bodu. Ako príklad možno uviesť molekulu H_2O . Prebytok kladného náboja je na vodíkových atómov a naopak prebytok záporného náboja je na atóme kyslíka. Takáto molekula má potom nenulový elektrický moment \vec{p} a v takomto prípade hovoríme, že sa jedná o polárnu molekulu. Keď takúto látku vložíme do elektrického poľa, na dipóly molekúl pôsobia sily, snažiace sa ich stočiť do smeru poľa. Nakoľko molekuly vykonávajú tepelný pohyb toto stočenie nebude úplné, avšak bude rásť so zväčšovaním poľa či poklesom teploty. Výsledkom stočenia dipólov je čiastočná polarizácia prostredia.
2. Molekuly niektorých plynov skladajúcich sa z dvoch atómov (napr. O_2) nemajú dipólový moment, nakoľko stredovaním kladného a záporného náboja molekuly dospejeme k rovnakému bodu. Takéto molekuly nazývame nepolárnymi. Pozrime sa čo sa stane, ak takýto plyn vložíme do elektrického poľa. Pre jednoduchosť uvažujme jednoatómovú molekulu, napríklad hélium. Ak je takýto atóm v elektrickom poli, elektróny resp. jadro sú ťahané opačnými smermi. Aj napriek tomu, že väzba jadro elektrónový obal je veľmi silná dochádza k vzájomnému posunu kladného a záporného náboja atómu, čoho výsledkom je indukovaný elektrický dipólový moment.

Z predchádzajúceho možno vidieť, že **po vložení do elektrického poľa sa dielektrikum stáva polarizovaným**. Je pritom prirodzené očakávať, že k indukovaní dipólového momentu dochádza aj v prípade nepolárnych molekúl, avšak spravidla dominantný je príspevok od polárnych molekúl.

Majme dva identické rovinné kondenzátory. Priestor medzi doskami prvého nech je vyplnený dielektrickým materiálom. Medzi doskami druhého nech je vákuum. Experimentálne by sme zistili, že kapacita kondenzátora s dielektrikom je ε_r krát väčšia v porovnaní so situáciou, keď je medzi doskami vákuum. Konštanta ε_r závisí od druhu dielektrika a nazýva sa relatívna permitivita. Relatívna permitivita pre vákuum je rovná 1 a pre všetky ostatné dielektriká je väčšia ako 1.

Označme kapacitu kondenzátora s dielektrikom symbolom C_d a vákuového kondenzátora symbolom C_0 . Analogicky označíme aj rozdiely potenciálov medzi doskami ako $\Delta\varphi_d$ resp. $\Delta\varphi_0$. Na dosky oboch kondenzátorov uložíme náboje rovnakej veľkosti Q .

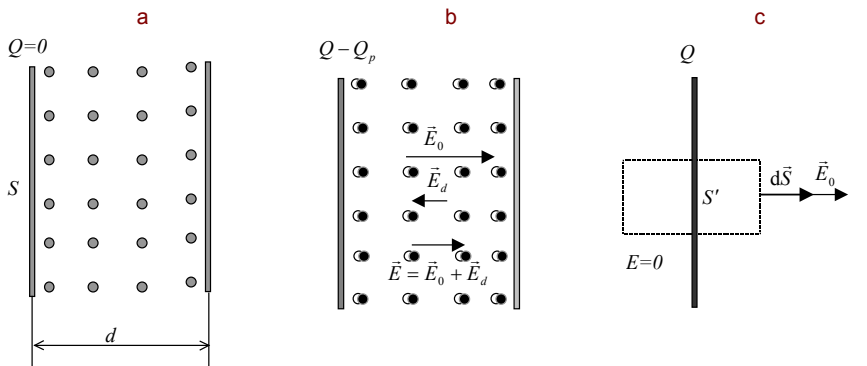
Zrejme platí

$$Q = C_0\Delta\varphi_0 = C_d\Delta\varphi_d$$

a

$$\varepsilon_r = \frac{C_d}{C_0} = \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta\varphi_d} \quad \text{alebo} \quad \Delta\varphi_d = \frac{\Delta\varphi_0}{\varepsilon_r}.$$

Vidíme, že $\Delta\varphi_d < \Delta\varphi_0$ nakoľko $\varepsilon_r > 1$.



Obr. 1.16

Schematicky sú diskutované situácie znázornené na Obr. 1.16. Bez poľa vykazuje dielektrikum náhodné rozdelenie kladného a záporného náboja. Privedením náboja na dosky kondenzátora sa vytvorí medzi doskami elektrické pole E_0 , spolarizuje dielektrikum a výsledkom je vytvorenie rovnako veľkých nábojov

opačného znamienka na povrchu dielektrika pri doskách kondenzátora, pričom náboj vnútorného objemu dielektrika je nulový.

Povrchové náboje vytvárajú pole \vec{E}_d orientované opačne k poľu \vec{E}_o . Takže, ak vložíme dielektrický materiál do elektrického poľa, výsledkom je kladný náboj na jednom povrchu a záporný náboj na druhom povrchu. Tieto náboje sú čo do veľkosti rovnaké. Pri tomto procese dochádza k posunu nábojov o vzdialenosti menšie, ako je polomer atómov a teda nedochádza k prenosu náboja v makroskopickom meradle.

Výsledné elektrické pole \vec{E} v dielektriku dostaneme, ako vektorový súčet polí \vec{E}_o a \vec{E}_d t.j.

$$\vec{E} = \vec{E}_o + \vec{E}_d.$$

Pole \vec{E} je orientované rovnako, ako vonkajšie pole \vec{E}_o ale je menšie.

Použijme teraz Gaussov zákon na obidva kondenzátory s dielektrikom a bez dielektrika pričom uzavretú integračnú plochu volíme spôsobom ako je to naznačené na Obr. 1.16c., pričom zanedbáme okrajové narušenie homogenity poľa pri okrajoch dosiek. Pre tok intenzity poľa cez uvedenú uzavretú integračnú plochu v prípade kondenzátora s vákuom dostaneme

$$\oint \vec{E}_o \cdot d\vec{S} = E_0 S' = \frac{Q'}{\epsilon_0}.$$

Podobne pre kondenzátor s dielektrikom

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES' = \frac{Q' - Q'_p}{\epsilon_0},$$

kde Q'_p je časť z celkového indukovaného povrchového náboja Q_p nachádzajúca sa v objeme ohraničenom integračnou plochou a Q' časť voľného náboja Q privedeného na dosky kondenzátora v uvedenom objeme. Tieto náboje majú opačné znamienka teda v prípade dielektrika je celkový náboj v objeme uzavretom integračnou plochou rovný $Q' - Q'_p$.

Pre intenzity polí platí:

$$E_0 = \frac{Q'}{S'\epsilon_0} \quad \text{a} \quad E = \frac{Q' - Q'_p}{S'\epsilon_0}.$$

Vzťah $\Delta\varphi = Ed$ platí pre doskový kondenzátor nezávisle od toho či obsahuje dielektrikum alebo nie a teda môžeme písať:

$$\epsilon_r = \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta\varphi_d} = \frac{E_0 d}{Ed} = \frac{E_0}{E} = \frac{Q'}{Q' - Q'_p}$$

a

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{Q'}{\varepsilon_r \varepsilon_0 S'}$$

alebo

$$Q'_p = Q' \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right). \quad (1.26)$$

Posledný vzťah vyjadruje skutočnosť, že vždy je $Q'_p < Q'$ a $Q'_p = 0$ ak $\varepsilon_r = 1$. Vychádzajúc z

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q' - Q'_p}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left[Q' - Q' \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) \right]$$

a po krátkych úpravách dostaneme:

$$\oint \varepsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q'}{\varepsilon_0}.$$

Posledný vzťah, aj keď bol odvodený pre špeciálny prípad doskového kondenzátora, platí všeobecne. Je veľmi podobný matematickej formulácii Gaussovho zákona pričom:

- Integrál vyjadrujúci tok poľa teraz obsahuje relatívnu permitivitu ε_r .
- Náboj Q' na pravej strane, nachádzajúci sa v objeme ohraničenom integračnou plochou, je len voľný náboj.

Po úprave vzťahu (1.26) dostaneme:

$$Q' = \frac{Q'}{\varepsilon_r} + Q'_p \quad \text{alebo} \quad \frac{Q'}{S'} = \varepsilon_0 \frac{Q'}{\varepsilon_r \varepsilon_0 S'} + \frac{Q'_p}{S'} = \varepsilon_0 E + \frac{Q'_p}{S'}. \quad (1.27)$$

Posledný výraz na pravej strane je indukovaný povrchový náboj pripadajúci na jednotku plochy povrchu. Nazveme ho elektrickou polarizáciou P , a platí

$$P = \frac{Q'_p}{S'}. \quad (1.28)$$

Ak vynásobíme čitateľa aj menovateľa vzdialenosťou medzi doskami (tiež hrúbkou dielektrika) d , dostaneme výraz:

$$P = \frac{Q'_p d}{S' d}.$$

V súlade s definíciou elektrického dipólového momentu, čitateľ ($Q'_p d$) predstavuje indukovaný elektrický dipólový moment dielektrika. Keďže menovateľ ($S' d$) je objem dielektrika, polarizácia predstavuje elektrický dipólový moment jednotkového objemu dielektrika. Nakoľko dipólový moment je vektorom bude aj polarizácia vektorovou veličinou. Vyššie uvedený vzťah predstavuje veľkosť vektora polarizácie, pričom v súlade s definíciou dipólového momentu, bude vektor polarizácie smerovať od záporného ku kladnému indukovanému náboju. Po dosadení polarizácie (vzťah (1.28)) do vzťahu (1.27), dostaneme:

$$\frac{Q'}{S'} = \varepsilon_0 E + P.$$

Výraz na ľavej strane predstavuje ďalšiu veličinu používanú v elektrostatike a nazýva sa indukcia elektrického poľa D , t.j.

$$D = \varepsilon_0 E + P.$$

P a D majú rovnaké jednotky [Cm^{-2}]. Nakoľko E a P sú vektorové veličiny, aj D bude vektorom a teda

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Pre tri vektory v poslednej rovnici platí:

- Vektor \vec{D} je spojený len s voľnými nábojmi. Siločiarly spojené s vektorom \vec{D} začínajú a končia len na voľných nábojoch.
- Vektor \vec{P} je spojený len s viazanými nábojmi. Siločiarly spojené s vektorom \vec{P} začínajú a končia len na viazaných nábojoch.
- Vektor \vec{E} je spojený so všetkými nábojmi. Siločiarly spojené s vektorom \vec{E} začínajú a končia na oboch druhoch nábojov.

Nakoľko

$$D = \frac{Q'}{S'} = \frac{Q'_p}{S'} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)} = P \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1},$$

vektory \vec{D} a \vec{P} možno vyjadriť pomocou \vec{E} :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{D} \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{D} - \frac{\vec{D}}{\varepsilon_r}$$

a

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}.$$

Pre vektor \vec{P} :

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 \vec{E}.$$

Je zrejmé, že pre vákuum ($\varepsilon_r = 1$) je \vec{P} rovné nule.

Zavedenie vektora \vec{D} a rovnica $\varepsilon_0 \oint \varepsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q'$ poskytuje možnosť vyjadriť Gaussov zákon v tvare:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q, \quad (1.29)$$

kde Q sú len voľné náboje.

2 Elektrický prúd v kovoch

2.1 Intenzita prúdu, hustota prúdu

Charakteristickou vlastnosťou valenčných elektrónov v kovoch je, že tieto prestávajú byť viazané na atómy a viac-menej sa voľne pohybujú v mriežke kovu. Nazývajú sa voľné alebo vodivostné elektróny. Za neprítomnosti elektrického poľa je ich pohyb chaotický, neusporiadaný, podobne ako je to u molekúl plynu. Ak kovový vodič pripojíme na zdroj jednosmerného napätia (napríklad k batérii), v každom bode vo vnútri vodiča vznikne elektrické pole \vec{E} , ktoré bude pôsobiť na elektróny a spôsobí, že sa začnú pohybovať proti smeru \vec{E} usmerne- ným pohybom. Hovoríme, že vznikol elektrický prúd. Stredný elektrický prúd vo vodiči je definovaný ako:

$$I_s = \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

kde ΔQ je náboj, ktorý prejde daným miestom prierezu vodiča počas časového intervalu Δt .

Ak sa elektrické napätie zdroja v čase mení, potom ani prúd nie je v čase konštantný a potrebujeme zaviesť veličinu, ktorá by vyjadrovala elektrický prúd v danom okamihu. Takouto veličinou je okamžitý elektrický prúd definovaný vzťahom:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}.$$

Jednotkou elektrického prúdu je ampér (A).

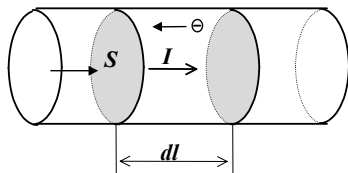
Vo všeobecnosti pojem prúd zahŕňa aj pohyb nábojov v trojrozmernom priestore. Aby sme ho popísali, zavedieme novú mikroskopickú veličinu - prúdovú hustotu \vec{j} . Je to vektorová veličina, ktorá je charakteristikou určitého bodu vo vnútri vodiča a nie vodiča ako celku.

Nech vo vodiči kruhového prierezu S sú voľné náboje s objemovou hustotou

$$\rho_V = \frac{dQ}{dV}, \quad (2.1)$$

kde dQ je voľný náboj v elementárnom objeme $dV = Sdl$ (Obr. 2.1). Pre jednoduchosť uvažujeme voľné náboje jedného druhu - napríklad voľné náboje v kovoch. Tieto voľné náboje nech sa pohybujú strednou rýchlosťou v_s . Veľkosť prúdovej hustoty definujeme ako podiel prúdu I , ktorý tečie plochou S a tejto plochy:

$$j = \frac{I}{S} = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt} \quad (2.2)$$



Obr. 2.1

Elementárny voľný náboj dQ , ktorý prejde plochou S za elementárny časový interval dt je náboj, ktorý sa nachádza v elementárnom objeme dV označenom na Obr. 2.1. V súlade s označením na tomto obrázku a vzťahom (2.1) platí:

$$dQ = \rho_V dV = \rho_V S dl.$$

Dosadením do rovnice (2.2) dostaneme

$$j = \frac{1}{S} \frac{\rho_V S dl}{dt} = \rho_V v_s$$

kde $v_s = \frac{dl}{dt}$ je stredná rýchlosť elektrónov (driftová rýchlosť). Ak je náboj voľného elektrónu e a v objemovej jednotke daného vodiča je n takýchto nábojov, potom objemová hustota voľného náboja je $\rho_V = en$ a pre prúdovú hustotu dostávame:

$$j = env_s.$$

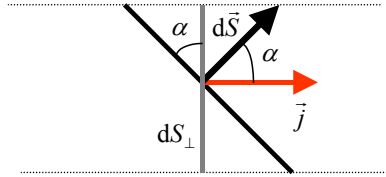
Prúdovú hustotu v danom bode môžeme vypočítať ako podiel elementárneho prúdu, ktorý tečie cez ľubovoľnú elementárnu plošku kolmú na smer prúdu v danom bode a tejto plošky. Pre elektrický prúd dI , ktorý tečie cez takúto elementárnu plošku platí:

$$dI = j dS_{\perp}$$

príčom platí, že $dS_{\perp} = dS \cos \alpha$.

Elementárny prúd dI možno teda zapísať ako skalárny súčin vektorov \vec{j} a $d\vec{S}$ (Obr. 2.2), príčom vektor prúdovej hustoty má smer rýchlosti nosičov náboja \vec{v}_s

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$



Obr. 2.2

Prúd, ktorý tečie plochou S , vypočítame ako integrál cez celú danú plochu:

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (2.3)$$

Zákon zachovania elektrického náboja hovorí, že celkové množstvo náboja, ktorý vznikne v ľubovoľnom procese, je rovné nule. Je možné ho vyjadriť aj matematicky. Majme objem V , ktorý je ohraničený uzavretou plochou S . Ak prúdi náboj smerom von z uzavretej plochy, náboj Q_V vo vnútri sa musí zmenšiť o toto odoviedajúce množstvo. Zákon zachovania náboja potom môžeme vyjadriť rovnicou:

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} Q_V. \quad (2.4)$$

2.2 Ohmov zákon, Jouleov zákon

2.2.1 Ohmov zákon

K tomu, aby vo vodiči tiekol prúd, je potrebný rozdiel potenciálov. G. S. Ohm (1787 - 1854) experimentálne stanovil, že podiel rozdielu potenciálov U medzi koncami vodiča a prúdu v kovovom vodiči je konštantný

$$\frac{U}{I} = R,$$

kde R je elektrický odpor vodiča. Táto závislosť sa nazýva **Ohmov zákon**. Pre kovové vodiče je odpor konštantný a nezávislý od napätia. Jeho jednotkou je ohm (Ω).

Experimentálne bolo tiež zistené, že odpor R kovového drôtu je priamo úmerný

jeho délce l a nepriamo úmerný jeho prierezu S , takže:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

kde ρ je tzv. rezistivita a je charakteristikou materiálu.

Odpor kovov rastie s teplotou a pre nie príliš široký teplotný interval jeho závislosť na teplote možno vyjadriť lineárnou závislosťou typu:

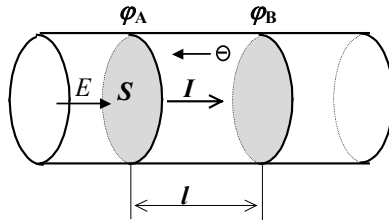
$$R = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)],$$

kde R je odpor pri teplote T , R_0 je odpor pri teplote T_0 , a α je teplotný koeficient odporu.

Prevrátená hodnota rezistivity sa nazýva konduktivita γ

$$\gamma = \frac{1}{\rho},$$

jej jednotkou je $(\Omega\text{m})^{-1}$. Ohmov zákon môže byť zapísaný aj v mikroskopickom



Obr. 2.3

tvare. Ak predpokladáme, že vo vodiči (tvare drôtu) dĺžky l (Obr. 2.3) je vytvorené homogénne elektrické pole intenzity E , potom pre odpovedajúci rozdiel potenciálov môžeme písať:

$$U = El.$$

Z tejto rovnice, použijúc Ohmov zákon, dostaneme:

$$RI = \rho \frac{l}{S} I = El.$$

Ak predpokladáme homogénnu prúdovú hustotu j v priereze drôtu, dostaneme z (2.3) pre veľkosť prúdu vzťah $I = jS$. Potom pre prúdovú hustotu platí:

$$j = \frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} E = \gamma E. \quad (2.5)$$

Prúdová hustota vo vodiči je teda priamo úmerná intenzite elektrického poľa, ktoré je vo vodiči vytvorené.

Poslednú rovnicu možno zapísať aj vo vektorovom tvare:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

Je to mikroskopické vyjadrenie Ohmovho zákona - **Ohmov zákon v diferenciálnom tvare**.

Vyššie uvedené experimentálne poznatky možno pochopiť na základe jednoduchého modelu. Predpokladáme, že transport náboja je sprostredkovaný voľnými elektrónmi, ktoré pri svojom pohybe narážajú na rôzne poruchy mriežky. Z hľadiska pochopenia teplotnej závislosti významnú úlohu zohrávajú poruchy v dôsledku tepelných kmitov atómov mriežky. V našom modeli budeme predpokladať, že rýchlosť elektrónu po každej zrážke s mriežkovou poruchou klesne na nulu.

Nech časový interval medzi dvomi následnými zrážkami je τ a počas tohto časového intervalu sa elektrón pohybuje priamočiara rovnomerne zrýchlene so zrýchlením a pod vplyvom silového pôsobenia homogénneho elektrického poľa intenzity E , ktoré je vytvorené vo vodiči. Strednú rýchlosť pohybu elektrónu môžeme potom vypočítať nasledovne:

$$v_s = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} v dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} a t dt = \frac{1}{\tau} \frac{a \tau^2}{2} = \frac{a \tau}{2}.$$

Zrýchlenie vyjadríme z 2. Newtonovho zákona:

$$m_0 a = e E \quad \Rightarrow \quad a = \frac{e E}{m_0},$$

kde m_0 je hmotnosť elektrónu. Ak predchádzajúci výsledok dosadíme za zrýchlenie do vzťahu pre strednú rýchlosť elektrónov, dostaneme:

$$v_s = \frac{e E}{2 m_0} \tau$$

a pre prúdovú hustotu potom môžeme písať:

$$j = env_s = \frac{e^2 n \tau}{2m_0} E = \gamma E,$$

kde

$$\gamma = \frac{e^2 n \tau}{2m_0}$$

je konduktivita daného materiálu.

Takýmto spôsobom sme teda dospeli k Ohmovmu zákonu (rovnica 2.5). Konduktivita daného materiálu rastie s narastaním počtu voľných nábojových nosičov a tiež s rastom stredného časového intervalu medzi zrážkami τ . Teplotnú závislosť konduktivity ovplyvňujú v rámci takéhoto modelu dva protichodné mechanizmy. Nárast počtu voľných nosičov s teplotou (napríklad polovodiče) vedie k nárastu konduktivity. Naopak, zvyšovanie teploty vedie k nárastu intenzity tepelných kmitov atómov mriežky, zvyšuje sa pravdepodobnosť nárazu nosiča na takúto poruchu a výsledkom je zmenšenie stredného časového intervalu medzi zrážkami τ . Tento druhý mechanizmus vedie k poklesu konduktivity s narastajúcou teplotou a je dominantným v prípade kovov, kde sa n prakticky nemení s teplotou.

2.2.2 Jouleov zákon

Jednoduchý model, ktorý sme použili v predchádzajúcej časti je tiež vhodný na vysvetlenie prenosu energie od voľných nábojov na kovovú mriežku vodiča. V rámci tohto modelu sa počas jednej zrážky celá kinetická energia elektrónu odovzdá mriežke. Tento prenos energie je zodpovedný za zvýšenie vnútornej energie vodiča, ktoré sa prejaví zvýšením jeho teploty.

Energia, ktorú odovzdá jeden elektrón počas jednej zrážky, je:

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v_{max}^2$$

kde $v_{max} = a\tau$ je rýchlosť elektrónu v okamihu zrážky, teda v čase τ . Keďže $a = \frac{eE}{m_0}$, pre energiu máme:

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v_{max}^2 = \frac{1}{2} m_0 \left(\frac{Ee\tau}{m_0} \right)^2 = \frac{E^2 e^2 \tau^2}{2m_0}.$$

Energia, ktorá je prenesená v objemovej jednotke vodiča počas časového intervalu τ , je:

$$E_n = nE_k = \frac{ne^2 \tau^2}{2m_0} E^2.$$

Výkon - energia odovzdaná za jednotku času v objemovej jednotke - je:

$$P_n = \frac{E_n}{\tau} = \frac{ne^2\tau}{2m_0}E^2 = \gamma E^2 = jE,$$

čo možno zapísať vo vektorovom tvare:

$$P_n = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Získali sme matematické vyjadrenie **Jouleovho zákona v diferenciálnom tvare** - z mikroskopického pohľadu.

Ak uvažujeme vodič dĺžky l a prierezu S , môžeme pre výkon v jeho objeme písať:

$$P = P_n Sl = \gamma E^2 Sl = \gamma \frac{j^2}{\gamma^2} Sl = \rho \frac{l}{S} j^2 S^2 = RI^2 = UI.$$

Táto rovnica vyjadruje **Jouleov zákon**. V tvare

$$P = UI$$

platí všeobecne, nielen pre špeciálny prípad úseku vodiča ako sme ho vyššie odvodili, a hovorí, že výkon elektrického prúdu sa rovná súčinu napätia vo vodiči a prúdu, ktorý tečie vodičom. Energia dodaná mriežke v dôsledku toku prúdu je ekvivalentná dodaniu tepla Q^* a prejaví sa navonok zahriatím vodiča. Môžeme teda písať

$$P = UI = \frac{dQ^*}{dt}$$

a

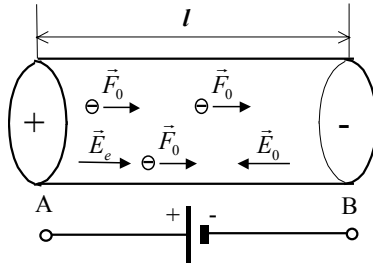
$$Q^* = \int_0^t UI dt.$$

2.3 Elektromotorické napätie

Na udržanie stáleho elektrického prúdu je potrebné zariadenie udržiavajúce stály rozdiel potenciálov - elektrické napätie - na dvoch svorkách z ktorých sa odoberá elektrický prúd. Predstavme si elektrický obvod pozostávajúci z takéhoto zariadenia - zdroja - a vodiča s odporom R . Aby bol prúd I tečúci takýmto obvodom stály, musí mať zdroj takú vlastnosť, že je schopný v každom okamihu kompenzovať pokles alebo nárast počtu nábojov na jeho svorkách, ako dôsledok prúdu. Je zrejmé, že vo vnútri zdroja pôsobia sily, zabezpečujúce uvedenú

kompenzáciu nábojov. Tieto sily nazývame „cudzími silami“. Sú to napríklad „chemické sily“ v akumulátoroch a galvanických článkoch, alebo sily pri elektromagnetickej indukcii.

Zdrojom elektromotorického napätia nazývame zariadenie v ktorom sa nejaká



Obr. 2.4

forma energie mení na elektrickú. Nech takúto vlastnosť má úsek vodiča ako je to znázornené na obrázku 2.4. Na jednotlivé voľné elektróny pôsobí „cudzia sila“ \vec{F}_0 . Intenzitu poľa cudzích síl definujeme vzťahom:

$$\vec{E}_0 = \frac{\vec{F}_0}{e}$$

Elektromotorické napätie definujeme ako podiel práce cudzej sily vykonanej pri prenesení daného náboja zdrojom elektromotorického napätia a veľkosti tohoto náboja. V zmysle tejto definície, pre situáciu na obrázku 2.4 platí:

$$\varepsilon = \frac{W_{AB}}{|e|} = \frac{\int_A^B \vec{F}_0 \cdot d\vec{l}}{|e|} = -\frac{|e| \int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}}{|e|} = \int_B^A \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}. \quad (2.6)$$

Vo vodiči sa účinkom cudzích síl dostávajú elektróny na koniec B. Vytvárajú tu prebytočný záporný náboj, kým na konci A sa vytvára rovnaký prebytok kladného náboja. Takéto prerozdelenie nábojov vedie k vzniku elektrického poľa vo vodiči. Na jednotlivé elektróny pôsobí okrem cudzej sily aj sila \vec{F}_e tohoto elektrického poľa, ktorá je opačne orientovaná ako cudzia sila \vec{F}_0 . Pri otvorenom elektrickom obvode nastáva rovnováha, ak výsledná sila pôsobiaca na elektróny je nulová, tj. keď

$$\vec{F}_e + \vec{F}_0 = 0.$$

Ak označíme symbolom \vec{E}_e intenzitu vytvoreného elektrického poľa, zrejme platí:

$$\vec{E}_e = -\vec{E}_0. \quad (2.7)$$

Uvažujme naďalej otvorený (nezaťažený) zdroj. V súlade s označením na obrázku 2.4, pre rozdiel potenciálov medzi koncovými bodmi zdroja, čiže elektrické napätie, platí:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \vec{E}_e \cdot d\vec{l}. \quad (2.8)$$

Zo vzťahov (2.6), (2.7) a (2.8) postupne dostaneme:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = \int_B^A \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = \varepsilon.$$

Vidíme, že napätie na svorkách nezaťaženého zdroja je rovné jeho elektromotorickému napätiu.

Vytvoríme teraz uzavretý elektrický obvod tak, že konce zdroja A, B spojíme vodičom, ktorého elektrický odpor je R . Vo vodiči nastane usmerný pohyb elektrónov z miesta B, kde je ich prebytok, na miesto A, kde je ich nedostatok. V dôsledku toho sa naruší rovnováha poľa cudzích síl a elektrického poľa vo vnútri zdroja. V zdroji opäť na okamih prevládajú cudzie sily a vo vnútri zdroja prebieha pohyb elektrónov obnovujúci elektrické náboje na svorkách zdroja. Takto sa v uzavretom elektrickom obvode udržuje stály elektrický prúd, ktorého veľkosť závisí na veľkosti elektromotorického napätia zdroja.

Elektrostatické pole je konzervatívne a teda pre čiarový integrál cez uzavretý elektrický obvod platí:

$$\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = 0.$$

Výsledné elektrické pole v ľubovoľnom bode obvodu je dané vzťahom:

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_0.$$

Počítajme teraz čiarový integrál z tohto poľa cez celý uzavretý elektrický obvod:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_e \cdot d\vec{l} + \oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = \int_{B \dots zdroj}^A \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} + \int_{A \dots R}^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = \varepsilon. \quad (2.9)$$

Na základe poslednej rovnice môžeme interpretovať elektromotorické napätie aj ako prácu, ktorú vykoná výsledné elektrické pole o intenzite \vec{E} pri prenesení kladného jednotkového náboja celým uzavretým obvodom.

Doteraz sme zanedbávali skutočnosť, že aj zdroj môže klásť odpor pohybu nábojov. V skutočnosti aj zdroj má nenulový odpor. Z (2.9) dostaneme

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{B \dots \text{zdroj}}^A \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{A \dots R}^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_v + U_{AB},$$

kde U_v je napätie vzniknuté prechodom prúdu cez vnútorný odpor zdroja r_v a U_{AB} je tzv. **svorkové napätie** na vonkajšom odpore R . Z Ohmovho zákona dostaneme:

$$\varepsilon = U_v + U_{AB} = r_v I + RI$$

alebo

$$U_{AB} = \varepsilon - U_v = \varepsilon - r_v I.$$

Pri prechode prúdu je teda svorkové napätie rovné elektromotorickému napätiu zmenšenému o úbytok napätia na vnútornom odpore zdroja.

4 Elektromagnetické pole

4.1 Elektromagnetická indukcia

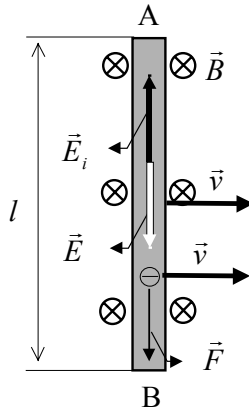
Uvažujme vodič dĺžky l , ktorý sa pohybuje konštantnou rýchlosťou \vec{v} v rovine kolmej na indukciu \vec{B} homogénneho magnetického poľa (pozri Obr. 4.1). Na všetky náboje vo vnútri vodiča pôsobí sila v smere dĺžky vodiča. Preto sa elektróny budú hromadiť na jeho konci B, kým na konci A bude prebytok kladného náboja. Vzniká teda elektrické pole \vec{E} , ktoré kompenzuje sily pôsobiace na elektrón vo vodiči, ktorý sa pohybuje v magnetickom poli. Pre takzvané indukované elektrické pole možno písať

$$q\vec{E}_i = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

a teda

$$\vec{E}_i = (\vec{v} \times \vec{B}).$$

Teraz si predstavme, že tento pohybujúci sa vodič sa posúva po ramenách

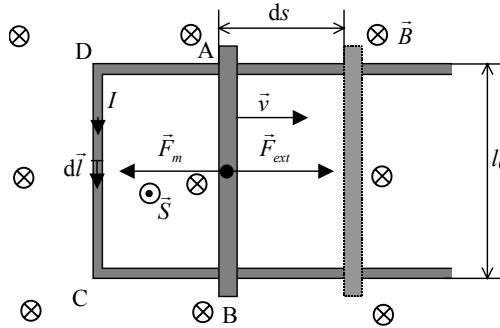


Obr. 4.1

pevného vodiča tvaru U, ako je to na Obr. 4.2. Z predchádzajúcej analýzy je zrejmé, že vo vnútri vodiča tvaru U vznikne prúd I . V dôsledku tohto prúdu sú redukované náboje na koncoch pohybujúceho sa vodiča, elektrostatické pole

vo vnútri pohybujúceho sa vodiča sa oslabí a magnetické sily spôsobia ďalšie posunutie voľných elektrónov od B ku A.

Počas pohybu vodiča bude vo vodiči tvaru U tiecť prúd v smere proti pohybu



Obr. 4.2

hodinových ručičiek. V pohybujúcom sa vodiči vzniká **indukované elektromotorické napätie** ϵ , ktorého veľkosť je:

$$\epsilon = \int_B^A \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \int_B^A (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = vBl_0.$$

K vyjadreniu indukovaného napätia možno dospieť aj iným spôsobom. Nech uzavretou dráhou v definícii elektromotorického napätia je obvod plochy S . Vektor plochy $d\vec{S}$ definujeme štandardným spôsobom a bude orientovaný tým smerom, odkiaľ vidíme vektory $d\vec{l}$ v smere proti smeru pohybu hodinových ručičiek. Z obrázka 4.2 je vidieť, že platí:

$$\vec{B} \cdot \vec{S} = -BS,$$

kde B je veľkosť \vec{B} .

Ak sa vodič posunie doprava o vzdialenosť ds , plocha obvodu (obdĺžníka) A-B-C-D sa zväčší o

$$dS = l_0 ds,$$

zmena magnetického toku cez plochu ohraničenú obvodom je

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = -BdS = -Bl_0 ds$$

a možno písať:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -Bl_0 \frac{ds}{dt} = -Bl_0 v = -\varepsilon.$$

Teda platí:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Táto rovnica je známa ako **Faradayov zákon**, ktorý hovorí, že indukované napätie vzniká všade tam, kde sa v čase mení magnetický tok. Ak napríklad uložíme uzavretú vodivú slučku do premenného magnetického poľa, magnetický tok cez slučku sa bude meniť a vznikne v nej indukované napätie. Toto napätie uvedie do pohybu voľné elektróny vo vodiči, t. j. indukuje elektrický prúd. Smer tohto prúdu je určený tzv. **Lenzovým zákonom**, ktorý hovorí, že smer indukovaného prúdu je taký, že pôsobí proti zmene, ktorá ho vyvolala. Tento fakt môžeme dokázať analýzou situácie na obrázku 4.2.

Aby sa vodič pohyboval, je potrebná vonkajšia sila \vec{F}_{ext} . Keďže vodičom tečie indukovaný prúd I , magnetické pole \vec{B} bude naň pôsobiť silou \vec{F}_m . Ako je vidieť, tieto sily sú opačne orientované.

Indukované elektrické pole je práve také reálne, ako elektrické pole vytvorené statickým nábojom a silovo pôsobí na náboje.

Faradayov zákon môžeme zapísať pre všeobecný prípad, ak vezmeme do úvahy, že

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Táto rovnica v kombinácii s Faradayovým zákonom dáva

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

a tiež:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (4.1)$$

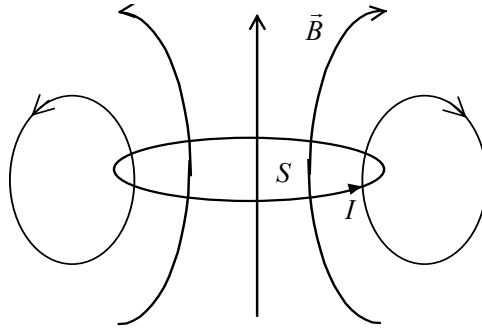
Toto je Faradayov zákon v najvšeobecnejšom tvare. Poskytuje hodnotu indukovaného napätia, pričom nezáleží na tom, čo spôsobilo zmenu magnetického toku - či už to bol pohyb vodiča, pohyb magnetu, zmena indukcie, zmena tvaru vodivej slučky alebo niečo iné.

4.2 Indukčnosť

V predchádzajúcej časti sme analyzovali ako meniaci sa magnetický tok cez plochu závitú indukuje elektromotorické napätie v závite. Vieme tiež, že v okolí

vodiča, ktorým tečie prúd, vzniká magnetické pole. Môžeme teda očakávať, že premenný prúd v jednom závite bude indukovať napätie v druhom blízkom závite a dokonca bude indukovať elektromotorické napätie aj sám v sebe. Popíšeme teraz tento efekt.

Majme uzavretú slučku, ktorou tečie prúd I (Obr. 4.3). Magnetický tok Φ cez



Obr. 4.3

plochu S , ktorá je ohraničená slučkou, je daný vzťahom:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Hodnotu magnetickej indukcie v danom bode plochy môžeme získať z Biotovho - Savartovho zákona. Je zrejmé, že táto hodnota bude úmerná intenzite prúdu I , teda môžeme písať:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S I \vec{\gamma} \cdot d\vec{S} = I \int_S \vec{\gamma} \cdot d\vec{S}.$$

Ak označíme $\int_S \vec{\gamma} \cdot d\vec{S} = L$, môžeme písať

$$\Phi = LI,$$

kde konštanta úmernosti L medzi Φ a I sa nazýva **vlastná indukčnosť**. Veľkosť L závisí od geometrických vlastností a od permeability prostredia.

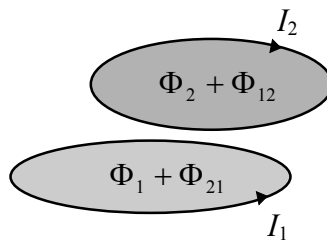
Jednotkou indukčnosti v SI je

$$[L] = \frac{[\Phi]}{[I]} = \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = \text{H (henry)}.$$

Majme teraz slučku, ktorou prechádza časovo premenný prúd. V tomto prípade vzniká premenný magnetický tok a ten má za následok indukované napätie. Toto indukované napätie pôsobí proti zmene toku (Lenzovo pravidlo). Napríklad ak prúd v slučke narastá, rastúci magnetický tok indukuje napätie, ktoré spôsobí spomalenie narastania tohto prúdu. Ak prúd je klesajúci, klesajúci magnetický tok indukuje napätie, ktoré bude pôsobiť proti poklesu tohto prúdu. Hodnotu napätia indukovaného v slučke s indukčnosťou L možno získať pomocou Faradayovho zákona:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) = -L\frac{dI}{dt}.$$

Teraz uvažujme prípad, keď sú dva závity 1 a 2 uložené blízko seba (Obr.



Obr. 4.4

4.4). Je zrejmé, že premenný prúd v jednom závite bude indukovať napätie v druhom závite. Podľa Faradayovho zákona bude elektromotorické napätie ε_2 indukované v druhom závite úmerné časovej zmene magnetického toku, ktorý ním prechádza. Tento tok vzniká v dôsledku prúdu I_1 , ktorý tečie prvým závitom a je preto vhodné vyjadriť indukované napätie v druhom závite pomocou prúdu prechádzajúceho prvým závitom. Nech Φ_{12} je magnetický tok prechádzajúci plochou druhého závitu v dôsledku prúdu I_1 v prvom závite. Ak obe slučky majú v priestore nemennú polohu, potom Φ_{12} je priamo úmerný prúdu I_1 v prvej slučke a konštanta úmernosti, ktorá sa nazýva vzájomná indukčnosť M_{12} , je definovaná takto:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}.$$

Indukované napätie ε_2 , ktoré vzniká v druhej slučke v dôsledku premenného prúdu prechádzajúceho prvou slučkou, je

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt}(M_{12}I_1) = -M_{12}\frac{dI_1}{dt}.$$

Tento vzťah dáva do súvisu prúd v prvej slučke s napätím, ktoré sa v dôsledku toho indukuje v druhej slučke. Vzájomná indukčnosť druhej slučky vzhľadom na prvú je konštanta, ktorá závisí od veľkosti, tvaru a vzájomnej polohy oboch slučiek a tiež od prostredia.

Ak si teraz predstavíme opačnú situáciu, keď premenný prúd tečúci druhou slučkou indukuje napätie v prvej, máme

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{d}{dt}(M_{21}I_2) = -M_{21}\frac{dI_2}{dt}$$

kde M_{21} je vzájomná indukčnosť slučky 1 vzhľadom na slučku 2. Platí, že $M_{21} = M_{12} = M$. Preto pre dané slučky nemusíme písať indexy a teda

$$\varepsilon_1 = -M\frac{dI_2}{dt} \quad \text{a} \quad \varepsilon_2 = -M\frac{dI_1}{dt}.$$

Jednotkou vzájomnej indukčnosti v SI je henry (H).

4.3 Energia a hustota energie v magnetickom poli

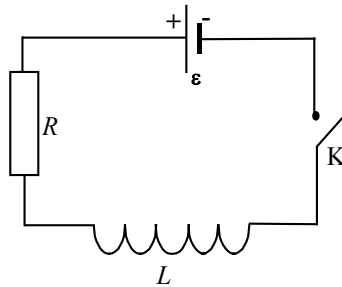
Práca vykonaná pri oddialení dvoch nábojov rôznych znamienok sa uloží do elektrického poľa, ktoré je medzi nimi. Môžeme ju získať späť, ak necháme náboje, aby sa opäť priblížili k sebe.

Podobne môžeme uložiť energiu v magnetickom poli. Napríklad dva dlhé rovnobežné vodiče, ktorými tečú prúdy v tom istom smere, sa priťahujú a na ich oddialenie musíme vynaložiť prácu. Túto energiu môžeme získať späť, ak necháme vodiče opäť sa k sebe priblížiť do pôvodnej polohy. Aby sme odvodili kvantitatívny vzťah pre energiu magnetického poľa, uvažujme obvod ako je na Obr. 4.5, kde je k zdroju elektromotorického napätia ε cez vypínač K pripojená cievka indukčnosti L s odporom R . V okamihu $t = 0$ je RL okruh pripojený k zdroju. V tomto okamihu je prúd $I = 0$. Podľa 2. Kirchhoffovho zákona

$$\varepsilon + \varepsilon_L = RI$$

alebo

$$\varepsilon - L\frac{dI}{dt} = RI.$$



Obr. 4.5

Ak túto rovnicu vynásobíme prúdom I , dostaneme:

$$\varepsilon I - L \frac{dI}{dt} I = RI^2. \quad (4.2)$$

Rovnica 4.2 vyjadruje zákon zachovania energie pre okruh RL . Jednotlivé členy rovnice môžeme interpretovať nasledovne:

- výraz εI vyjadruje energiu dodanú za jednotku času zo zdroja do okruhu,
- RI^2 vyjadruje energiu, ktorá sa za jednotku času v cievke premení na tepelnú energiu.

Energia, ktorá sa neprejaví ako tepelná energia, musí byť energiou magnetického poľa vytvoreného v cievke.

- Výraz $LI \frac{dI}{dt}$ musí teda predstavovať zmenu energie $\frac{dE_m}{dt}$ magnetického poľa za jednotku času.

Teda

$$\frac{dE_m}{dt} = LI \frac{dI}{dt},$$

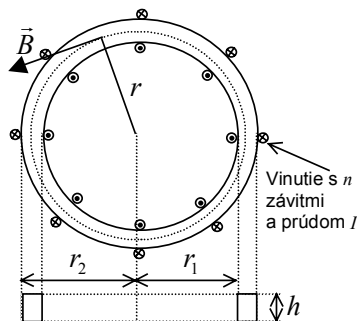
čo možno písať

$$dE_m = LI dI.$$

Integrovaním máme

$$E_m = \int_0^{I_m} LI dI = \frac{1}{2} LI_m^2, \quad (4.3)$$

čo je celková energia magnetického poľa vytvoreného cievkou indukčnosti L , ak ňou prechádza prúd I_m . Vzťah (4.3) má všeobecnú platnosť a vyjadruje energiu magnetického poľa vodiča ľubovoľného tvaru indukčnosti L a ktorým preteká prúd I . Nájďme teraz všeobecné vyjadrenie energie magnetického poľa



Obr. 4.6

pomocou veličín charakterizujúcich pole. Uvažujme úzky toroid s n závitmi, ktorými tečie prúd I , ako je to na obrázku 4.6. Veľkosť indukcie poľa \vec{B} vo vzdialenosti r od stredu toroidu vyjadríme pomocou zákona celkového prúdu. Za integračnú dráhu vezmeme kružnicu polomeru r :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint H dl = H \int_0^{2\pi r} dl = H 2\pi r = nI.$$

Odtiaľ pre veľkosť indukcie máme:

$$B = \mu H = \frac{\mu n I}{2\pi r}. \quad (4.4)$$

Pre magnetický tok cez plochu jedného závitú môžeme písať

$$\Phi_0 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B dS = \int_S \frac{\mu n I}{2\pi r} dS = \frac{\mu n I}{2\pi} \int_0^h \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr dh = \frac{\mu n I h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Celkový tok cez n závitov je

$$\Phi = n\Phi_0 = \frac{\mu n^2 I h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

a vlastná indukčnosť toroidu je:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{n\Phi_0}{I} = \frac{\mu n^2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Uvažujme teraz prípad, kedy $\Delta r = r_2 - r_1 \ll r$. V tomto prípade môžeme použiť aproximáciu:

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = \ln \left(1 + \frac{\Delta r}{r_1} \right) \approx \frac{\Delta r}{r}.$$

Pole vo vnútri toroidu môžeme považovať za konštantné a pre indukčnosť môžeme písať:

$$L = \frac{\mu n^2 h \Delta r}{2\pi r}. \quad (4.5)$$

Magnetické pole je iba vo vnútri toroidu a jeho energia $E_m = \frac{1}{2} LI^2$. Ak za prúd dosadíme $I = \frac{2\pi r}{n\mu} B$ (pozri (4.4) a hodnotu L z rovnice (4.5), dostávame:

$$E_m = \frac{1}{2} \frac{\mu n^2 h \Delta r}{2\pi r} \left(\frac{2\pi r}{n\mu} B \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} 2\pi r h \Delta r = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} V,$$

kde $V = 2\pi r h \Delta r$ je objem toroidu.

Hustotu energie w_m magnetického poľa definujeme ako energiu objemovej jednotky. Z predchádzajúcich výpočtov máme:

$$w_m = \frac{E_m}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}.$$

Tento výraz je všeobecný výraz pre výpočet hustoty energie magnetického poľa indukcie B a dá sa písať aj v tvare:

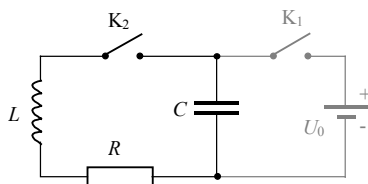
$$w = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}.$$

4.4 Elektrický oscilačný obvod

Základné pojmy a matematický popis, ktoré sme použili pri štúdiu lineárneho harmonického oscilátora možno aplikovať aj pri štúdiu oscilácií elektrického prúdu v sériovom oscilačnom obvode.

Uvažujme elektrický obvod, tzv. sériový RLC obvod, zložený z ohmického odporu R , cievky s indukčnosťou L a kondenzátora s kapacitou C (pozri Obr. 4.7). RLC obvod je na obrázku 4.7 doplnený o časť obsahujúcu zdroj jednosmerného

napätia o veľkosti U_0 pripojený k RLC obvodu cez kľúč K_1 . Pri rozopnutom kľúči K_2 a zopnutom kľúči K_1 sa kondenzátor nabije na napätie zdroja U_0 . Toto napätie zostáva na kondenzátore aj po následnom vypnutí kľúča K_1 . Vyšetříme časový priebeh prúdu RLC obvodom od momentu zapnutia kľúča K_2 . Druhý



Obr. 4.7

Kirchhoffov zákon pre uvedený RLC obvod má tvar:

$$U_L + U_C = RI, \quad (4.6)$$

kde napätie na kondenzátore je

$$U_C = \frac{Q}{C}, \quad (4.7)$$

samoindukčné elektromotorické napätie indukované v cievke je

$$U_L = -L \frac{dI}{dt}, \quad (4.8)$$

kde Q je náboj na kondenzátore a I je prúd tečúci obvodom.

V ďalšom kroku dosadíme rovnice (4.7), (4.8) do rovnice (4.6) a následne celú rovnicu zderivujeme podľa času. Dostaneme:

$$\frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} - L \frac{d^2 I}{dt^2} = R \frac{dI}{dt}. \quad (4.9)$$

Ak si uvedomíme, že

$$I = -\frac{dQ}{dt},$$

môžeme rovnicu (4.9) vyjadriť v tvare:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0. \quad (4.10)$$

Po predelení rovnice (4.10) L a zavedení substitúcií

$$2b = \frac{R}{L} \quad \text{a} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad (4.11)$$

dospejeme k rovnici

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2b \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = 0. \quad (4.12)$$

K rovnakej rovnici sme dospeli aj pri riešení problému tlmeného lineárneho harmonického oscilátora. Analogicky ako v uvedenom prípade dostaneme, pre prípad malého tlmenia ($b < \omega_0$) všeobecné riešenie rovnice (4.12) v tvare:

$$I = I_0 e^{-bt} \sin(\omega t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}, \quad (4.13)$$

kde amplitúda I_0 a fázová konštanta φ sú integračné konštanty, závislé na počiatočných podmienkach.

Špeciálny (ideálny) prípad netlmených elektrických oscilácií predstavuje prípad LC obvodu, t.j. prípad, keď položíme ohmický odpor obvodu $R = 0$. V tomto prípade nadobudne rovnica (4.12) tvar:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \omega_0^2 I = 0.$$

Jej všeobecné riešenie môžeme vyjadriť rovnicou:

$$I = I_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (4.14)$$

S využitím rovníc (4.6) (pre $R = 0$), (4.8) a (4.14) môžeme vyjadriť časovú závislosť napätia na kondenzátore:

$$U_C = -U_L = L \frac{dI}{dt} = LI_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (4.15)$$

Pre prípad spustenia oscilácií postupom popísaným v úvode tejto kapitoly je v čase $t = 0$ $I = 0$ a $U_0 = U_c$.

Po dosadení týchto počiatočných podmienok do rovníc (4.14) a (4.15) dostaneme:

$$0 = I_0 \sin(\varphi), \quad U_0 = LI_0 \omega_0 \cos(\varphi)$$

a ich riešením je:

$$\varphi = 0 \quad \text{a} \quad I_0 = \frac{U_0}{L\omega_0}.$$

Vzťah (4.14) prejde potom do tvaru

$$I = \frac{U_0}{L\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (4.16)$$

Vidíme, že v uvažovanom elektrickom obvode tečie periodicky premenlivý harmonický elektrický prúd. Hovoríme, že ide o harmonické kmity alebo oscilácie elektrického prúdu. Uvažovaný elektrický obvod nazývame preto oscilačným elektrickým obvodom. Pre periódu harmonických oscilácií elektrického prúdu platí:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (4.17)$$

Vzťah (4.17) je Thomsonov vzorec.

Pre frekvenciu oscilácií platí:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Všimnime si procesy, ktoré v oscilačnom obvode prebiehajú. V čase $t = 0$ medzi elektródami nabitého kondenzátora existuje elektrické pole, ktorého energia je

$$E_e = \frac{1}{2}CU_0^2.$$

Po zapnutí kľúča K_2 sa začne kondenzátor vybíjať, obvodom preteká premenlivý prúd. Elektrické pole postupne zaniká, a na jeho konto vzniká pole magnetické. Toto pole je najintenzívnejšie vtedy, keď má prúd v obvode maximálnu hodnotu I_0 . Vtedy je energia magnetického poľa daná vzťahom:

$$E_m = \frac{1}{2}LI_0^2. \quad (4.18)$$

S ohľadom na vzťah (4.16) stane sa tak v čase $t = \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{T}{4}$. Výraz (4.18), využijúc vzťah (4.11), v tomto okamihu možno upraviť na tvar:

$$E_m = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}L \frac{U_0^2}{L^2 \frac{1}{LC}} = \frac{1}{2}CU_0^2 = E_e.$$

Vidíme, že v tomto okamihu je energia magnetického poľa rovná energii pôvodného elektrického poľa, ktoré bolo medzi elektródami kondenzátora v čase $t = 0$. V čase $t = \frac{T}{4}$ niet poľa elektrického, na jeho konto vzniklo pole magnetické. Celá

energia aj hmotnosť pôvodného elektrického poľa prešla na energiu a hmotnosť magnetického poľa. V ďalšom priebehu sa kondenzátor opäť nabíja, pravda s opačnou polaritou, vzniká teda zase pole elektrické a to na konto magnetického poľa, ktoré zaniká a v čase $t = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{T}{2}$ úplne zanikne. V tomto okamžiku existujúce elektrické pole sa vyznačuje opäť energiou $E_e = \frac{1}{2}CU_0^2$. V ďalšom priebehu sa zase energia elektrického poľa mení na energiu magnetického poľa a naopak. Máme tu do činenia s prípadom periodickej premeny elektrického poľa na pole magnetické a naopak. Takýto oscilačný obvod označujeme ako neltmený oscilačný obvod, a oscilácie v ňom vzniklé by sa teoreticky mohli udržať nekonečne dlho. To je však ideálny prípad. V skutočnosti dochádza pri tomto procese k výmene energie nielen medzi elektrickým a magnetickým poľom, ale aj medzi vodičmi, ktoré obvod uzatvárajú. V dôsledku toho sa vždy väčšia a väčšia časť energie elektromagnetickej mení na vnútornú energiu týchto vodičov, až nakoniec oscilácie celkom zaniknú. Tieto straty označujeme ako ohmické straty a takýto oscilačný obvod nazývame tlmeným oscilačným obvodom. Priebeh prúdu v takomto obvode je popísaný rovnicou (4.13). Pre periódu tlmených oscilácií platí vzťah:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}.$$

Poznamenajme, že aj v prípade ideálneho obvodu ($R = 0$) existuje zdroj energetických strát, ktoré principiálne nemožno nikdy zanedbať. Príčinou týchto strát je, že elektrický oscilačný obvod časť svojej elektromagnetickej energie odovzdáva prostredníctvom elektromagnetických vln, ktoré vysiela. Intenzita tohto vysiellaného elektromagnetického vlnenia je veľmi rozdielna a v podstatnej miere závisí od geometrického tvaru oscilačného obvodu. Pri elektrickom obvode, ktorý pozostáva z husto navinutej indukčnej cievky s indukčnosťou L a doskového kondenzátora kapacity C , je toto vlnenie veľmi slabé vtedy, keď kapacita celého obvodu je prakticky celkom daná kapacitou kondenzátora. Hodnoty L a C musia byť oproti indukčnosti a kapacite ostatných častí obvodu veľmi veľké, ak chceme, aby straty spôsobené vysielením elektromagnetického vlnenia boli veľmi malé. V takomto prípade hovoríme o uzavretom elektrickom oscilačnom obvode. Obvod nakreslený na Obr. 4.7 je spravidla takýto uzavretý obvod. Pri tzv. otvorenom elektrickom oscilačnom obvode sú energetické straty prostredníctvom vysiellaného elektromagnetického žiarenia už veľmi výrazné. V takomto prípade vzniká aj pri nulovom alebo zanedbateľnom ohmickom odpore obvodu značné tlmenie elektrických oscilácií v dôsledku vysiellaného elektromagnetického žiarenia, takže možno hovoriť o tlmení žiarením. Aby sa kmity v takýchto otvorených zdrojoch udržali, je potrebné vyžiarenú energiu nahradiť

energiou z nejakého vonkajšieho generátora.

6 Elektromagnetické vlnenie

6.1 Opis elektromagnetického vlnenia

Na teoretický popis elektromagnetického vlnenia možno použiť Maxwellove rovnice. Pre jednoduchosť budeme uvažovať vákuum, kde nie sú žiadne náboje, prúdy, ani permanentné magnety. Za týchto podmienok majú Maxwellove rovnice tvar:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (6.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (6.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad (6.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (6.4)$$

Derivujme rovnicu (6.1) podľa času:

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

a za $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ dosadíme z rovnice (6.2):

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Ak použijeme nasledovnú identitu známu z vektorovej analýzy

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

a rovnicu (6.3), dostaneme

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (6.5)$$

kde $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ je tzv. Laplaceov operátor.

Podobným postupom možno dospieť k rovnakej rovnici pre vektor \vec{B} :

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (6.6)$$

Rovnica typu $\Delta \vec{u} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$ je známa ako vlnová rovnica popisujúca netlmenú vlnu šíriacu sa rýchlosťou v . Vidíme teda, že rovnice (6.5) a (6.6) sú vlnovými rovnicami a teda popisujú v priestore sa šíriaci vlnový rozruch vo forme zmien vektorov \vec{E} a \vec{B} . Takúto vlnu nazývame elektromagnetickou vlnou. Ak porovnáme vyššie uvedenú obecnú vlnovú rovnicu s rovnicami (6.5) a (6.6), dostávame pre rýchlosť elektromagnetickej vlny vo vákuu vzťah:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

Ak dosadíme hodnoty permitivity a permeability pre vákuum, dostaneme výsledok

$$v = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}.$$

Táto hodnota je zhodná s nameranou rýchlosťou svetla vo vákuu. Rýchlosť šírenia sa elektromagnetických vln vo vákuu je konštanta, ktorá nezávisí od vlnovej dĺžky a frekvencie.

Aby sme sa dozvedeli viac o vlastnostiach elektromagnetickej vlny, uvažujme prípad, keď sa takáto vlna šíri napríklad pozdĺž osi x . Nech vektor intenzity elektrického poľa vyhovuje rovnici rovinnej vlny šíriacej sa v kladnom smere osi x , teda:

$$\vec{E} = \vec{E} \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

Použijúc substitúciu $p = t - \frac{x}{v}$ môžeme písať:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{d\vec{E}}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d\vec{E}}{dp} \left(-\frac{1}{v} \right),$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{d\vec{E}}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{d\vec{E}}{dp},$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \left(-\frac{1}{v} \right).$$

Z týchto rovníc spolu s Maxwellovou rovnicou $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ postupne dostaneme:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} & \frac{\partial E_y}{\partial x} & \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \vec{i} \times \frac{d\vec{E}}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} = \vec{i} \times \frac{d\vec{E}}{dp} \left(-\frac{1}{v} \right) = -\frac{1}{v} \vec{i} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{i} \times \vec{E}}{v} \right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

Keďže rovnica

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{i} \times \vec{E}}{v} \right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

platí v ľubovoľnom časovom okamihu, môžeme písať:

$$\vec{B} = \frac{\vec{i} \times \vec{E}}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu} (\vec{i} \times \vec{E}). \quad (6.7)$$

Z rovnice (6.7) môžeme urobiť nasledovné závery:

1. vektor \vec{B} je vždy kolmý na vektor \vec{E} ,
2. vektor \vec{B} je vždy kolmý na vektor \vec{i} , čo znamená že vektor \vec{B} sa môže meniť iba v rovine, ktorá je kolmá na smer šírenia sa elektromagnetickej vlny,
3. časová závislosť \vec{B} je rovnaká ako časová závislosť \vec{E} , takže vektory \vec{E} a \vec{B} kmitajú vo fáze,
4. súvis medzi veľkosťami vektorov \vec{B} a \vec{E} je daný rovnicou $|\vec{B}| = \sqrt{\varepsilon\mu} |\vec{E}|$.

Z Maxwellovej rovnice $\text{div} \vec{E} = 0$ dostaneme:

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial(\vec{i} \cdot \vec{E})}{\partial x} = \vec{i} \cdot \frac{\partial(\vec{E})}{\partial x} = \vec{i} \cdot \frac{d\vec{E}}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} = \vec{i} \cdot \frac{d\vec{E}}{dp} \left(-\frac{1}{v}\right) = \\ &= -\frac{\vec{i}}{v} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\vec{i} \cdot \vec{E}}{v}\right) = 0 \end{aligned}$$

Rovnica

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{i} \cdot \vec{E}}{v} \right) = 0$$

platí pre každý časový okamih, preto:

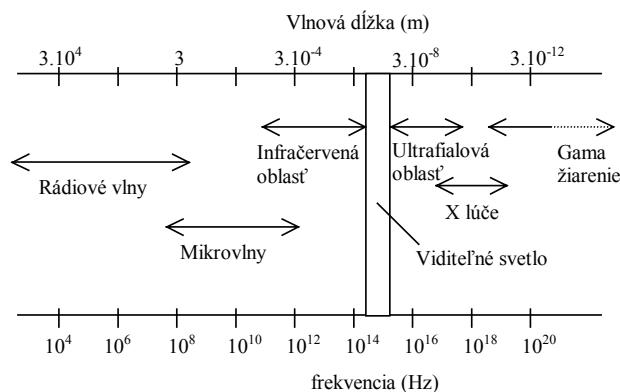
$$\vec{i} \cdot \vec{E} = 0.$$

Z tejto rovnice vyplýva, že vektor \vec{E} je vždy kolmý na vektor \vec{i} , čo znamená, že aj vektor \vec{E} sa mení v rovine kolmej na smer šírenia sa elektromagnetickeho vlnenia. Z toho vidíme, že rovinná elektromagnetická vlna je priečnym vlnením.

6.2 Elektromagnetické spektrum

Oblasť frekvencií elektromagnetického vlnenia, alebo elektromagnetického žiarenia, je veľmi široká, obvykle sa delí ako je to na obrázku 6.1 a nazýva sa elektromagnetické spektrum. Vlnová dĺžka viditeľného svetla leží medzi $4 \cdot 10^{-7}$ m a $7,5 \cdot 10^{-7}$ m; frekvencie viditeľného svetla sa menia od $4 \cdot 10^{14}$ Hz do $7,5 \cdot 10^{14}$ Hz. Ale viditeľné svetlo je iba veľmi malou časťou spektra elektromagnetického žiarenia (Obr. 6.1). Elektromagnetické vlny s oveľa menšou frekvenciou sa nazývajú rádiovými vlnami, pretože takýmito frekvenciami sa dnes prenáša rádiový a televízny signál. Takéto vlny sa tvoria pomocou elektronických zariadení.

Vlny s vyššou frekvenciou je veľmi obtiažne produkovať elektronicky. Sú pro-



Obr. 6.1

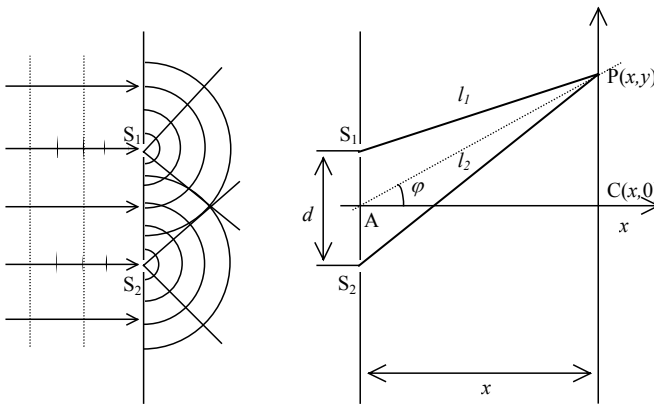
dukované v prírodných procesoch, ako sú emisie z atómov a molekúl. Elektromagnetické žiarenie vzniká aj vtedy, ak sa urýchľujú elektróny alebo iné nabité častice. X lúče vznikajú pri prudkom zabrzdení rýchlych elektrónov pri ich dopade na kovový terčik.

Infračervené žiarenie, ktorého frekvencia je o niečo menšia ako je frekvencia viditeľného žiarenia, je zodpovedné za tepelné žiarenie Slnka. Slnko vyžaruje nielen viditeľné žiarenie, ale aj značné množstvo infračerveného a ultrafialového žiarenia.

6.3 Vlnové vlastnosti elektromagnetického žiarenia

6.3.1 Youngov interferenčný pokus

V oblasti, kde sa prekrývajú vlnenia, dochádza k ich skladaniu - interferencii. Výsledné kmitanie v každom mieste sa vyznačuje okamžitou výchylkou rovnou súčtu okamžitých výchylek jednotlivých vln, amplitúda výsledného kmitania bude závisieť najmä od rozdielu fáz skladaných vln. Významný je prípad, kedy zdroje vlnení kmitajú s rovnakou frekvenciou, majú rovnaký smer kmitania a konštantný fázový rozdiel - sú koherentné. V tomto prípade amplitúda výsledného kmitania v danom bode závisí iba od jeho vzdialenosti od zdrojov vlnení. Zásadný význam pre dôkaz vlnovej podstaty svetla mal Youngov interferenčný pokus. Ako dva koherentné zdroje vlnenia použil Young dve blízke štrbiny (ich šírka je oveľa menšia ako ich vzájomná vzdialenosť), ktoré sú osvetlené jedným svetelným zdrojom a samy sa podľa Huygensovho princípu stávajú novými zdrojmi vlnení, ktoré kmitajú s rovnakou fázou a amplitúdou (Obr. 6.2). Tieto vlnenia sa prekrývajú a spolu interferujú. Vyšetříme interferenciu v bode P na tienidle vzdialenom o x od štrbín, pričom platí $x \gg d$, kde d je vzdialenosť štrbín. Za uvedeného predpokladu možno pokladať svetelné lúče prichádzajúce do bodu P za rovnobežné, pričom uhol, ktorý zvierajú s osou x nech je φ .



Obr. 6.2

Intenzita osvetlenia je úmerná kvadrátu výslednej amplitúdy. Pre výslednú am-

plitúdu pri skladaní dvoch rovnosmerných kmitavých pohybov s rovnakou amplitúdou A platí:

$$A_v = \sqrt{2A^2 + 2A^2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

takže je zrejmé, že výsledná amplitúda závisí iba od rozdielu fáz $\alpha_2 - \alpha_1$. Ak $\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = -1$, výsledná amplitúda je rovná nule a v mieste, kde sa skladajú dva takéto lúče, bude tma; najsvetlejšie miesta budú tam, kde sa skladajú dva lúče, pre ktoré $\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = 1$.

Dva skladajúce sa lúče možno popísať nasledovne:

$$u_1 = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi l_1}{\lambda}\right) \quad \text{a} \quad u_2 = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi l_2}{\lambda}\right)$$

a rozdiel fáz je

$$|\alpha_2 - \alpha_1| = \left| -\frac{2\pi l_2}{\lambda} + \frac{2\pi l_1}{\lambda} \right| = \frac{2\pi}{\lambda} |l_1 - l_2| = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta,$$

kde Δ je dráhový rozdiel.

Maximá amplitúdy a teda najsvetlejšie miesta na tienidle budú tam, kde platí:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \Delta = 2k\pi \Rightarrow \Delta = k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.8)$$

Pre veľkosť dráhového rozdielu Δ dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta &= l_2 - l_1 = \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2} = \\ &= x \left[\sqrt{1 + \left(\frac{y + \frac{d}{2}}{x}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{y - \frac{d}{2}}{x}\right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Pri experimente je spravidla splnená podmienka, že tak ako vzdialenosť štrbín d ako aj poloha bodu P na tienidle y sú omnoho menšie ako vzdialenosť medzi štrbinami a tienidlom x . Využijúc binomický rozvoj pre $a \ll 1$ približne platí

$$\sqrt{(1 \pm a)} \cong 1 \pm \frac{1}{2}a.$$

Zrejme platí $a = \left(\frac{y \pm \frac{d}{2}}{x}\right)^2 \ll 1$ a teda v uvedenej aproximácii dostávame zo vzťahu (6.9) pre dráhový rozdiel lúčov:

$$\Delta \cong \frac{yd}{x}. \quad (6.10)$$

Po dosadení do (6.8), pre polohy maxím dostávame:

$$y = \frac{x}{d}k\lambda.$$

Z (6.10), pravouhlého trojuholníka ACP na obrázku 6.2 a pre $y \ll x$ dostaneme:

$$\Delta \cong \frac{yd}{x} = tg\varphi d \cong d \sin \varphi$$

a teda podmienku maxima môžeme napísať aj nasledovným spôsobom:

$$d \sin \varphi = k\lambda.$$

V bodoch, kde sa skladajú dva také lúče, ktorých dráhový rozdiel je celistvý násobok vlnovej dĺžky dopadajúceho svetla, sa objaví maximálne osvetlenie, kým v miestach, kde $d \sin \varphi = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$ bude amplitúda, a teda aj intenzita nulová. To znamená, že tam budú tmavé miesta. Na tienidle sa objavia striedavo svetlé a tmavé pásy. Takto vypočítané výsledky boli v úplnej zhode s pozorovaním, teda svetlo sa tu prejavuje a dá sa úspešne popísať ako vlnenie.

6.3.2 Interferencia svetla na tenkej vrstve

Na úvod tejto kapitoly definujme index lomu n pre dané prostredie vzťahom

$$n = \frac{c}{v},$$

kde c je rýchlosť svetla vo vákuu a v je rýchlosť svetla v danom prostredí.

Ako už vieme, podmienku interferenčného zosilnenia pre vlny, a teda aj pre svetlo, postupujúce v tom istom prostredí môžeme vyjadriť vzťahom

$$\Delta = l_2 - l_1 = k\lambda, \quad (6.11)$$

kde Δ označuje rozdiel dĺžok geometrických dráh l_1 a l_2 interferujúcich lúčov, λ je vlnová dĺžka svetla a k je celé číslo. Vzťah (6.11) môžeme vyjadriť aj nasledovným spôsobom:

$$\frac{l_2}{\lambda} - \frac{l_1}{\lambda} = k$$

a vyjadruje skutočnosť, že k interferenčnému zosilneniu dochádza, ak rozdiel počtu vlnových dĺžok pripadajúcich na geometrické dráhy interferujúcich lúčov je rovný celému číslu. Takto formulovaná interferenčná podmienka je platná

aj v prípade, ak sa interferujúce lúče pred interferenciou pohybujú rôznymi prostrediami, t.j. interferenčnú podmienku môžeme vyjadriť vzťahom:

$$\frac{l_2}{\lambda_2} - \frac{l_1}{\lambda_1} = k. \quad (6.12)$$

Skutočnosť, že sa lúče šíria rôznymi prostrediami sme vyjadrili rozdielnosťou vlnových dĺžok.

Pre ďalšie úvahy je dôležité si uvedomiť, že daný lúč prechádzajúci z jedného prostredia do druhého mení svoju rýchlosť a vlnovú dĺžku, avšak nemení sa jeho frekvencia. Môžeme teda písať

$$f = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2} = \frac{c}{\lambda}$$

a tiež

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{c}{v_1} \frac{1}{\lambda} = n_1 \frac{1}{\lambda} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\lambda_2} = \frac{c}{v_2} \frac{1}{\lambda} = n_2 \frac{1}{\lambda}, \quad (6.13)$$

kde n_1, n_2 sú indexy lomu prostredí 1 a 2 a λ je vlnová dĺžka svetla vo vákuu. Po dosadení vzťahov (6.13) do vzťahu (6.12) a jednoduchej úprave dostaneme

$$n_2 l_2 - n_1 l_1 = k\lambda. \quad (6.14)$$

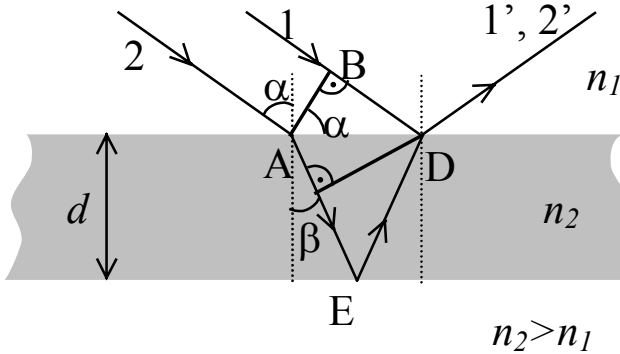
Veličina nl , vystupujúca na ľavej strane tejto rovnice, sa nazýva optická dráha. Uvažujme teraz rovnobežný zväzok lúčov dopadajúci na tenkú vrstvu hrúbky d . Index lomu tenkej vrstvy nech je n_2 a index lomu okolitého prostredia nech je n_1 (Obr. 6.3). Časť dopadajúceho svetla sa odráža na povrchu vrstvy a časť preniká do prostredia vrstvy. Podobný proces prebieha aj na dolnom rozhraní. Na obrázku sú znázornené dva lúče, lúč 1 a lúč 2. Tieto dva lúče sa stretávajú v bode D. Ak uvažujeme rovinnú vlnu, vlnoplocha, v momente dopadu lúča 2 na povrch vrstvy, je znázornená úsečkou AB. Od tohto okamihu do okamihu stretnutia sa oboch lúčov v bode D prejdú tieto lúče rozdielne dráhy:

$$l_2 = AE + ED = 2AE, \quad l_1 = BD$$

Z obrázka 6.3 a po postupných úpravách dostávame:

$$\sin \alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{l_1}{AD}, \quad \sin \beta = \frac{AD}{2AE} = \frac{AD}{l_2}, \quad \cos \beta = \frac{d}{AE} = \frac{2d}{l_2},$$

$$l_1 = AD \sin \alpha, \quad AD = l_2 \sin \beta, \quad l_2 = \frac{2d}{\cos \beta},$$



Obr. 6.3

$$l_1 = l_2 \sin \beta \sin \alpha = 2d \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\cos \beta}.$$

Použijúc zákon lomu a definíciu indexu lomu dostaneme:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

kde v_1 je rýchlosť svetla v prvom prostredí a v_2 je rýchlosť svetla v druhom prostredí. Potom

$$n_1 = n_2 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Teraz vyjadríme rozdiel optických dráh (ľavá strana rovnice (6.14)) lúčov 1,2:

$$\begin{aligned} n_2 l_2 - n_1 l_1 &= n_2 \frac{2d}{\cos \beta} - n_1 2d \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\cos \beta} = n_2 \frac{2d}{\cos \beta} - n_2 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} 2d \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\cos \beta} = \\ &= 2n_2 d \frac{1}{\cos \beta} (1 - \sin^2 \beta) = 2n_2 d \cos \beta. \end{aligned}$$

Nakoniec ešte potrebujeme vziať do úvahy skutočnosť, že na povrchu vrstvy sa vlna odráža na materiále s väčším indexom lomu ako u prostredia v ktorom sa šíri. Pri odraze svetla na takomto rozhraní dochádza k fázovému posunu vlny o 180° . Ak je index lomu prostredia, na hranici ktorého sa svetlo odráža menší ako index lomu prostredia v ktorom sa šíri, k fázovému posunu nedochádza. Túto skutočnosť môžeme zahrnúť do interferenčnej podmienky tak, že k rozdielu optických dráh vo vzťahu (6.14) pripočítame alebo odpočítame jednu

polvlnu. Pre podmienku interferenčného zosilnenia odrazeného svetla tenkou vrstvou potom dostávame:

$$2n_2d \cos \beta = k\lambda + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Rovnakým postupom možno dospieť tiež k podmienke interferenčného zoslabenia pre odrazené svetlo tenkou vrstvou. Platí:

$$2n_2d \cos \beta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} = k\lambda.$$

3 Magnetické pole

3.1 Indukcia magnetického poľa, pohyb náboja v magnetickom poli

Zo skúsenosti vieme, že dráhu pohybujúceho sa elektrického náboja vieme ovplyvniť permanentným magnetom alebo vodičom, ktorým preteká prúd a to prostredníctvom magnetického poľa, ktorého sú zdrojom. Vo väčšine prípadov pôsobí magnetické pole spolu s poľom elektrickým a takéto pole budeme nazývať elektromagnetickým poľom.

Základnou charakteristikou magnetického poľa je vektor magnetickej indukcie. K jeho zavedeniu vložme skusmý náboj q do elektromagnetického poľa. Sila, ktorá na tento náboj pôsobí, závisí nielen od jeho polohy, ale aj od rýchlosti jeho pohybu. Každý bod priestoru je charakterizovaný dvoma vektorovými veličinami, ktoré určujú silu pôsobiacu na ľubovoľný náboj. Prvá z nich je elektrická sila \vec{F}_e , ktorá prispieva do celkovej sily bez ohľadu na pohyb skusmého náboja. Popisujeme ju pomocou intenzity elektrického poľa \vec{E} :

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

Druhou zložkou sily je magnetická sila \vec{F}_m , ktorá závisí od rýchlosti skusmého náboja a má charakteristický smer: v každom okamihu je táto sila kolmá k vektoru rýchlosti. Uvedené vlastnosti je možné popísať zavedením **vektora indukcie magnetického poľa** \vec{B} , pomocou ktorého možno zapísať magnetickú silu vzťahom

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

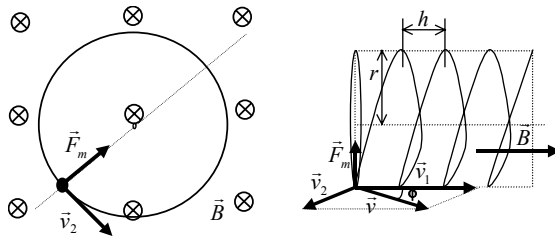
Celková sila \vec{F} , ktorou pôsobí elektromagnetické pole na náboj je:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$$

a nazýva sa **Lorentzova sila**.

Keďže magnetická sila je vždy kolmá na smer pohybu nabitej častice, práca, ktorú vykonáva táto sila, je nulová. Magnetické pole, ktoré sa v čase nemení (magnetostatické pole), teda nemôže meniť kinetickú energiu pohybujúcej sa nabitej častice, môže iba zakriviť jej dráhu. Jednotka B , ktorá vyplýva z rovnice pre magnetickú silu \vec{F}_m , sa nazýva v sústave SI tesla (T), $1 \text{ T} = 1 \text{ N}/1 \text{ Am}$.

Pohyb náboja v magnetickom poli. Majme časticu s nábojom Q , ktorá vletí do konštantného magnetického poľa s indukciou \vec{B} rýchlosťou \vec{v} tak, že uhol medzi vektormi indukcie a rýchlosti je φ . Vektor rýchlosti môžeme rozložiť na dve na seba kolmé zložky - jedna leží v smere indukcie magnetického poľa a druhá je na ňu kolmá:



Obr. 3.1

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Z obrázku 3.1 je vidieť, že:

$$\frac{v_1}{v} = \cos \varphi \Rightarrow v_1 = v \cos \varphi \quad \text{a} \quad \frac{v_2}{v} = \sin \varphi \Rightarrow v_2 = v \sin \varphi.$$

Sila, ktorou pôsobí magnetické pole na časticu, potom môže byť zapísaná:

$$\vec{F} = Q (\vec{v} \times \vec{B}) = Q (\vec{v}_1 \times \vec{B}) + Q (\vec{v}_2 \times \vec{B}),$$

takže

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

kde

$$\vec{F}_1 = Q (\vec{v}_1 \times \vec{B}), \quad \vec{F}_2 = Q (\vec{v}_2 \times \vec{B})$$

a teda aj vektor sily sa skladá z dvoch na seba kolmých zložiek.

Pre veľkosť prvej zložky máme:

$$|\vec{F}_1| = Qv_1B \sin 0^\circ = 0,$$

ak by teda častica vletela do magnetického poľa tak, že vektor jej rýchlosti bol rovnobežný s vektorom indukcie poľa, nepôsobila by na ňu žiadna sila a teda

častica by sa pohybovala rovnomerným priamočiarym pohybom rýchlosťou \vec{v}_1 . Veľkosť druhej zložky sily je:

$$\left| \vec{F}_2 \right| = Qv_2B \sin 90^\circ = Qv_2B \quad (3.1)$$

a jej smer je kolmý na vektory rýchlosti a indukcie magnetického poľa. Konštantná sila, ktorá je kolmá k rýchlosti v ľubovoľnom okamihu, je dostredivá sila, takže ak častica vletí do magnetického poľa v smere kolmom na smer indukcie, výsledná dostredivá sila spôsobí, že sa bude pohybovať rovnomerne po kružnici. Polomer tejto kružnice môžeme vyjadriť z druhého Newtonovho pohybového zákona:

$$F_2 = ma_d, \quad a_d = \frac{v_2^2}{r}. \quad (3.2)$$

Z rovníc (3.1) a (3.2) máme:

$$\frac{mv_2^2}{r} = Qv_2B \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv_2}{QB} = \frac{mv \sin \varphi}{QB}.$$

V našom prípade, keď častica vletela do magnetického poľa pod uhlom φ , musíme zlúčiť výsledky, ktoré sme získali pre dve zložky sily - rovnomerný priamočiary pohyb a rovnomerný pohyb po kružnici. Výsledným pohybom je pohyb po skrutkoviaci s polomerom r .

3.2 Gaussov zákon magnetického poľa

Podobne ako sme mohli ilustrovať elektrické pole siločiarami, magnetické pole možno graficky reprezentovať indukčnými čiarami, pričom ich súvis s vektorom magnetickej indukcie je nasledovný:

1. Dotyčnica k indukčnej čiare v ľubovoľnom bode má smer \vec{B} v tomto bode.
2. Počet čiar prechádzajúcich jednotkovým prierezom (plochou kolmou k čiar) je úmerný veľkosti \vec{B} .

Takže čím je väčšia indukcia, tým je väčšia aj hustota čiar. Je tu ale veľký rozdiel medzi siločiarami, ktoré reprezentujú elektrické pole, a indukčnými čiarami, ktoré reprezentujú magnetické pole. Neexistuje totiž magnetický analóg elektrického náboja, to znamená, že neexistujú žiadne magnetické náboje, z ktorých by mohli vychádzať indukčné čiary. Indukčné čiary nemajú počiatok a koniec a preto vytvárajú uzavreté slučky. Uvedenú skutočnosť možno využiť k získaniu

Gaussovho zákona magnetického poľa. Úplne analogickým spôsobom ako sme definovali tok vektora intenzity elektrického poľa (pozri vzťah (1.7)) môžeme definovať aj tok vektora indukcie magnetického poľa:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

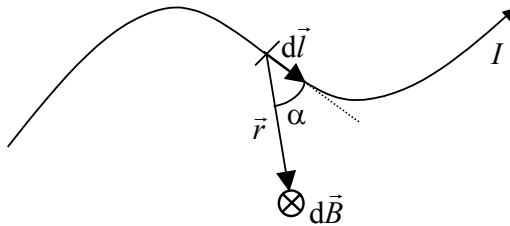
kde sa integruje cez celú plochu (uzavretú alebo otvorenú), na ktorej je Φ definovaný. Veličinu budeme nazývať **magnetický tok**. Jeho jednotkou je weber (Wb).

Určíme teraz magnetický tok Φ cez uzavretú plochu S , ktorá je uložená v magnetickom poli. Keďže indukčné čiary vytvárajú uzavreté slučky, počet čiar vstupujúcich do objemu ohraničeného plochou S je rovný počtu čiar z objemu vychádzajúcich a teda magnetický tok cez uzavretú plochu je nulový:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (3.3)$$

Táto rovnica sa nazýva **Gaussov zákon magnetického poľa** a je jednou z základných rovníc nielen pre magnetostatické, ale aj pre všeobecné elektromagnetické pole.

3.3 Biotov - Savartov zákon



Obr. 3.2

Podľa Biota a Savarta možno vodič, ktorým tečie prúd I , reprezentovať množstvom prúdových elementov. Pod takýmto prúdovým elementom rozumieme veličinu $I d\vec{l}$, kde I je veľkosť prúdu tečúceho vodičom a $d\vec{l}$ je vektor o veľkosti elementárnej dĺžky vodiča, majúci smer dotýčnice v danom bode vodiča a

orientovaný v smere toku prúdu vodičom (Obr. 3.2). Magnetická indukcia $d\vec{B}$ v ľubovoľnom bode priestoru je daná rovnicou

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3},$$

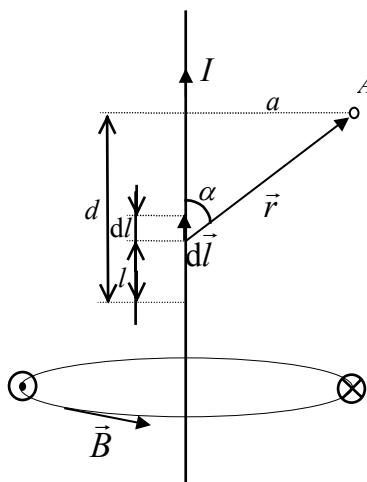
kde \vec{r} je polohový vektor miesta, v ktorom magnetickú indukciu počítame, vzhľadom na uvažovaný element vodiča $d\vec{l}$ a $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ mkg s}^{-2} \text{ A}^{-2}$ je **magnetická konštanta**. Táto rovnica vyjadruje **Biotov - Savartov zákon**. Veľkosť $d\vec{B}$ je

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2},$$

kde α je uhol medzi $d\vec{l}$ a \vec{r} . Celkovú indukciu magnetického poľa v danom bode potom získame integrovaním cez celú dĺžku vodiča:

$$\vec{B} = \int d\vec{B}.$$

Ako príklad vyjadríme \vec{B} vo vzdialenosti a od nekonečne dlhého priameho



Obr. 3.3

vodiča, ktorým tečie prúd I . Element $d\vec{l}$ vodiča prispieva do celkovej indukcie v

bode A elementárnou indukciou:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Veľkosť tohto príspevku je:

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}.$$

Súvis medzi veličinami l , r , α (pozri Obr. 3.3) je

$$l = d - a \cot \alpha \quad \text{a} \quad r = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Diferencovaním prvej rovnice dostávame:

$$dl = \frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

a dosadením do výrazu pre dB

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I \frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha \sin \alpha}{4\pi \frac{a^2}{\sin^2 \alpha}} = \frac{\mu_0 I \sin \alpha d\alpha}{4\pi a}.$$

Pre pole vytvorené celým vodičom:

$$B = \int dB = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I \sin \alpha d\alpha}{4\pi a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}. \quad (3.4)$$

Ako príklad je v dolnej časti obrázka 3.3 nakreslená jedna indukčná čiara.

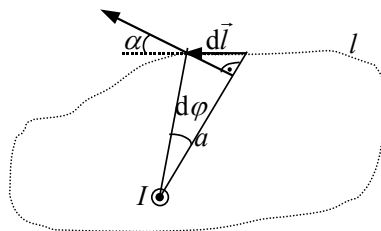
3.4 Zákon celkového prúdu (Ampérov zákon)

V predchádzajúcej časti sme odvodili vzťah pre magnetickú indukciu v okolí dlhého priameho vodiča (rovnica (3.4)). Uvažujme teraz v rovine kolmej na priamy vodič ľubovoľnú uzavretú slučku l okolo tohto vodiča. Vodičom tečie prúd I ako je to na obrázku 3.4. Vyjadríme veľkosť krivkového integrálu pozdĺž uzavretej krivky l . Ako je vidieť z obrázka 3.4, možno písať:

$$dl \cos \alpha = a d\varphi$$

a teda

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl \cos \alpha = B a d\varphi.$$



Obr. 3.4

Potom pre integrál bude platiť:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B a d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi a} a d\varphi = \mu_0 I$$

a teda

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (3.5)$$

Táto rovnica je známa ako **Ampérov zákon celkového prúdu**. Odvodili sme ho len pre špeciálny prípad jedného priameho vodiča. Jeho platnosť je však všeobecná pre ľubovoľný počet a tvar vodičov, keď pod prúdom vystupujúcim na pravej strane rovnice (3.5) rozumieme algebraický súčet všetkých prúdov, ktoré pretekajú plochou ohraničenou uzavretou integračnou krivkou na ľavej strane rovnice (3.5).

3.5 Sila pôsobiaca na vodič, ktorým tečie prúd, v magnetickom poli

Elektrický prúd vytvárajú pohybujúce sa náboje. Keďže magnetické pole pôsobí silou na každý pohybujúci sa náboj, môžeme očakávať, že bude silovo pôsobiť aj na vodič, ktorým tečie prúd. Uvažujme element prúdovodiča dĺžky dl , ktorým tečie konštantný elektrický prúd I . Vodič nech je uložený v magnetickom poli s indukciou \vec{B} . Vektor $d\vec{l}$ je orientovaný v smere pohybu kladného náboja. Ak dQ je voľný elementárny náboj, ktorý sa nachádza v dĺžkovom elemente dl , a pohybuje sa rýchlosťou \vec{v} , pre silu pôsobiacu na vybraný element môžeme písať

$$d\vec{F} = dQ (\vec{v} \times \vec{B}).$$

Keďže $dQ = I dt$ a $\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$, pre silu môžeme ďalej písať

$$d\vec{F} = I dt \left(\frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} \right)$$

a teda

$$d\vec{F} = I \left(d\vec{l} \times \vec{B} \right).$$

Táto rovnica - tzv. **Amperov zákon sily**, vyjadruje silu, ktorou pôsobí magnetické pole na dĺžkový element $d\vec{l}$ vodiča, ktorým tečie konštantný prúd I . Integrovaním tejto rovnice získame silu, ktorá pôsobí na celý vodič dĺžky l :

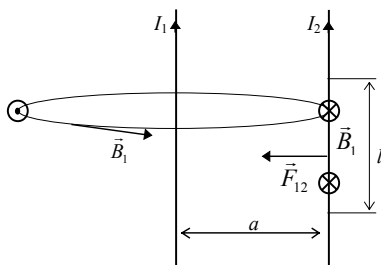
$$\vec{F} = \int_l I \left(d\vec{l} \times \vec{B} \right). \quad (3.6)$$

3.5.1 Sila pôsobiaca medzi dvomi rovnobežnými priamymi vodičmi

Na obrázku 3.5 sú dva priame rovnobežné vodiče vo vzájomnej vzdialenosti a . Vodičmi tečú prúdy I_1 a I_2 v tom istom smere. Prvý vodič vytvára magnetické pole. Veľkosť jeho indukcie v mieste druhého vodiča je:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}.$$

Vodič 2, ktorým tečie prúd I_2 , sa teda nachádza v magnetickom poli s indukciou



Obr. 3.5

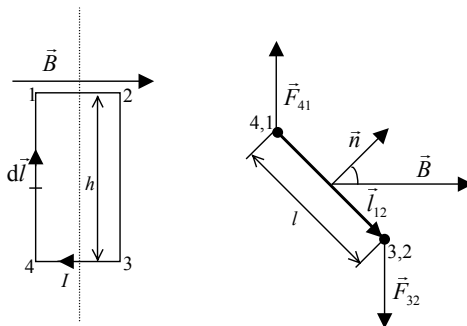
B_1 . Na dĺžku l tohto vodiča bude pôsobiť magnetická sila \vec{F}_{12} , ktorej veľkosť podľa vzťahu (3.6) je:

$$F_{12} = I_2 l B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} l.$$

Orientáciu tejto sily \vec{F}_{12} určíme pomocou definície vektorového súčinu a rovnice $d\vec{F}_{12} = I_2 (d\vec{l} \times \vec{B}_1)$. Vidíme, že dva rovnobežné vodiče, ktorými tečú prúdy toho istého smeru, sa priťahujú a dva vodiče s prúdmi opačného smeru sa odpuďujú.

3.5.2 Sily pôsobiace na prúdovú slučku, magnetický moment

Sily pôsobiace na slučku s prúdom v magnetickom poli vyšetríme pre najjednoduchší prípad. Majme obdĺžnikovú drôtenú slučku dĺžky h a šírky l , ktorá je uložená v magnetickom poli \vec{B} . Slučkou tečie prúd I . Jednotkový vektor \vec{n} je kolmý k ploche slučky a je orientovaný tým smerom, odkiaľ je vidieť prúd tiecť proti smeru pohybu hodinových ručičiek (pozri Obr. 3.6). Výsledná sila pôso-



Obr. 3.6

biaca na slučku je vektorovým súčtom síl pôsobiacich na štyri strany slučky. Magnetická sila pôsobiaca na stranu ij slučky je

$$F_{ij} = BIl_{ij} \sin \varphi_{ij},$$

kde l_{ij} je dĺžka strany a φ_{ij} je uhol medzi vektormi \vec{B} a $d\vec{l}_{ij}$ pre danú stranu. Je zrejmé, že platí

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{34} \quad \text{a} \quad \vec{F}_{41} = -\vec{F}_{32}.$$

Keďže sily \vec{F}_{12} a \vec{F}_{34} pôsobia pozdĺž tej istej priamky, ich výslednica je nulová, na slučku teda nepôsobia. Pretože sily \vec{F}_{41} a \vec{F}_{32} nepôsobia pozdĺž tej istej priamky, ich výslednicou je moment sily, pre ktorý platí

$$\vec{M}_m = \vec{l}_{12} \times \vec{F}_{32}.$$

Keďže $|\vec{F}_{32}| = |\vec{F}_{41}| = BIh$ a $|\vec{l}_{12}| = l$, pre veľkosť momentu sily môžeme písať:

$$M_m = BIhl \sin \alpha = BIS \sin \alpha,$$

kde $S = hl$ je plošný obsah slučky. Tento vzťah, ktorý sme odvodili pre obdĺžnikovú slučku, platí pre rovinnú slučku ľubovoľného tvaru. Veličina:

$$\vec{m} = IS\vec{n} = I\vec{S}$$

sa nazýva **magnetický moment slučky**. Pomocou tejto definície môžeme písať moment sily vo vektorovom tvare:

$$\vec{M}_m = \vec{m} \times \vec{B}.$$

Na slučku s prúdom, uloženú v magnetickom poli, pôsobí moment síl, teda pri jej otočení musí byť vykonaná práca a slučka má potenciálnu energiu zviazanú s jej polohou (natočením) vo vonkajšom magnetickom poli.

Magnetickú potenciálnu energiu v nejakej polohe danej uhlom α definujeme, ako prácu vonkajších síl, potrebnú na otočenie slučky z polohy s nulovou potenciálnou energiou (obvyčajne sa táto poloha volí pre $\alpha = 90^\circ$) do danej polohy α . Teda

$$E_p = \int_{90^\circ}^{\alpha} M_m d\alpha = \int_{90^\circ}^{\alpha} mB \sin \alpha d\alpha = mB [-\cos \alpha]_{90^\circ}^{\alpha} = -mB \cos \alpha,$$

alebo vo vektorovom tvare

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}.$$

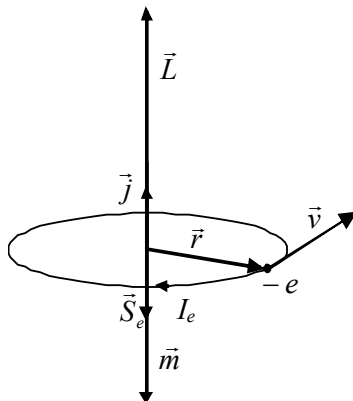
3.6 Magnetické vlastnosti látok

Magnetický moment atómu

Môžeme si predstaviť, že elektrón obiehajúci okolo jadra vytvára prúdovú slučku s prúdom $I_e = e/T = ef$, kde e je veľkosť náboja elektrónu, T je doba jeho obehu, f frekvencia, a teda magnetický moment takejto slučky za predpokladu, že elektrón obieha po kružnici polomeru r možno vyjadriť:

$$\vec{m} = I_e \vec{S}_e = -ef\pi r^2 \vec{j}. \quad (3.7)$$

Keď sa elektrón pohybuje po kružnici, môžeme vektor momentu hybnosti (or-



Obr. 3.7

bitálneho) elektrónu vyjadriť nasledovne:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = rm_e v \vec{j} = m_e 2\pi f r^2 \vec{j}, \quad (3.8)$$

kde m_e je hmotnosť elektrónu, v je jeho rýchlosť.

Z porovnania rovníc (3.7) a (3.8) dostaneme:

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}.$$

Z kvantovej mechaniky je známe, že elektrón má aj „vlastný moment hybnosti“ - spin \vec{L}_s , ktorý súvisí so spinovým magnetickým momentom \vec{m}_s nasledovne:

$$\vec{m}_s = -\frac{e}{m_e} \vec{L}_s.$$

V mnohoelektrónových atómoch sú elektróny s rôznymi orbitami, ich magnetické momenty sú preto rôzne. Výsledný magnetický moment atómu je rovný vektorovému súčtu všetkých orbitálnych a spinových magnetických momentov jeho elektrónov.

Magnetické pole v látkovom prostredí

Látky pozostávajú z atómov, ktoré môžu mať nulový alebo nenulový výsledný magnetický moment. Neustály chaotický tepelný pohyb atómov spôsobuje, že v

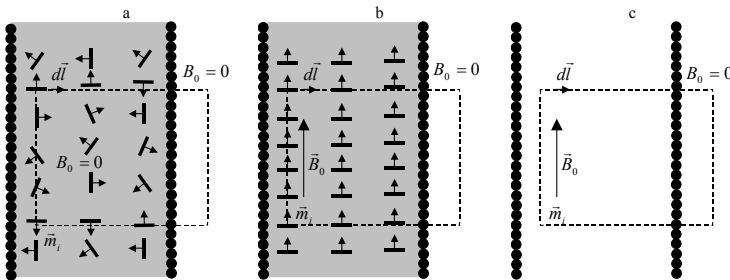
prípade atómov s nenulovým magnetickým momentom, sú magnetické momenty neusporiadane orientované. Táto neusporiadanosť spôsobuje, že sa makroskopicky neprejavia.

Ak sa ale látka umiestni do magnetického poľa, silovým pôsobením (Lorentzova sila) sa elementárne prúdové slučky usporiadajú - vektory magnetických momentov sa natočia do smeru vektora indukcie vonkajšieho magnetického poľa. Táto orientácia elementárnych prúdov v prúdových slučkách sa prejaví navonok ako prídavné magnetické pole \vec{J} , ktoré sa s pôsobiacim vonkajším magnetickým poľom s indukciou vo vákuu \vec{B}_0 vektorovo sčíta. Podrobnejšie si túto problematiku rozoberme na jednoduchom príklade.

Uvažujme dva identické solenoidy. Vo vnútri jedného nech je uložená látka, ktorej atómy majú nenulové magnetické momenty. Týmto momentom priradíme elementárne prúdové slučky (napríklad orbitálny pohyb elektrónov v elektrónovom obale atómu). Elementárny prúd takejto slučky označme symbolom I_e . Vo vnútri druhého solenoidu nech je vzduch (v ideálnom prípade vákuum). Nech majú tieto solenoidy z závitov na dĺžke d a nech I je prúd tečúci solenoidom. Magnetické pole vytvorené vo vnútri solenoidu nazveme vonkajším a označíme symbolom B_0 . Zároveň predpokladajme, že solenoidy sú dostatočne dlhé na to, aby sme mohli považovať pole mimo ich objemu za nulové.

Ak solenoidom netečie prúd (pozri Obr. 3.8a), orientácie momentov jednotlivých atómov sú z dôvodu tepelného pohybu rozdelené úplne náhodne. Po zapnutí prúdu solenoidom vytvorené magnetické pole B_0 spôsobí, že sa momenty atómov stáčajú do smeru tohto poľa (Obr. 3.8b). Pre zjednodušenie ďalších úvah predpokladajme úplné stočenie.

Zvoľme si uzavretú krivku ako je to čiarkovane naznačené na Obr. 3.8 a použijeme zákon celkového prúdu. Pre prázdny solenoid dostávame:



Obr. 3.8

$$\oint \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = B_0 l_0 = \mu_0 \frac{z}{d} l_0 I. \quad (3.9)$$

Pre solenoid vyplnený uvažovaným materiálom platí

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B l_0 = \mu_0 \frac{z}{d} l_0 I + \mu_0 N I_e, \quad (3.10)$$

kde N je počet elementárnych prúdových slučiek, ktorých plochy pretína integračná krivka.

V našom prípade ide o prúdové slučky ležiace na dĺžke l_0 a ich stredy sa nachádzajú v objeme $V = S l_0$, kde S je plocha elementárnej slučky.

Z rovníc (3.9), (3.10) postupne dostávame

$$B_0 = \mu_0 \frac{z}{d} I, \\ B = \mu_0 \frac{z}{d} I + \mu_0 \frac{N I_e}{l_0} = B_0 + \mu_0 \frac{N I_e}{l_0}. \quad (3.11)$$

Veličina

$$M = \frac{N I_e}{l_0} = \frac{N I_e S}{l_0 S} = \frac{N m}{V}, \quad (3.12)$$

kde m je magnetický moment elementárnej prúdovej slučky, sa nazýva **magnetizácia**. Zo vzťahu (3.12) je zrejmé, že magnetizácia predstavuje magnetický moment jednotkového objemu.

Rovnicu (3.11) môžeme teraz napísať nasledovne

$$B = B_0 + \mu_0 M = B_0 + J \quad (3.13)$$

kde veličina $J = \mu_0 M$ sa nazýva **magnetická polarizácia**.

Nakoniec ešte zavedieme veličinu nazývanú **intenzita magnetického poľa** vzťahom:

$$H = \frac{B - \mu_0 M}{\mu_0} \quad (3.14)$$

a po úprave dostaneme

$$B = \mu_0 H + \mu_0 M = \mu_0 H + J. \quad (3.15)$$

Vo všeobecnosti veličiny B , M , J , H sú vektorovými veličinami a teda napríklad poslednú rovnicu zapíšeme v tvare:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}.$$

Magnetizácia a magnetická polarizácia daného materiálu sa menia, ak sa tento vloží do vonkajšieho magnetického poľa. Táto zmena je charakterizovaná veličinou

$$\kappa = \frac{M}{H}$$

nazývanou **magnetická susceptibilita**, alebo veličinou

$$\mu = \frac{B}{H}$$

nazývanou **permeabilita**.

Rovnicu (3.15) môžeme teraz postupne napísať nasledovne

$$B = \mu_0 H + \mu_0 \kappa H = \mu_0 (1 + \kappa) H = \mu H$$

a teda

$$\mu = \mu_0 (1 + \kappa) = \mu_r \mu_0,$$

kde $\mu_r = 1 + \kappa$ je relatívna permeabilita. Je zrejmé, že pre vákuum je $\kappa = 0$, $\mu_r = 1$ a $\mu = \mu_0$.

Látky podľa veľkosti ich susceptibility a permeability možno rozdeliť takto:

$\kappa = 0$, $\mu_r = 1$vákuum

$\kappa < 0$, $\mu_r < 1$diamagnetické látky (napr. pre meď $\mu_r = 0,999995$)

$\kappa > 0$, $\mu_r > 1$paramagnetické látky (napr. pre vzduch $\mu_r = 1,0000031$)

$\kappa \gg 0$, $\mu_r \gg 1$feromagnetické látky (μ_r môže dosahovať hodnoty až $10^5 - 10^6$).

Diamagnetické a paramagnetické látky označujeme ako slabomagnetické a feromagnetické ako silnemagnetické.

Na záver ešte uvedme alternatívne vyjadrenie zákona celkového prúdu. Z rovníc (3.9), (3.13) a (3.14) dostávame:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{z}{d} I l_0.$$

Nakoľko na pravej strane je celkový prúd pretekajúci plochou ohraničenou uzavretou integračnou krivkou, ide zrejmé o inú formu zápisu zákona celkového prúdu. Aj keď sme k nej dospeli len pre špeciálny prípad, jej platnosť je všeobecná.

Potom, ak zákon celkového prúdu zapíšeme v tvare

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I, \quad (3.16)$$

na pravej strane je celkový prúd pretekajúci plochou ohraničenou uzavretou integračnou krivkou, avšak v rovnici (3.16) ide len o makroskopické prúdy na rozdiel od rovnice $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$, kde na pravej strane vystupujú všetky prúdy, teda aj elementárne prúdy.

5 Maxwellove rovnice

Škótsky fyzik James Clerk Maxwell ukázal, že všetky elektrické a magnetické javy môžu byť opísané pomocou štyroch rovníc zahŕňajúcich elektrické a magnetické pole. Tieto štyri rovnice, známe ako Maxwellove rovnice, sú také fundamentálne ako Newtonove zákony.

Zákon celkového prúdu (rovnica (3.16)), ktorý vyjadruje skutočnosť, že v okolí vodiča, ktorým tečie prúd, vzniká magnetické pole, možno zapísať v tvare

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I.$$

Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie (rovnica (4.1)) hovorí, že ak sa mení v čase magnetické pole, vzniká elektrické pole:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Gaussov zákon v elektrickom poli (rovnica (1.29)) dáva do súvisu elektrické pole s jeho zdrojom - elektrickým nábojom

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q.$$

Gaussov zákon v magnetickom poli (rovnica (3.3)) vyjadruje skutočnosť, že magnetické indukčné čiary sú do seba uzavreté krivky, ktoré nemajú počiatok ani koniec (ako elektrické siločiarly majú svoj počiatok v náboji), teda:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Spoločne s týmito Maxwellovými rovnicami v tzv. integrálnom tvare sa niekedy súčasne zapisujú rovnice vyjadrujúce vlastnosti materiálu:

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E},$$

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

a

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

Maxwellove rovnice môžu byť zapísané aj v inom, takzvanom diferenciálnom tvare, ktorý je často vhodnejší ako integrálny tvar.

Aby sme transformovali Maxwellove rovnice z integrálneho do diferenciálneho tvaru, budeme využívať dve vety známe z vektorovej analýzy. Prvá je tzv. Gaussova veta, ktorá dáva do súvisu integrál cez uzavretú plochu z vektorovej funkcie s jej integrovaním cez objem ohraničený danou plochou:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \int_V \operatorname{div} \vec{F} dV, \quad (5.1)$$

kde ∇ je operátor, ktorý je definovaný:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

a

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

je tzv. divergencia \vec{F} .

Druhá veta je Stokesova veta, ktorá dáva do súvisu integrál po uzavretej krivke s plošným integrálom cez ľubovoľnú plochu, ktorú daná krivka ohraničuje:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

kde $\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$ sa nazýva rotácia \vec{F} .

Najprv využijeme uvedenú Gaussovú vetu na prepísanie zákona zachovania náboja do diferenciálneho tvaru. Zákon zachovania náboja sme matematicky zapísali (rovnica (2.4)):

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} Q_V.$$

Náboj Q_V v objeme ohraničenom uzavretou plochou S možno zapísať ako objemový integrál cez tento objem z nábojovej hustoty ρ_V :

$$Q_V = \int_V \rho_V dV.$$

Použijúc Gaussovú vetu (5.1), dostaneme

$$\int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_V dV = \int_V -\frac{\partial \rho_V}{\partial t} dV.$$

Keďže táto rovnica platí pre ľubovoľný objem, zákon zachovania náboja možno zapísať aj v nasledovnom (diferenciálnom) tvare:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t}.$$

Teraz prejdeme k odvodeniu Maxwellových rovníc v diferenciálnom tvare. Najprv budeme aplikovať Stokesovu vetu na ľavú stranu zákona celkového prúdu a zapíšeme prúd pomocou prúdovej hustoty. Môžeme písať

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{H} \cdot d\vec{S} = I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S},$$

teda

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Táto rovnica platí pre akúkoľvek integračnú plochu S , ľubovoľnej veľkosti i tvaru, teda výrazy pod integrálmi sa musia rovnať:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}.$$

Je tu ale jedna veľmi dôležitá vec, ktorú treba spomenúť v súvislosti s prvou Maxwellovou rovnicou. Maxwell si všimol, že tu je niečo zvláštne. Divergencia ľavej strany tejto rovnice bude rovná nule, pretože divergencia rotácie je vždy nulová ($\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) = 0$). To znamená, že aj jej pravá strana, teda divergencia \vec{j} , má byť tiež nulová. Ale ak $\operatorname{div} \vec{j}$ je nula, potom celkový tok prúdu von z ľubovoľnej uzavretej plochy je rovný nule. Ako vieme z rovnice $\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t}$, tok náboja cez uzavretú plochu je rovný úbytku náboja v objeme ohraničenom touto plochou. Tento samozrejme nemôže byť vo všeobecnosti nulový, lebo náboje sa môžu pohybovať z miesta na miesto. Maxwell predvídal tento problém a navrhol pridať do rovnice ďalší člen na jej pravú stranu - tzv. posuvný prúd.

Z rozmerovej analýzy je jasné, že výraz $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ vyjadruje prúdovú hustotu a nazýva sa hustota posuvného prúdu

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Celková prúdová hustota je rovná sume hustôt vodivostných a posuvných prúdov a **1. Maxwellova rovnica** má tvar:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Aplikujme teraz Stokesovu vetu na ľavú stranu Faradayovho zákona. Môžeme písať

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

teda

$$\int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Sú to plošné integrály cez tú istú plochu, a keďže rovnica musí platiť pre ľubovoľnú plochu, platí

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

čo je **2. Maxwellova rovnica**.

Ak aplikujeme Gaussovú vetu (5.1) na Gaussov zákon elektrického poľa a náboj Q napíšeme ako objemový integrál z nábojovej hustoty, máme

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{D} dV = Q = \int_V \rho dV$$

teda

$$\int_V \text{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV.$$

Obe strany obsahujú objemový integrál cez ten istý objem, aby rovnica platila pre ľubovoľný objem (ľubovoľnej veľkosti a tvaru), výrazy pod integrálom musia byť zhodné:

$$\text{div} \vec{D} = \rho.$$

Táto rovnica je **3. Maxwellova rovnica**.

Podobne získame štvrtú Maxwellovu rovnicu - Gaussov zákon magnetizmu:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{B} dV = 0$$

a teda

$$\text{div} \vec{B} = 0,$$

čo je **4. Maxwellova rovnica**.

5.1 Zákon zachovania elektromagnetickej energie, Poyntingov vektor

Uvažujme izotropné prostredie. Energia elektromagnetického poľa v nejakom objeme V je daná

$$W = \int_V w d\tau = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2) d\tau.$$

Zmena tejto energie za jednotku času je

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \int_V \left(\varepsilon 2\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu 2\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) d\tau = \int_V \left(\varepsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) d\tau.$$

Použijúc Maxwelllove rovnice $\text{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}$ a $\text{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$, po úpravách máme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{-\vec{j}}{\varepsilon} + \frac{\text{rot} \vec{H}}{\varepsilon}, & \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= -\frac{\text{rot} \vec{E}}{\mu}, \\ \frac{dW}{dt} &= \int_V \left[\varepsilon \vec{E} \cdot \left(\frac{-\vec{j}}{\varepsilon} + \frac{\text{rot} \vec{H}}{\varepsilon} \right) + \mu \vec{H} \cdot \left(-\frac{\text{rot} \vec{E}}{\mu} \right) \right] d\tau = \\ &= \int_V \left[\vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} \right] d\tau - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau. \end{aligned}$$

Teraz využijeme Ohmov zákon $\vec{E} = \rho \vec{j}$ a rovnosť $\text{div}(\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b} - \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a}$ a dostaneme

$$\frac{dW}{dt} = - \int_V \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) d\tau - \int_V \rho \vec{j}^2 d\tau.$$

Použijúc Gaussovu (5.1) vetu máme

$$\frac{dW}{dt} = - \oint (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} - \int_V \rho \vec{j}^2 d\tau,$$

kde plošný integrál na pravej strane rovnice je cez plochu, ktorá obopína uvažovaný objem.

Vektor

$$\vec{\sigma} = \vec{E} \times \vec{H}$$

je známy ako **Poyntingov vektor** a poslednú rovnicu môžeme písať v tvare:

$$-\frac{dW}{dt} = \oint \vec{\sigma} \cdot d\vec{S} + \int_V \rho \vec{j}^2 d\tau.$$

Táto rovnica vyjadruje **zákon zachovania elektromagnetickej energie**. Výraz $-\frac{dW}{dt}$ predstavuje úbytok energie elektromagnetického poľa v danom objeme za jednotku času. To sa môže diať dvoma spôsobmi. Prvým je tok energie cez ohraničujúcu plochu daný výrazom $\oint \vec{\sigma} \cdot d\vec{S}$, druhým je strata energie v dôsledku prúdenia voľných nábojov v uvažovanom objeme daná výrazom $\int_V \rho \vec{j}^2 d\tau$.

Vidíme, že Poyntingov vektor $\vec{\sigma}$ je kolmý na vektory \vec{E} a \vec{H} . Vyjadruje energiu elektromagnetického poľa, ktorá je vyžiarená cez jednotkovú plochu za jednotku času v ľubovoľnom časovom okamihu. Má smer šírenia energie, teda smer Poyntingovho vektora je daný smerom šírenia sa elektromagnetického vlnenia ako uvidíme v nasledujúcej časti.

7 Základy kvantovej mechaniky

7.1 Časticové vlastnosti elektromagnetického žiarenia

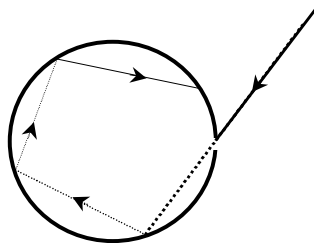
7.1.1 Žiarenie absolútne čierneho telesa

Elektromagnetické vlnenie je šírením elektromagnetickej energie priestorom. Pojem elektromagnetické vlnenie zahŕňa širokú oblasť javov, ktoré sa líšia svojou vlnovou dĺžkou - rádiové vlny, tepelné žiarenie, infračervené žiarenie, svetlo, ultrafialové žiarenie, röntgenové žiarenie, atď. Na príkladoch svetla a röntgenového žiarenia sa dajú demonštrovať vlnové vlastnosti elektromagnetického žiarenia, napr. interferenčné obrazce.

Ukázalo sa ale, že existujú javy, patriace do oblasti elektromagnetického žiarenia, ktoré sa spomínaným spôsobom - v rámci vlnenia a predstáv klasickej fyziky, vysvetliť nedajú. Riešenie tohto problému viedlo k vzniku kvantovej fyziky.

Každá látka emituje elektromagnetické žiarenie, ktorého vlastnosti závisia od teploty a povahy látky. Schopnosť telesa vyžarovať úzko súvisí s jeho schopnosťou absorbovať žiarenie. To sa dá očakávať, pretože teleso pri konštantnej teplote je v tepelnej rovnováhe so svojim okolím a teda musí z neho absorbovať práve toľko energie, koľko vyžiari. Za ideálne budeme považovať také teleso, ktoré pohltí všetku naň dopadajúcu energiu (bez ohľadu na frekvenciu žiarenia) a vyžiari ju vo forme tepelného žiarenia - tzv. **absolútne čierne teleso**. Keďže schopnosť telesa emitovať žiarenie je úmerná jeho schopnosti žiarenie absorbovať, absolútne čierne teleso je súčasne aj najlepším žiaričom. Ak budeme uvažovať ideálny prípad absolútne čierneho telesa, nemusíme brať do úvahy konkrétnu povahu žiariaceho telesa, pretože všetky čierne telesá sa chovajú úplne rovnako a žiarenie bude závisieť iba od teploty. Absolútne čierne teleso si možno predstaviť ako dutý predmet napr. tvaru gule s veľmi malým otvorom (Obr. 7.1). Žiarenie dopadajúce do otvoru vstupuje do dutiny, kde sa odráža od stien až kým sa nepohltí. Pri danej teplote steny dutiny neustále emitujú a absorbujú žiarenie a práve toto žiarenie - žiarenie absolútne čierneho telesa nás zaujíma. Môžeme ho študovať pozorovaním toho, čo vychádza z otvoru. Výsledky pozorovania súhlasia so skúsenosťou:

- čierne teleso vyžaruje tým viac energie, čím je teplejšie,
- relatívne množstvo vyžiarenej energie závisí na vlnovej dĺžke a táto závislosť má pre teplejšie teleso maximum pri menších vlnových dĺžkach, v porovnaní s chladnejším telesom.



Obr. 7.1

Ak schopnosť telesa pohlcovať energiu popíšeme tzv. pohltivosťou:

$$\alpha = \frac{E_{abs}}{E},$$

kde E_{abs} je pohltená energia a E je celková dopadajúca energia, potom pre absolútne čierne teleso bude platiť $\alpha = 1$.

Ďalej zavedieme veličinu **intenzita vyžarovania** definovanú vzťahom:

$$I = \frac{E}{S\Delta t},$$

kde E je energia vyžiarená povrchom telesa s plošným obsahom S za časový interval Δt . Intenzita vyžarovania je teda energia vyžiarená jednotkovou plochou za jednotkový časový interval.

Spektrálnu intenzitu vyžarovania (pre určitú vlnovú dĺžku) definujeme vzťahom:

$$I_\lambda = \frac{1}{S\Delta t} \frac{dE}{d\lambda},$$

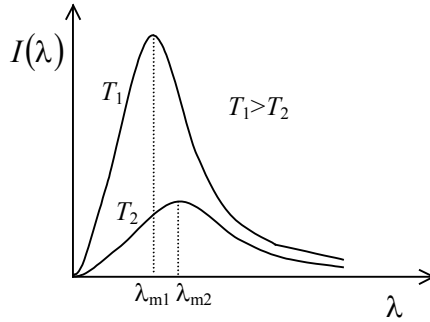
ktorá súvisí s celkovou intenzitou vyžarovania I_0 podľa vzťahu:

$$I_0 = \int_0^\infty I(\lambda) d\lambda. \quad (7.1)$$

Potom pre **celkovú vyžiarenú energiu** možno písať:

$$E = \int dE_\lambda = S\Delta t \int_0^\infty I(\lambda) d\lambda.$$

Na obrázku 7.2 je znázornená závislosť intenzity elektromagnetického žiarenia



Obr. 7.2

od vlnovej dĺžky pre dve telesá rôznych teplôt, pričom platí: $T_1 > T_2$. Je vidieť, že čím má teleso vyššiu teplotu, tým viac energie vyžaruje (plocha pod funkciou $I(\lambda)$ je väčšia) a súčasne vlnová dĺžka, pri ktorej vyžaruje s maximálnou intenzitou, sa posúva doľava - ku kratším vlnovým dĺžkam. Tieto skutočnosti vyjadrujú matematicky dva empirické zákony:

Wienov posuvný zákon, ktorý hovorí, že vlnová dĺžka, pri ktorej absolútne čierne teleso vyžaruje s maximálnou intenzitou, je nepriamo úmerná absolútnej teplote telesa

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

kde $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ je Wienova konštanta,

Stefanov - Boltzmannov zákon, ktorý hovorí, že celková intenzita vyžarovania (pri všetkých vlnových dĺžkach) je priamo úmerná štvrtjej mocnine absolútnej teploty telesa

$$I_0 = \sigma T^4,$$

kde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ je Stefanova-Boltzmannova konštanta.

Keby bola explicitne známa závislosť $I(\lambda)$, potom Stefanov - Boltzmannov zákon by sme mohli získať integrovaním tejto závislosti podľa vlnovej dĺžky v hraniciach od nuly do nekonečna (vzťah (7.1)). Wienov zákon by sme mohli získať nájdením lokálneho extrému (maxima) tejto funkcie.

Nájsť túto závislosť sa koncom minulého storočia pokúsili Rayleigh a Jeans pomocou predstáv klasickej fyziky. Elektromagnetické žiarenie v dutine s dokonale

odrážajúcimi stenami možno popísať ako stojaté vlnenie (trojrozmerné zovšeobecnenie stojatého vlnenia na napätej strune). V tepelnej rovnováhe atómy (harmonické oscilátory), ktoré vytvárajú steny dutiny absolútne čierneho telesa emitujú a absorbujú elektromagnetické žiarenie. Pri danej teplote T je podľa ekvipartičného princípu stredná hodnota energie pripadajúca na jeden stupeň voľnosti týchto oscilátorov $\frac{1}{2}kT$. Pretože oscilátor má dva stupne voľnosti (kinetickú a potenciálnu energiu), stredná hodnota energie jedného oscilátora je $2 \cdot \frac{1}{2}kT = kT$. A teda aj každá stojatá vlna elektromagnetického žiarenia v dutine má strednú hodnotu energie kT (obsahuje elektrickú a magnetickú energiu). Na základe týchto predpokladov Rayleigh a Jeans dospeli k závislosti

$$I(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4},$$

kde k je Boltzmannova konštanta.

Tento vzťah má však veľký nedostatok - vyplýva z neho, že intenzita vyžarovania je tým väčšia, čím je vlnová dĺžka kratšia, čo by znamenalo, že pri ľubovoľnej teplote by všetky telesá mali vyžarovať najtvrdšie ultrafialové žiarenie a v takom svete by samozrejme nemohol existovať žiaden život. Tento zjavný nesúlad teórie a skutočnosti sa vžil pod názvom „ultrafialová katastrofa“ a predstavoval vo fyzike problém, kedy sa jav zrejme nedal vysvetliť v rámci dovedy známej klasickej fyziky.

Riešenie tohto problému vyžadovalo úplne nový prístup, s ktorým prišiel na prelome storočí Max Planck. Ekvipartičný princíp platí iba pre spojité rozdelenie možných energií. Podľa Plancka sa elektromagnetické žiarenie nevyžaruje (a tiež nepohlcuje) spojite, ale v určitých najmenších možných množstvách energie - tzv. **kvantách**, priamo úmerných frekvencii žiarenia f :

$$E = hf,$$

kde $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js je tzv. Planckova konštanta, ktorá patrí medzi základné prírodné konštanty.

Teda aj energia oscilátorov v dutine absolútne čierneho telesa sa nemení spojite, ale skokom. Najmenšia možná zmena energie (hf) je v prípade klasického oscilátora veľmi malá a nemá vplyv na popis chovania oscilátora, napr. malej guľôčky, ktorá vykonáva kmity na pružine. Avšak v prípade oscilátorov v mikrovsvete (atómov) má predpoklad skokovej zmeny energie ďalekosiahle následky. Pre strednú hodnotu energie oscilátora \bar{E} pri teplote T sa za uvedeného pred-

pokladu Planckovi podarilo odvodiť vzťah:

$$\bar{E} = \frac{hf}{\exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1},$$

z ktorého vyplýva, že pri relatívne nízkych teplotách oscilátory kmitajúce s vysokými frekvenciami nie sú vybudené (ich stredná hodnota energie je nulová), teda nedochádza k ultrafialovej katastrofe.

Pre závislosť intenzity vyžarovania od vlnovej dĺžky pri danej teplote Planck potom získal vzťah, **Planckov zákon žiarenia**:

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right) - 1}.$$

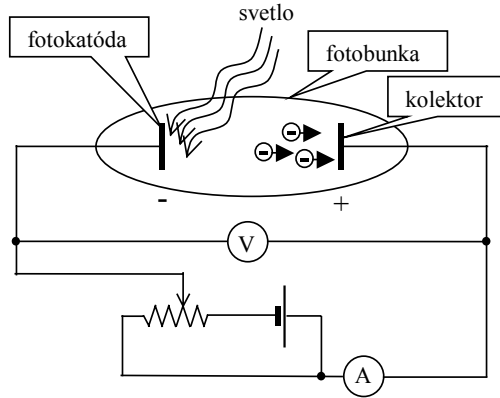
Táto funkcia sa pre malé vlnové dĺžky blíži k nule a jej priebeh je v súlade s experimentálne získanými závislosťami. Z Planckovho zákona žiarenia sa dajú vyššie spomenutými postupmi získať oba empirické zákony - Wienov i Stefanov-Boltzmannov. Keďže všetky dôsledky vyplývajúce z predpokladu kvantovania energie sú v úplnom súlade s experimentálne získanými poznatkami, je treba tento predpoklad považovať za správny.

7.1.2 Fotoelektrický jav

Ďalším významným experimentom, ktorý narážal na problémy pri interpretácii na základe predstáv klasickej fyziky, bol fotoelektrický jav. Možné experimentálne usporiadanie pre pozorovanie tohto javu je na obrázku 7.3. Fotobunka pozostáva zo sklenenej banky, v ktorej sa nachádzajú dve elektródy - fotokatóda a kolektor. **Fotoelektrický jav** spočíva v emisii elektrónov účinkom svetla dopadajúceho na povrch kovu.

Elektródy sú pripojené na vonkajší elektrický obvod obsahujúci jednosmerný zdroj elektromotorického napätia, ampérmeter a voltmeter. Ak je fotobunka v tme, obvodom netečie prúd. Pri osvetlení fotokatódy svetlom dostatočne vysokej frekvencie začína obvodom pretekať prúd.

Samotný fakt, že k takémuto javu dochádza, možno pochopiť aj na základe klasickej elektrodynamiky. Elektromagnetická vlna by mohla v princípe dodať elektrónu energiu dostatočnú na jeho uvoľnenie z kovu. Problémy však nastanú, ak skúmame tento jav podrobnejšie. Aparatúra na obrázku 7.3 umožňuje zmerať maximálnu kinetickú energiu E_{kmax} elektrónov emitovaných z fotokatódy. Toto urobíme tak, že otočíme polaritu zdroja (fotokatóda kladná a kolektor záporný). Elektrón, ktorý vyletí z fotokatódy, bude v takomto prípade brzdený



Obr. 7.3

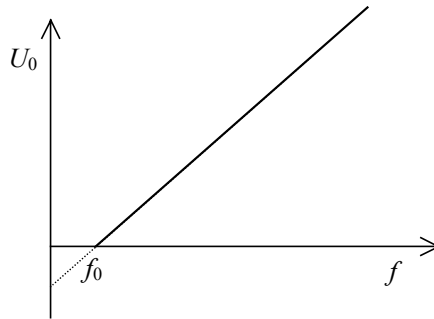
elektrickým poľom medzi elektródami. Pri malom napätí zdroja najrýchlejšie elektróny stále dosiahnu kolektor a obvodom bude tiecť prúd. Ak pri tejto polarite zdroja budeme zvyšovať jeho napätie až do okamihu, keď obvodom prestane tiecť prúd, dostaneme hodnotu napätia U_0 kedy sú zabrzdené aj najrýchlejšie elektróny. Vzťah medzi U_0 a maximálnou kinetickou energiou E_{kmax} vyjadruje rovnica

$$eU_0 = E_{kmax}, \quad (7.2)$$

kde e je veľkosť náboja elektrónu.

Typická závislosť napätia U_0 na frekvencii je na obrázku 7.4. Zo vzťahu (7.2) je zrejmé, že rovnaká bude tiež závislosť maximálnej kinetickej energie na frekvencii. Z hľadiska klasickej vlnovej teórie je zvláštne, že pre frekvencie menšie ako istá hraničná hodnota f_0 , k emisii elektrónov nedochádza. Podľa uvedenej teórie by mal byť tento efekt pozorovaný pri ľubovolnej frekvencii, ak je intenzita svetla dostatočne veľká, avšak pri frekvencii $f < f_0$ svetlo ľubovoľne veľkej intenzity tento efekt nevyvolá. Ďalšou zvláštnosťou je skutočnosť, že maximálna energia nezávisí na intenzite svetla.

Tretím rozporom medzi klasickou teóriou a experimentom je skutočnosť, že nebolo pozorované časové oneskorenie medzi zapnutím svetla malej intenzity a emisiou elektrónov. Podľa klasickej teórie by sa očakávalo, že je potrebný istý čas na to aby zo svetla malej intenzity elektrón naakumuloval dostatok energie na svoje uvoľnenie.



Obr. 7.4

V roku 1905 Albert Einstein zistil, že vyššie uvedené skutočnosti možno vysvetliť za predpokladu, že svetlo frekvencie f je prúd častíc nazývaných fotóny a že energia fotónu je daná vzťahom

$$E = hf,$$

kde h je Planckova konštanta. Všimnime si, že ide o najmenšie kvantum energie vyžiarené oscilátormi v Planckovej hypotéze.

Fotoelektrický jav potom možno popísať ako interakciu medzi dvomi časticami - fotónom a elektrónom, v ktorej fotón odovzdáva celú svoju energiu elektrónu. Matematicky možno fotoelektrický jav opísať Einsteinovým vzťahom

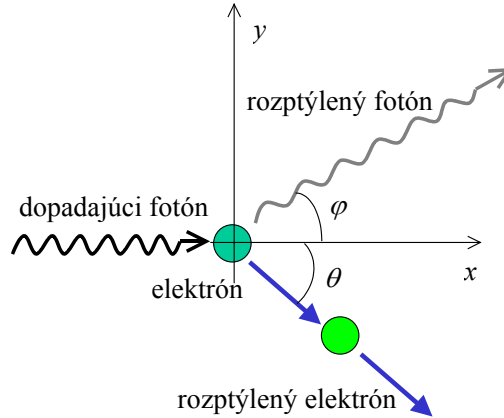
$$hf = W + E_{kmax},$$

kde hf je energia dopadajúceho fotónu, W je energia potrebná na uvoľnenie elektrónu z kovu a E_{kmax} je kinetická energia emitovaného elektrónu. Veličina W sa nazýva výstupná práca a pre daný kov má konštantnú hodnotu.

7.1.3 Comptonov jav

Ak je správna predstava fotónu ako častice s nulovou pokojovou hmotnosťou, malo by byť možné vyšetrovať zrážky medzi fotónmi a napr. elektrónmi ako zrážky medzi biliardovými guľami v klasickej mechanike.

Ak fotón röntgenového žiarenia narazí na elektrón, ktorý bol v pokoji, fotón sa rozptylom odchýli od svojho pôvodného smeru pohybu a elektrón sa začne pohybovať. Je to pružná zrážka, pri ktorej platí zákon zachovania energie a



Obr. 7.5

zákon zachovania hybnosti.

V špeciálnej teórii relativity sme pre celkovú energiu častice získali vzťah:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Umocnením tejto rovnice na druhú a odstránením zlomku získame súvis medzi energiou a hybnosťou

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4. \quad (7.3)$$

Pre časticu s nulovou pokojovou hmotnosťou platí $E = pc$ a teda $p = E/c$, pre hybnosť fotónu s energiou hf potom dostávame:

$$p = \frac{hf}{c}.$$

Nech energia fotónu pred zrážkou je hf_1 , po zrážke hf_2 , jeho hybnosť pred zrážkou $\frac{hf_1}{c}$ a po nej $\frac{hf_2}{c}$, kinetická energia elektrónu po zrážke E_k a jeho hybnosť p .

Potom možno zapísať zákon zachovania energie:

$$hf_1 = hf_2 + E_k \quad (7.4)$$

a zákon zachovania hybnosti:

$$\vec{p}_I = \vec{p}_{II},$$

kde \vec{p}_I je celková hybnosť sústavy pred zrážkou a \vec{p}_{II} po zrážke.

Túto vektorovú rovnicu možno nahradiť dvomi skalárnymi rovnicami pre x -ové a y -ové zložky hybnosti, pretože zrážka sa deje v rovine xy :

$$\frac{hf_1}{c} = \frac{hf_2}{c} \cos \varphi + p \cos \theta \quad (7.5)$$

$$0 = \frac{hf_2}{c} \sin \varphi - p \sin \theta. \quad (7.6)$$

Rovnice (7.5) a (7.6) zapíšeme v tvare:

$$pc \cos \theta = hf_1 - hf_2 \cos \varphi \quad (7.7)$$

$$pc \sin \theta = hf_2 \sin \varphi. \quad (7.8)$$

Umocnením (7.7) a (7.8) a ich sčítaním dostaneme:

$$p^2 c^2 = (hf_1)^2 - 2hf_1 hf_2 \cos \varphi + (hf_2)^2. \quad (7.9)$$

Porovnaním (7.3) s vyjadrením celkovej relativistickej energie ako súčtu kinetickej a pokojovej energie dostaneme

$$p^2 c^2 = E_k^2 + 2E_k m_0 c^2 \quad (7.10)$$

a do výrazu (7.10) dosadíme kinetickú energiu vyjadrenú pomocou vzťahu (7.4)

$$p^2 c^2 = (hf_1)^2 - 2hf_1 hf_2 + (hf_2)^2 + 2m_0 c^2 (hf_1 - hf_2). \quad (7.11)$$

Porovnaním vzťahov (7.9) a (7.11) a jednoduchou úpravou získame

$$m_0 c^2 (hf_1 - hf_2) = hf_1 hf_2 (1 - \cos \varphi). \quad (7.12)$$

Ak (7.12) predelíme výrazom $h^2 c^2$, dostaneme výsledok:

$$\frac{m_0 c}{h} \left(\frac{f_1}{c} - \frac{f_2}{c} \right) = \frac{f_1}{c} \frac{f_2}{c} (1 - \cos \varphi).$$

Keďže medzi frekvenciou a vlnovou dĺžkou platí súvis $c/f = \lambda$, predchádzajúci vzťah možno prepísať zavedením vlnových dĺžok

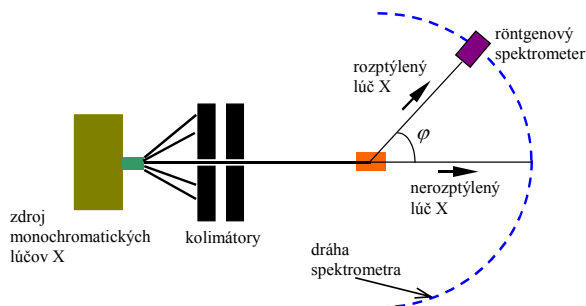
$$\frac{m_0 c}{h} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{1 - \cos \varphi}{\lambda_1 \lambda_2}$$

a po úprave pre rozdiel vlnovej dĺžky odrazeného a dopadajúceho žiarenia dostávame

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi). \quad (7.13)$$

Vzťah (7.13) odvodil v roku 1922 A. H. Compton a jav, ktorý popísal a ako prvý pozoroval, sa nazýva **Comptonov jav**. Rovnica (7.13) udáva zmenu vlnovej dĺžky fotónu pri jeho odraze o uhol φ na častici s pokojovou hmotnosťou m_0 . Vlnová dĺžka sa vždy zväčší.

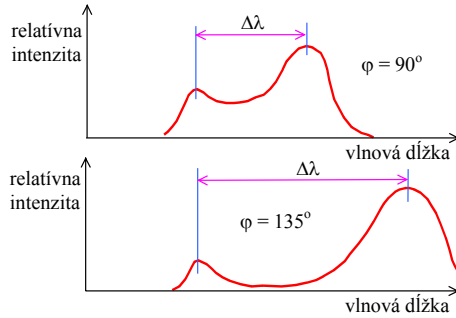
Veličina $h/(m_0 c)$ má pre elektrón hodnotu $0,024 \cdot 10^{-10}$ m. Najväčší možný nárast vlnovej dĺžky podľa (7.13) je pre uhol 180° , kedy rozdiel v zátvorke v (7.13) bude rovný 2, takže maximálna zmena vlnovej dĺžky bude $0,048 \cdot 10^{-10}$ m, pre častice ťažšie ako elektrón bude zmena menšia. Kým pri viditeľnom svetle je zmena vlnovej dĺžky menšia ako 0,01 %, pri röntgenovom žiarení s vlnovou dĺžkou rádu 10^{-10} m tvorí niekoľko percent a je ľahko pozorovateľná. Na ob-



Obr. 7.6

rázku 7.7 je vidieť experimentálny posun vlnovej dĺžky röntgenového žiarenia predpovedaný vzťahom (7.13) pre niektoré uhly odrazu. Pri každom uhle obsahujú rozptýlené lúče aj časť s pôvodnou vlnovou dĺžkou. Tie odpovedajú odrazom fotónov na viazaných elektrónoch, kde za pokojovú hmotnosť treba dosadiť hmotnosť celého atómu, takže posun bude taký malý, že je nemerateľný a teda nameriame pôvodnú vlnovú dĺžku.

Predstava o zrážke fotónu röntgenového žiarenia s voľným elektrónom v látke ako o pružnej zrážke (analogicky biliardovým guliám v klasickej mechanike) viedla teda k úplnému vysvetleniu nárastu vlnovej dĺžky odrazeného žiarenia, ktorý sa pomocou vlnových vlastností vysvetliť nedal a Comptonov jav je ďalším dôkazom časticových vlastností elektromagnetického žiarenia.



Obr. 7.7

7.2 Vlnové vlastnosti častíc

7.2.1 De Broglieho vlny, vlnovo-časticový dualizmus

Od objavu časticových vlastností elektromagnetických vĺn uplynuli temer dve desaťročia, kým sa v roku 1924 objavila myšlienka, že by mohlo byť správne aj opačné tvrdenie - že častice majú vlnové vlastnosti. V prípade objavu časticových vlastností vĺn to boli experimenty, ktoré potrebovali vysvetlenie (žiarenie čierneho telesa, fotoefekt, atď.) a aj keď toto vysvetlenie bolo revolučné, bolo ho jednoduchšie vysloviť, ako vysloviť hypotézu o vlnových vlastnostiach častíc bez podpory experimentu. A práve v takej situácii bol v roku 1924 Louis de Broglie, keď vyslovil, vedený očakávaním symetrie prírody, myšlienku, že hmota má ako časticové, tak aj vlnové vlastnosti. Táto myšlienka vyvolala hneď veľkú pozornosť a napriek tomu, že experimentálne bola potvrdená až v roku 1927, už v roku 1926 sa stala východiskom pre úspešný rozvoj kvantovej mechaniky (Born, Heisenberg, Schrödinger).

Zhrňme si najprv, čo vieme o fotóne - častici elektromagnetického žiarenia s nulovou pokojovou hmotnosťou:

hybnosť fotónu je $p = mc$, energia $E = hf$, zo špeciálnej teórie relativity vieme, že $E = mc^2$, takže pre jeho hybnosť potom možno písať:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

t.j. hybnosť fotónu je určená jeho vlnovou dĺžkou.

De Broglie, vedený intuitívnym očakávaním symetrie prírody, predpokladal, že

predchádzajúci vzťah je úplne všeobecný, teda použiteľný tak pre fotóny, ako aj pre všetky ostatné častice. Potom pre časticu hmotnosti m pohybujúcu sa rýchlosťou v , jej hybnosť mv súvisí s jej tzv. **de Broglieho vlnovou dĺžkou** podľa vzťahu:

$$\lambda = \frac{h}{mv}. \quad (7.14)$$

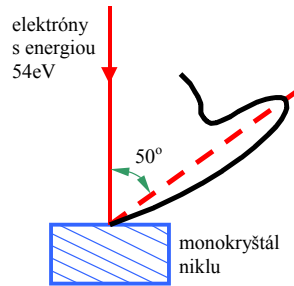
Každý častici s hmotnosťou m pri jej priamočiariom pohybe s konštantnou rýchlosťou v prislúcha rovinná monochromatická vlna s vlnovou dĺžkou λ . Ako vidno, čím väčšia je hybnosť častice, tým menšia bude jej vlnová dĺžka.

Vzťah (7.14) dáva do súvisu takú čisto vlnovú charakteristiku, akou je vlnová dĺžka, s čisto časticovou charakteristikou - hybnosťou a matematicky vyjadruje de Broglieho myšlienku o časticovo - vlnovom dualizme. Znamená to, že každá častica sa niekedy chová ako častica (významné sú jej časticové charakteristiky ako napr. hybnosť) a niekedy ako keby bola vlnením (významné sú jej vlnové charakteristiky ako je vlnová dĺžka). Samozrejme to platí aj o elektromagnetickom žiarení, ktoré, ako sme videli v predchádzajúcej kapitole, napriek tomu, že ho možno popísať ako vlnenie, sa niekedy chová ako prúd častíc - fotónov. Avšak nie je možné súčasne pozorovať časticové i vlnové vlastnosti hmoty. Toto vyjadruje tzv. **princíp komplementarity** (N. Bohr): K pochopeniu daného experimentu musíme použiť buď vlnovú alebo časticovú (fotónovú) teóriu, ale nikdy nie obe súčasne.

7.2.2 Experimentálne potvrdenie de Broglieho hypotézy

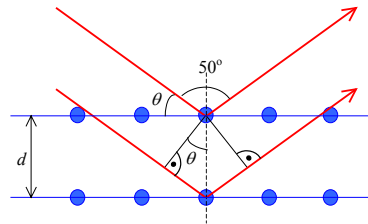
Vlnovú podstatu častíc prvýkrát experimentálne potvrdili Davisson a Germer v roku 1927, keď pozorovali **difrakciu elektrónov**. Táto difrakcia je prejavom vlnovej povahy častíc a nemá obdobu v chovaní newtonovských častíc.

Davisson a Germer študovali rozptyl elektrónov na monokryštali niklu (jeho atómy sú usporiadané do pravidelnej mriežky), pričom mohli meniť energiu dopadajúceho elektrónového zväzku i polohu detektora rozptýlených elektrónov (Obr.7.8). Podľa klasickej fyziky by rozptýlené elektróny mali vyletovať približne rovnako do všetkých smerov. Davisson a Germer však pozorovali zreteľné maximá a minimá v počtoch vyletujúcich elektrónov v závislosti od energie elektrónového zväzku. Pozrime sa, či môžu de Broglieho vlny vysvetliť tento výsledok. Pri kolmom dopade elektrónov s energiou 54 eV na niklový terčík sa ostré maximum v rozdelení rozptýlených elektrónov objavilo pod uhlom 50° od smeru pôvodného zväzku. Uhol dopadu i rozptylu vzhľadom k systému mriežkových rovín (Obr.7.9) potom bude 65° . Jedna z medzirovinných vzdialeností



Obr. 7.8

v kryštáli niklu je $d = 0,091$ nm. Braggova rovnica pre maximá v difrakčnom obrazci röntgenového žiarenia je:



Obr. 7.9

$$2d \sin \theta = k\lambda. \quad (7.15)$$

V našom prípade, za predpokladu, že $k = 1$, je de Broglieho vlnová dĺžka elektrónov po difrakcii rovná:

$$\lambda = 2d \sin \theta = 0,165 \text{ nm}.$$

Ak teraz použijeme k výpočtu vlnovej dĺžky de Broglieho vzťah pri danej kinetickej energii, potom s využitím súvisu medzi kineticou energiou a hybnosťou v nerelativistickom prípade

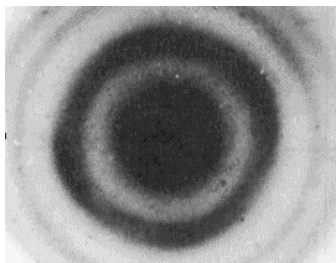
$$E_k = \frac{p^2}{2m},$$

dostávame:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = 0,166\text{nm}.$$

Tento výsledok je v dobrom súhlase s pozorovanou vlnovou dĺžkou, takže Davisson a Germer dokázali, že zväzok častíc (elektrónov) dopadajúci na monokryštal kovu vytvára rovnaký difrakčný obrazec ako vlnenie (röntgenové žiarenie) s vlnovou dĺžkou λ , pričom v prípade častíc je táto vlnová dĺžka de Broglieho vlnová dĺžka, takže častice prejavujú vlnové vlastnosti.

Vlnové vlastnosti elektrónov možno pozorovať aj pomocou Debyeovej - Scherrerovej metódy, ktorá sa používa na skúmanie interferencie röntgenového žiarenia. Röntgenové lúče pri prechode tenkou kovovou fóliou (predstavujúcou súbor mikroskopických kryštalov) sa ohýbajú. Tie lúče, ktorých smer vyhovuje vzťahu (7.15), tvoria plášť kužela. Keď dáme do cesty rozptýleným lúčom fotografickú platňu, kolmo na smer nalietaujúcich lúčov, vytvoria sa na nej (v miestach expozície - dopadu rozptýlených lúčov) sústredné krúžky, tzv. difraktogram. Také isté krúžky dostaneme aj vtedy, ak tenkou kovovou fóliou bude prechádzať prúd elektrónov. Rozptýlené elektróny vytvoria na fotografickej platni (expozujú ju v mieste svojho dopadu) sústavu sústredných interferenčných krúžkov - elektronogram. Takýto elektronogram prvýkrát získal Thomson na cínovej fólii (Obr. 7.10). Uvedené experimenty dokazujú, že prúd častíc, v tomto prípade



Obr. 7.10

elektrónov, sa niekedy správa ako vlnenie - má rovnaké vlnové vlastnosti, popísané Braggovým vzťahom, ako röntgenové (elektromagnetické) žiarenie. Tým teda dokazujú de Broglieho časticovo - vlnový dualizmus.

V súčasnosti je technika difrakcie elektrónov natoľko rozvinutá, že sa využíva v priemysle na skúmanie štruktúry materiálov. Prednosťou tejto metódy je, že sa

dosahuje väčšia intenzita ako pri röntgenovom žiarení (potrebná doba expozície je oveľa kratšia), je možné jednoduchým spôsobom spojitاً meniť vlnovú dĺžku elektrónov (pomocou urýchľujúceho napätia), účinkom elektromagnetických polí možno meniť smer elektrónových lúčov (elektrónový mikroskop, ktorého rozlišovacia schopnosť v dôsledku krátkej vlnovej dĺžky elektrónov je oveľa vyššia ako pri optických mikroskopoch).

Ako je to s pozorovaním vlnových vlastností v našom okolitom svete?

Časticovo - vlnový dualizmus je všeobecný prírodný zákon. Môžeme sa preto pýtať, akú de Broglieho vlnovú dĺžku má auto hmotnosti $m = 1000$ kg, pohybujúce sa rýchlosťou 20 m/s. Po dosadení do vzťahu $\lambda = h/(mv)$ a výpočte dostaneme pre vlnovú dĺžku hodnotu $3,315 \cdot 10^{-38}$ m, čo je také malé číslo, že je pre nás nerozlišiteľné od nuly. Z toho je vidieť, že vlnové vlastnosti sa v našom okolitom svete neprejavujú, prejavujú sa len v mikrosvete, čo však nie je v rozpore s univerzálnosťou časticovo - vlnového dualizmu.

7.2.3 Popis častice pomocou vlnového balíka

Uviedli sme súvis vlnových vlastností s časticovými - jednoduchý vzťah medzi vlnovou dĺžkou a hybnosťou častice. Akého druhu sú ale vlnové javy v prípade de Broglieho vln? Aká veličina vytvára jej zmeny, tak ako zvukovú vlnu vytvárajú periodické zmeny tlaku v prostredí, či elektromagnetické vlnenie periodické zmeny intenzít elektrického a magnetického poľa? Keby sme uvažovali iba časticové vlastnosti elektrónov v Thomsonovom pokuse, dopadajúce elektróny by mali v elektronograme vytvoriť jediné maximum so stredom presne oproti dopadajúcim elektrónom. V skutočnosti však elektróny vytvoria taký istý interferenčný obraz ako röntgenové lúče prechádzajúce tenkou kovovou fóliou. Elektronogram zobrazuje pravdepodobnosť výskytu elektrónov. Pre elektróny teda musí existovať charakteristika, ktorá má vlnový charakter a súvisí s pravdepodobnosťou výskytu elektrónov v danom mieste. Táto premenná veličina, ktorá charakterizuje vlnový charakter elektrónov, je **vlnová funkcia**, ktorá súvisí s pravdepodobnosťou výskytu elektrónu v bode v čase t . Matematický tvar tejto funkcie môže byť taký istý ako pre rovinnú vlnu :

$$\Psi = \Psi_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] = \Psi_0 \sin \left(\omega t - \frac{2\pi x}{vT} \right) = \Psi_0 \sin (\omega t - kx),$$

kde k je tzv. vlnové číslo. Kvôli zjednodušeniu výpočtov sa používa komplexné vyjadrenie funkcie pre rovinnú vlnu :

$$\Psi = \Psi_0 e^{-i\omega \left(t - \frac{x}{v} \right)}.$$

Zo vzťahov pre energiu a hybnosť v kvantovej mechanike platí:

$$E = hf = \hbar\omega \Rightarrow \omega = \frac{E}{\hbar}$$

a

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar},$$

a teda vlnovú funkciu možno napísať aj v tvare:

$$\Psi = \Psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} = \Psi_0 e^{-i(\omega t - kx)}. \quad (7.16)$$

Pravdepodobnosť P , že elektrón sa niekde nachádza v danom čase, môže nadobúdať ľubovoľnú hodnotu medzi dvomi hraničnými hodnotami - nulou, ktorá odpovedá istej neprítomnosti a jednotkou, odpovedajúcou istej prítomnosti. Amplitúda každej vlny môže byť ako kladná, tak i záporná, ale záporná pravdepodobnosť nemá zmysel, samotné Ψ teda nemôže byť pozorovateľnou veličinou, nie je možné ho experimentálne interpretovať, nemá teda žiaden fyzikálny zmysel. Toto sa ale netýka $|\Psi|^2$, štvorca absolútnej hodnoty vlnovej funkcie, čo je vždy kladné číslo. Veličina $|\Psi|^2$ je úmerná pravdepodobnosti experimentálneho nájdenia častice v danom časovom okamihu t v mieste x a nazýva sa **hustota pravdepodobnosti**. Túto interpretáciu prvýkrát navrhol Max Born v roku 1926.

Ak navrhnutá vlnová funkcia (7.16) predstavuje časticu, hustotu pravdepodobnosti výskytu tejto častice vypočítame ako druhú mocninu absolútnej hodnoty vlnovej funkcie:

$$|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^* = \Psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} \cdot \Psi_0^* e^{-\frac{i}{\hbar}(px - Et)} = |\Psi_0|^2, \quad (7.17)$$

kde Ψ^* je funkcia komplexne združená k funkcii Ψ . Hustota pravdepodobnosti je konštantná, takže pravdepodobnosť výskytu častice je rovnaká v celom priestore. Vlna je príliš „široká“ - neurčitá na to, aby mohla predstavovať časticu. Táto vlna predstavuje časticu s presnou hodnotou vlnového čísla k , ktoré priamo súvisí s hybnosťou p . Ak hybnosť, a teda aj vlnové číslo k častice nemôžeme určiť presne, ale len s presnosťou $< k - \Delta k, k + \Delta k >$, potom časticu môžeme opísať superpozíciou vln, ktorých vlnové číslo je z intervalu $< k - \Delta k, k + \Delta k >$:

$$\Psi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \Psi_0(k) e^{-i[\omega(k)t - kx]} dk.$$

Reálna zložka výsledného vzťahu predstavuje konečný výsledok :

$$\Psi(x, 0) = 2\Psi_0\Delta k \cos(k_0x) \frac{\sin(x\Delta k)}{x\Delta k}. \quad (7.18)$$

Takáto vlnová funkcia sa nazýva **vlnový balík** a lepšie vystihuje polohu častice v priestore (Obr. 7.11).

Dá sa ukázať, že pri superpozícii vln blízkych hodnôt vlnového čísla sa maximum obálky výslednej vlny pohybuje **grupovou rýchlosťou** v_g , ktorá je definovaná vzťahom

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (7.19)$$

V prípade častice hmotnosti m pohybujúcej sa rýchlosťou v je táto rýchlosť rovná rýchlosti častice:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \left(\frac{E}{\hbar} \right) = \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dk} \sqrt{m_0^2 c^4 + \hbar^2 k^2 c^2} = \frac{1}{\hbar} \frac{1}{2} \frac{2\hbar^2 k c^2}{\sqrt{m_0^2 c^4 + \hbar^2 k^2 c^2}}$$

$$v_g = \frac{\hbar k c^2}{m c^2} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = v.$$

Keďže častice sa niekedy prejavujú ako vlnenie s určitou vlnovou dĺžkou a dajú sa popísať pomocou vlnových funkcií, možno očakávať, že existujú zásadné hranice presnosti, s ktorou možno merať ich časticové charakteristiky. V ďalšej časti ich ukážeme.

7.3 Heisenbergove vzťahy neurčitosti

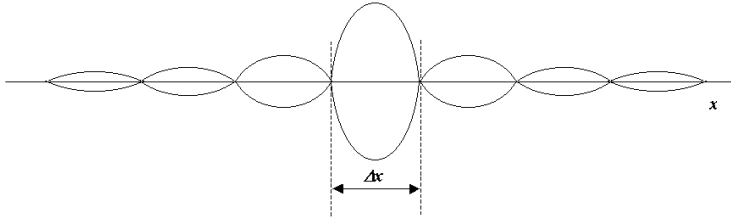
Hlavné maximum vlnového balíka (7.11) je v mieste $x = 0$ a je ohraničené bodmi x_1 a x_2 , pre ktoré má funkcia (7.18) nulové hodnoty, teda platí $x_1\Delta k = -\pi$ a $x_2\Delta k = \pi$. Šírka maxima sa rovná rozdielu týchto súradníc :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{\Delta k}. \quad (7.20)$$

Takže platí

$$\Delta x \Delta k = 2\pi. \quad (7.21)$$

Z výsledku vyplýva, že čím je interval Δk širší, tým je užší interval Δx , ktorým je lokalizovaná častica na osi x . Vlnový balík vytvára aj ďalšie, ale podstatne



Obr. 7.11

nižšie maximá, preto, ak Δx má vyjadrovať interval, v ktorom sa častica môže nachádzať, vo vzťahu (7.21) treba rovnosť nahradiť nerovnosťou :

$$\Delta x \Delta k \geq 2\pi.$$

Ak využijeme súvis medzi hybnosťou a vlnovým číslom $p = \hbar k$, predchádzajúci vzťah možno napísať v tvare :

$$\Delta x \Delta p \geq h$$

Exaktné výpočty ukazujú, že platí:

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2},$$

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Tieto dva vzťahy sa nazývajú **Heisenbergove vzťahy neurčitosti**. Prvý z nich hovorí, že nie je možné súčasne s ľubovoľnou presnosťou určiť hybnosť a polohu častice. Druhý vyjadruje skutočnosť, že ak chceme merať energiu častice počas časového intervalu Δt , nepresnosť nášho merania bude $\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t}$. Keďže h je veľmi malé číslo, obmedzenia kladené vzťahmi neurčitosti sú podstatné iba v subatómových rozmeroch.

Odhad rozmeru atómu vodíka. Pomocou prvého vzťahu neurčitosti môžeme veľmi jednoducho odhadnúť, aký musí byť minimálne polomer atómu vodíka, ak vieme, že energia E elektrónu hmotnosti $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg v atóme je $17 \text{ eV} = 2,7 \cdot 10^{-18}$ J. Odpovedajúca hybnosť:

$$p = \sqrt{2mE} = 2,2 \cdot 10^{-24} \text{ kgms}^{-1},$$

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{h}{4\pi}, \quad \Delta x \geq \frac{h}{4\pi \Delta p}.$$

Δp môže byť menšie alebo rovné p , takže ak za maximálne Δp budeme brať hodnotu hybnosti, dostaneme minimálnu hodnotu polomeru atómu vodíka:

$$x_{\min} = \Delta x = \frac{h}{4\pi p} \cong 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ m.}$$

Ako uvidíme neskôr, tento odhad je v súlade so skutočnosťou.

7.4 Schrödingerova rovnica

7.4.1 Zostavenie Schrödingerovej rovnice

V klasickej mechanike je stav častice alebo sústavy častíc úplne popísaný, ak sú známe napr. súradnice a hybnosti častice alebo sústavy častíc. V kvantovej mechanike informáciu o systéme poskytuje vlnová funkcia.

Stav častice, ktorej pohyb je obmedzený pôsobením vonkajších síl, je úplne popísaný vlnovou funkciou Ψ , ktorá je funkciou súradníc a času. Vlnovú funkciu získame riešením rovnice, ktorá musí byť lineárna a homogénna, aby vlnová funkcia spĺňala princíp superpozície, ktorý všeobecne platí pre vlnové procesy. Rovnica tiež musí byť diferenciálnou rovnicou prvého rádu vzhľadom k času. Potom vývoj vlnovej funkcie v čase môže byť popísaný na základe jej známej hodnoty v počiatočnom okamihu. Takéto úlohy rieši kvantová mechanika, ktorú rozvinuli v rokoch 1925-26 najmä Erwin Schrödinger a Werner Heisenberg.

Teraz uvedieme požiadavky, ktoré musí spĺňať vlnová funkcia Ψ . Keďže $|\Psi|^2$ je rovné hustote pravdepodobnosti výskytu častice v danom mieste, musí byť integrál $|\Psi|^2$ cez celý priestor rovný 1 - častica sa niekde v priestore určite nachádza:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dV = 1,$$

čo je tzv. **normovanie vlnovej funkcie** na jednotku.

Vlnová funkcia v kvantovej mechanike popisuje stav častice, pretože pomocou nej môžeme získať úplnú informáciu o všetkých merateľných veličinách v danom fyzikálnom stave častice. Preto vlnová funkcia musí byť jednoznačnou funkciou polohy a času a potom aj pravdepodobnosť bude mať jedinú hodnotu v každom mieste a čase.

Vlnová funkcia musí byť spojitá a hladká, teda jej parciálne derivácie podľa jednotlivých súradníc musia byť všade spojité. Keďže samotná vlnová funkcia

nemá fyzikálny zmysel, môže byť aj komplexnou funkciou a v jednorozmernom prípade ju možno zapísať v tvare (7.16):

$$\Psi = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}. \quad (7.22)$$

Výraz (7.22) je matematickým popisom vlnového ekvivalentu voľnej častice s celkovou energiou E a hybnosťou p pohybujúcou sa v kladnom smere osi x .

Vlnovú funkciu pre časticu voľne sa pohybujúcu v trojrozmernom priestore potom možno napísať v tvare:

$$\Psi(\vec{r}, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)}. \quad (7.23)$$

Uvedené vlnové funkcie (7.22) a (7.23) popisujú voľnú časticu, t.j. časticu, ktorá nie je pod vplyvom žiadnych síl. Keďže úlohou kvantovej mechaniky je riešiť prípady, kedy je pohyb častice obmedzený pôsobením rôznych síl, bude treba získať všeobecnú diferenciálnu rovnicu pre vlnovú funkciu, ktorej riešením bude vlnová funkcia v danom silovom poli.

Budeme postupovať indukčnou metódou - od špeciálneho známeho riešenia dospejeme k všeobecne platnej rovnici. Vlnová funkcia je funkciou súradníc a času. Chceme teda zistiť, ako bude súvisieť časová derivácia tejto funkcie s jej deriváciou podľa súradníc.

Zderivujeme (7.23) podľa času:

$$\frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)} \cdot \left(-\frac{i}{\hbar} E \right),$$

čo možno písať

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = E \cdot Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)}.$$

Keďže pre voľnú časticu, pohybujúcu sa rýchlosťou oveľa menšou ako je rýchlosť svetla, platí

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m},$$

máme z predchádzajúcej rovnice:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\vec{p}^2}{2m} \Psi(\vec{r}, t). \quad (7.24)$$

Zderivujeme vlnovú funkciu podľa súradníc. Pre x -ovú súradnicu dostávame:

$$\frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial x} = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)} \cdot \left(\frac{i}{\hbar} p_x \right) \Rightarrow -i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial x} = p_x \Psi(\vec{r}, t).$$

Ak teda na vlnovú funkciu aplikujeme operátor $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, dostaneme pôvodnú vlnovú funkciu násobenú x -ovou zložkou hybnosti častice, preto tento operátor nazývame operátorom hybnosti \hat{p}_x :

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}.$$

Druhou deriváciou podľa súradníc dostaneme:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial x^2} = p_x^2 \Psi(\vec{r}, t).$$

V trojrozmernom prípade:

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi(\vec{r}, t) &= \vec{p}^2 \Psi(\vec{r}, t), \\ -\hbar^2 \Delta \Psi(\vec{r}, t) &= \vec{p}^2 \Psi(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (7.25)$$

Ak túto rovnicu predelíme $2m$, dostaneme

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} \Psi(\vec{r}, t) \Rightarrow \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) = E_k \Psi(\vec{r}, t),$$

pretože $E_k = \frac{\vec{p}^2}{2m}$.

Teda operátor $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$ aplikovaný na vlnovú funkciu dáva kinetickú energiu častice násobenú vlnovou funkciou a preto ho nazývame operátorom kinetickej energie

$$\hat{E}_k = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta.$$

Porovnaním (7.24) a (7.25) dostávame **Schrödingerovu rovnicu pre voľnú časticu**:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t). \quad (7.26)$$

Rovnicu (7.26) splňa každá rovinná vlna (7.23) a lineárna kombinácia takýchto vln, t.j. de Broglieho vlnové balíky.

Ak sa častica nachádza v silovom poli s potenciálnou energiou $V(\vec{r}, t)$, na pravej strane (7.26) je treba namiesto operátora kinetickej energie uvažovať operátor celkovej energie:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}, t)$$

a Schrödingerova rovnica pre takúto časticu bude mať tvar:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t), \quad (7.27)$$

čo pomocou operátora celkovej energie $\hat{H} = \hat{E}_k + \hat{V}$ (hamiltoniánu) možno zapísať:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{r}, t).$$

V mnohých prípadoch potenciálna energia častice v silovom poli nezávisí od času, pretože sily, ktoré na časticu pôsobia, a teda i potenciálna energia, sa menia iba s polohou. Časticu potom možno popísať vlnovou funkciou:

$$\Psi(\vec{r}, t) = A e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{\frac{i\vec{p}\vec{r}}{\hbar}} = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \psi(\vec{r}), \quad (7.28)$$

takže vlnová funkcia je súčinom časovo závislej funkcie a funkcie polohy. Vlnovú funkciu (7.28) dosadíme do Schrödingerovej rovnice (7.27)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \right) \psi(\vec{r}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \psi(\vec{r}).$$

Po derivovaní a predelení celej rovnice výrazom $e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ dostávame:

$$E\psi(\vec{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r})$$

alebo

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}),$$

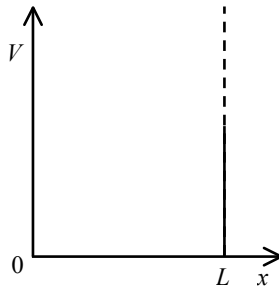
čo je **bezčasová Schrödingerova rovnica**. Riešením tejto rovnice získame vlnové funkcie a z podmienok kladených na vlnové funkcie získame možné hodnoty energie. Príklad na riešenie bezčasovej Schrödingerovej rovnice je uvedený v nasledujúcej kapitole.

7.4.2 Častica v jednorozmernej, nekonečne hlbkej jame

Nech častica hmotnosti m sa nachádza v jednorozmernej nekonečne hlbkej jame šírky L . To znamená, že pre polohu častice x platí: $0 < x < L$ a pre jej potenciálnu energiu v jame: $V = 0$, pričom potenciálna energia všade mimo jamy je nekonečne veľká (teda častica je „uväznená“ v jame) a teda vlnová funkcia

častice mimo jamy bude nulová (Obr. 7.12).

Voľný elektrón v kove je podobne „uväznený“ - vo vnútri kovu sa môže pohybovať takmer voľne, ale von z kovu sa môže dostať iba po dodaní energie najmenej rovnej výstupnej práci. V reálnych prípadoch majú jamy konečnú hĺbku, takže pravdepodobnosť úniku častice z jamy je nenulová - vlnové funkcie za hranicou jamy nie sú celkom nulové (tzv. tunelový jav).



Obr. 7.12

$$\int_0^L |\Psi|^2 dx = 1. \quad (7.29)$$

Pre potenciálnu energiu v uvedenom intervale platí $V = 0$ a všade inde je nekonečne veľká. Budeme teda riešiť jednorozmernú, časovo nezávislú Schrödingrovu rovnicu v tvare:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi, \quad \text{kde} \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}.$$

Potom

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\Psi = 0. \quad (7.30)$$

Rovnicu (7.30) možno zapísať v známom tvare pre diferenciálnu rovnicu druhého rádu bez pravej strany:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -\omega^2\Psi, \quad \text{kde} \quad \omega = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

Jej riešeniami sú:

$$\Psi = A \sin \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} x, \quad \Psi = B \cos \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} x. \quad (7.31)$$

Okrajové podmienky vyžadujú, aby platilo $\Psi(0) = \Psi(L) = 0$. Dosadením $x = 0$ do druhého riešenia dostaneme $B = 0$ (pretože $\cos(0) = 1$), takže nenulové ostáva iba prvé riešenie z (7.31). Ak doň dosadíme $x = L$, výsledok musí byť rovný nule, pretože v stene častica byť nemôže, teda aj vlnová funkcia tam musí byť nulová:

$$\Psi_{x=L} = A \sin \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} L = 0.$$

Keďže A je rôzne od nuly, musí byť nulová funkcia sinus, čo bude splnené, ak:

$$\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} L = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Odtiaľ pre energiu vyplýva:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2. \quad (7.32)$$

E_n sú **energetické hladiny** a n je **kvantové číslo** (tzv. **hlavné**), ktoré kvantuje energiu. To teda znamená, že častica, ktorej pohyb je obmedzený na šírku jamy a inak je voľná, nemôže nadobúdať ľubovoľné hodnoty energie, nemôže energiu meniť spojite, nemôže mať ani nulovú energiu, ale jej energia môže mať iba diskkrétne hodnoty dané vzťahom (7.32). Teda z okrajových podmienok kladených na vlnovú funkciu vyplýva **kvantovanie energie**.

Zo súvisu energie (energia častice je jej kinetickou energiou) a hybnosti možno získať vzťah pre kvantovanie hybnosti častice:

$$p_n = \sqrt{2mE_n} = \pm \frac{\pi \hbar}{L} n.$$

Znamienko \pm vyjadruje pohyb v oboch smeroch osi x .

Príklad

Vypočítajme energetické hladiny pre:

- elektrón s hmotnosťou $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg v jame šírky $L = 10^{-10}$ m,
- guľôčku hmotnosti $m = 10$ g v jame šírky $L = 10$ cm.

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$$

$$\text{a) } E_n = n^2 \cdot 6 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 38 \text{ eV} \cdot n^2 \quad (1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J})$$

$$n = 1 \Rightarrow E_1 = 38 \text{ eV}$$

$$n = 2 \Rightarrow E_2 = 152 \text{ eV}$$

$$n = 3 \Rightarrow E_3 = 342 \text{ eV}$$

Všetky tieto energetické hladiny sú pozorovateľné.

$$\text{b) } E_n = n^2 \cdot 5,5 \cdot 10^{-64} \text{ J}$$

$E_1 = 5,5 \cdot 10^{-64} \text{ J}$, rýchlosť častice s touto energiou je $v_1 = 3,3 \cdot 10^{-31} \text{ m/s}$, čo je nerozoznateľné od pokoja.

Pre bežne pozorovateľnú rýchlosť guľôčky $v_n = 0,33 \text{ m/s}$ dostaneme pre príslušnú energetickú hladinu kvantové číslo $n = 10^{30}$. Táto hladina je nerozlišiteľná od nasledujúcej hladiny, teda energetické spektrum guľôčky sa javí nie ako diskrétné, ale ako spojité.

Ak do (7.31) dosadíme získané možné hodnoty energie, dostaneme vlnové funkcie, ktoré popisujú dané energetické stavy. Pre n -tý energetický stav takto máme:

$$\Psi_n = A \sin \frac{n\pi}{L} x. \quad (7.33)$$

Všimnime si, že keby $n = 0$ ($E_n = 0$), potom $\Psi_n = 0$, teda častica v jame nie je. Preto energia častice nemôže byť nulová.

Aby sme úlohu vyriešili, ostáva určiť hodnotu konštanty A . Získame ju aplikovaním normovacej podmienky (7.29) na vlastné vlnové funkcie (7.33):

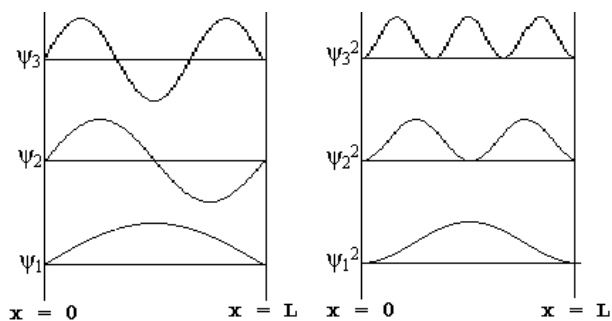
$$A^2 \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = 1.$$

Aby sme vyriešili integrál, zavedieme substitúciu $\frac{n\pi x}{L} = y$, potom $dx = \frac{L}{n\pi} dy$, pričom hranice integrovania sa zmenia nasledovne: $x = 0 \Rightarrow y = 0$, $x = L \Rightarrow y = n\pi$ a budeme mať:

$$\begin{aligned} \frac{A^2 L}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sin^2 y dy &= \frac{A^2 L}{n\pi} \left[-\frac{\cos y \sin y}{2} + \frac{y}{2} \right]_0^{n\pi} = \\ &= \frac{1}{2} n\pi \frac{A^2 L}{n\pi} = \frac{1}{2} A^2 L = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}}. \end{aligned}$$

Výsledné normované vlnové funkcie potom možno písať v tvare:

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x. \quad (7.34)$$



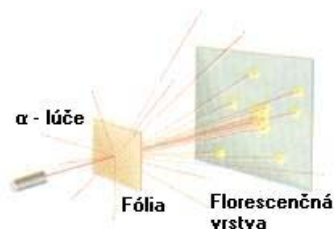
Obr. 7.13

Na obrázku 7.13 sú znázornené priebehy vlnových funkcií a ich kvadrátov v závislosti od súradnice x pre prvé tri najnižšie možné energetické hladiny častice $n = 1, 2, 3$. Ako už vieme, fyzikálnu interpretáciu majú iba kvadráty vlnových funkcií. Ako je z obrázka vidieť, časticu v najnižšom energetickom stave ($n = 1$) nájdeme najpravdepodobnejšie v strede jamy, kým v najbližšom vyššom energetickom stave ($n = 2$) tam časticu nenájdeme vôbec, zato najpravdepodobnejšie ju nájdeme v štvrtine a troch štvrtinách L . Získali sme výsledok odlišný od predstáv klasickej fyziky, podľa ktorých by sme časticu v jame našli s rovnakou pravdepodobnosťou v ľubovoľnom mieste. Je treba si opäť uvedomiť, že všetky výsledky odlišné od klasických predstáv, ktoré sme získali pri riešení tohto problému, sa prejavujú a sú merateľné iba v subatómovom svete.

8 Atóm

8.1 Úvod

Thomson bol v roku 1898 prvým, kto prišiel s myšlienkou o štruktúre atómu, ktorá zahŕňala aj elektrický náboj. Tvrdil, že atóm je nepatrná guľa, bez zvláštnych znakov, ktorá nesie kladný elektrický náboj. Aby bol atóm navonok neutrálny, sú v ňom uložené elektróny (ako hrozienka v koláči), ktoré neutralizujú jeho kladný náboj. Túto predstavu možno pokladať za **prvý model atómu**. Po objavení prirodzenej rádioaktivity, Rutherford využil α častice, ktoré sú mimoriadne ťažké, na skúmanie **vnútra atómu**. Prúd α častíc nechal dopadať na



Obr. 8.1

tenkú zlatú fóliu (Obr. 8.1) a na fotografickej platni sledoval stopy častíc, ktoré prešli fóliou. Väčšina častíc prechádzala fóliou bez zmeny smeru, ale približne 1 z 8000 častíc sa odchýlila o 90 a viac stupňov. Teda niekde vo vnútri atómu (a zrejme iba v jeho veľmi malej časti) musí existovať koncentrácia hmotnosti oveľa väčšej ako je hmotnosť α častice, s kladným nábojom, ktorá dokáže túto časticu odraziť späť. V roku 1911 ohlásil **Rutherford** riešenie - svoj model atómu: celý kladný náboj a skoro celá hmotnosť atómu sú sústredené v kompaktnom jadre v strede atómu zaberajúcom iba asi $1/10^{12}$ z objemu atómu a elektróny obiehajú okolo neho po kruhových dráhach podobne ako planéty okolo Slnka (tzv. **planetárny model atómu**), kde namiesto gravitačnej sily pôsobí elektromagnetická príťažlivá sila medzi kladným jadrom a zápornými elektrónmi. Problém takéhoto popisu tkvel v tom, že známe zákony fyziky nedovoľovali existenciu takéhoto atómu, pretože obiehajúci elektrón by neustálym vyžarovaním elektromagnetického žiarenia strácal energiu, v dôsledku čoho by sa v zlomku sekundy zrútil do jadra.

8.2 Bohrov model vodíkového atómu

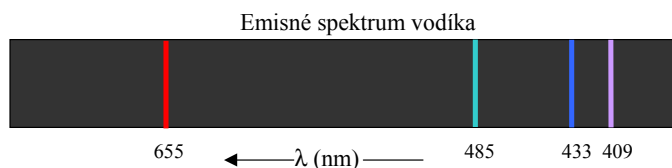
Opísať atóm pomocou klasických fyzikálnych predstáv sa nepodarilo. Tu neskôr zohrala úspešnú úlohu kvantová mechanika, i keď exaktne je možné riešiť iba najjednoduchší vodíkový atóm.

Vodíkový atóm hral vždy dôležitú úlohu pri preverovaní nových teórií o štruktúre atómov pretože:

- spektrum vodíka patrilo k najznámejším a boli nájdené niektoré jeho zákonitosti,
- keďže je to najjednoduchší atóm, možno ho najjednoduchšie matematicky opísať a následným porovnaním teoretických výsledkov s experimentom je hneď potvrdená alebo vyvrátená predložená teória (v tomto zmysle bola analýza atómu vodíka i preverkou kvantovej fyziky).

Atómy plynov pri excitácii (napr. zahriatím) vyžarujú elektromagnetické žiarenie iba určitých frekvencií - majú čiarové spektrum.

V roku 1885 Balmer analyzoval vodíkové spektrum (Obr. 8.2) a ukázal, že čiary



Obr. 8.2

tvoria sériu a že platí jednoduchý vzťah pre prevrátenú hodnotu ich vlnových dĺžok:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

kde $n = 3, 4, 5, \dots$ a $R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ je tzv. Rydbergova konštanta.

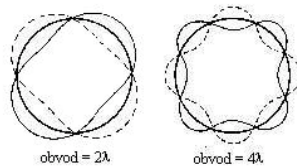
V rámci klasickej fyziky sa čiarové spektrum nepodarilo vysvetliť.

V roku 1913 predložil **N. Bohr** svoj poloklasický **model vodíkového atómu** založený na troch postulátoch, kde prvýkrát aplikoval na štruktúru atómu kvantové hľadiská. Keďže je založený na postulátoch, je to model, ale jeho výsledky

presne súhlasia s experimentom (popisujú vodíkové čiarové spektrum), ako aj s exaktnými kvantovomechanickými výpočtami, ktoré boli pre vodíkový atóm neskôr urobené, a keďže je veľmi jednoduchý a názorný, popíšeme ho.

Ak si predstavíme, že rozkmitáme drôtenú slučku tak, že jej obvod je celočíselným násobkom vlnovej dĺžky vlnenia, ktoré sa bude slučkou šíriť, všetky vlny budú na seba hladko nadväzovať a keby nebolo odporu prostredia, išlo by o netlmené stojaté vlnenie, ktoré by trvalo neobmedzene dlho (ak by obvod nebol celočíselným násobkom vlnovej dĺžky, došlo by k rušivej interferencii a vlnenie by zaniklo).

Analogicky si môžeme predstaviť, že ani elektrón v atóme nemôže obiehať okolo



Obr. 8.3

jadra po ľubovoľných dráhach, ale iba po takých kružniciach, ktorých obvod je rovný celočíselnému násobku de Broglieho vlnovej dĺžky elektrónu (Obr. 8.3):

$$2\pi r_n = n\lambda,$$

kde $\lambda = \frac{h}{mv_n}$ a n je prirodzené číslo, a teda po dosadení máme:

$$mv_n r_n = n \frac{h}{2\pi},$$

kde m je hmotnosť elektrónu, r_n je polomer n -tej dráhy a v_n je rýchlosť elektrónu na tejto dráhe.

Môžeme formulovať **Bohrove postuláty**:

1. Elektrón môže trvalo krúžiť okolo jadra len po takých kruhových dráhach, kde veľkosť jeho momentu hybnosti je rovná celistvému násobku $\frac{h}{2\pi} = \hbar$:

$$mv_n r_n = n\hbar. \quad (8.1)$$

2. Kým elektrón obieha po takejto kvantovej dráhe, atóm nevyžaruje, jeho energia je stála.

3. Pri prechode elektrónu z dráhy, kde mal vyššiu energiu, na dráhu, kde má nižšiu energiu, vyžiari atóm fotón, ktorého energia je rovná rozdielu energií elektrónu:

$$hf = E_n - E_k, \quad n > k.$$

Opačný prechod je možný iba pri dodaní energie.

Elektrón sa pohybuje v elektrostatickom poli kladného jadra po kruhových dráhach konštantnou rýchlosťou, takže coulombovská sila je dostredivou silou. Podľa 2. Newtonovho zákona platí:

$$\begin{aligned} ma_n &= F_e, \\ \frac{mv_n^2}{r_n} &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}, \end{aligned} \quad (8.2)$$

kde e je náboj elektrónu (kladné jadro má náboj rovnakej veľkosti ako elektrón). Rovnice (8.1) a (8.2) tvoria sústavu dvoch rovníc pre dve neznáme r_n a v_n a ich riešením dostávame pre **polomery** prípustných dráh a príslušné **obvodové rýchlosti**:

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m} n^2, \quad v_n = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h} \frac{1}{n}. \quad (8.3)$$

Ak do predchádzajúcich výrazov dosadíme $n = 1$, dostaneme polomer prvej dráhy elektrónu vo vodíkovom atóme a rýchlosť na nej: $r_1 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{m}$, $v_1 = 2,188 \cdot 10^6 \text{m/s}$.

Aby sme mohli porovnať výsledky získané pomocou tohto modelu s experimentálnymi výsledkami, ktoré namerlal Balmer, spočítame energiu elektrónu na dovolených dráhach. Celková energia elektrónu je súčtom jeho kinetickej a potenciálnej energie (nerelativistickej, pretože rýchlosti, ktorými sa pohybuje, sú stále oveľa menšie ako rýchlosť svetla), kde:

$$E_{kn} = \frac{1}{2} m v_n^2 = \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2 n^2}$$

je kinetická energia (za v_n sme dosadili z (8.3)) a potenciálnu energiu dostaneme ako záporne vzatú prácu síl elektrostatického poľa potrebnú na prenesenie elektrónu z nekonečna do vzdialenosti r_n od jadra:

$$E_{pn} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{m e^4}{4\epsilon_0^2 h^2 n^2},$$

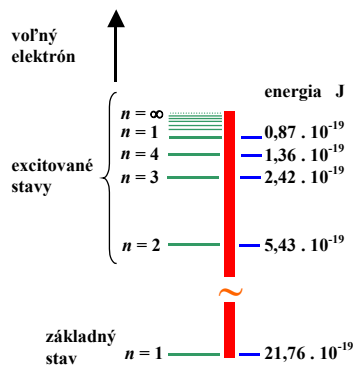
keď za r_n sme opäť dosadili z (8.3).

Pre **celkovú energiu** teda máme:

$$E_n = E_{kn} + E_{pn} = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}. \quad (8.4)$$

Energie dané vzťahom (8.4) sa nazývajú energetické hladiny vodíkového atómu a sú znázornené na obrázku 8.4.

Záporná hodnota energie znamená **viazaný stav elektrónu** v silovom poli



Obr. 8.4

jadra, teda elektrón je v atóme. S rastom n bude energia narastať, až pri $n \rightarrow \infty$ energia sa bude blížiť k nule, elektrón prestane byť viazaný v atóme, stane sa voľným.

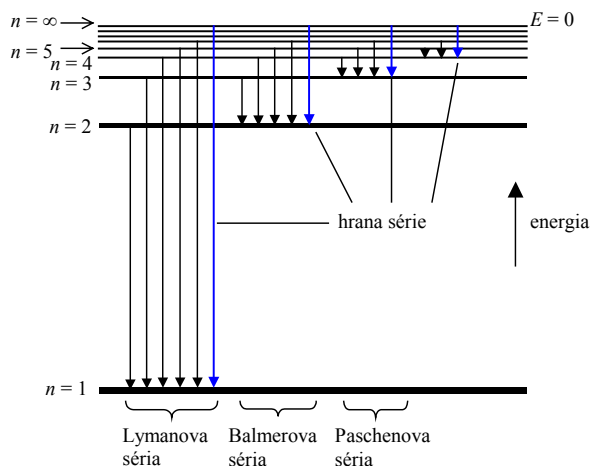
Teraz využijeme 3. postulát a vypočítame prevrátenú hodnotu vlnovej dĺžky fotónu, ktorý sa vyžiari pri preskoku elektrónu z vyššej energetickej hladiny n na nižšiu hladinu k .

$$hf = E_n - E_k, \quad f = \frac{c}{\lambda},$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (8.5)$$

Zlomok pred zátvorkou na pravej strane výrazu (8.5) je Rydbergova konštanta R a dostávame súhlas s výsledkom Balmerovho pozorovania ak za k dosadíme 2. Ide teda o preskoky elektrónov z 3., 4., 5., ... energetickej hladiny na druhú,

pri ktorých sa vyžarujú fotóny z viditeľnej oblasti elektromagnetického žiarenia, takže táto, tzv. Balmerova séria tvorí viditeľnú oblasť vodíkového spektra. Vodíkové spektrum obsahuje aj ďalšie série, ktoré vznikajú pri preskokoch elektrónov z vyšších energetických hladín na prvú ($k = 1$) - Lymanova séria, na tretiu ($k = 3$) - Paschenova séria, atď., ktoré ale spadajú do oblasti ultrafialového (Lymanova séria) alebo infračerveného žiarenia ($k > 2$). Popísané série sú znázornené na obrázku 8.5.



Obr. 8.5

8.3 Výsledky kvantovomechanického popisu vodíkového atómu

Vodíkový atóm ako atóm najjednoduchší sa dá riešiť exaktne - riešením trojrozmernej časovo nezávislej Schrödingerovej rovnice, ktorá má tvar:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi = E\Psi,$$

kde $V = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Riešenie tejto rovnice je matematicky náročné a preto uvedieme iba najdôležitejšie výsledky.

Kvantovanie energie a momentu hybnosti.

Pre energetické hladiny dostávame zhodný výsledok s výsledkom Bohrovho modelu

$$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

kde n je **hlavné kvantové číslo**.

S pohybom po kružnici je spojený mechanický moment hybnosti, ktorý podobne ako energia, je tiež kvantovaný. Keďže moment hybnosti je vektor, je kvantovaná jeho veľkosť i smer. **Veľkosť momentu hybnosti** je kvantovaná:

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar,$$

kde $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ je tzv. **vedľajšie kvantové číslo**.

Kvantovanie smeru vektora momentu hybnosti sa prejaví, ak je atóm uložený v magnetickom poli. Vektor momentu hybnosti môže mať len určité smery v priestore, teda jeho priemet do smeru magnetického poľa je kvantovaný:

$$L \cos \vartheta = m_l \hbar,$$

$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ je **magnetické kvantové číslo** a uhol ϑ je uhol medzi vektorom momentu hybnosti a vektorom indukcie magnetického poľa.

Kvantovanie momentu hybnosti spôsobí, že každá hlavná energetická hladina sa rozštiepi na niekoľko blízkych podhladin podľa vedľajšieho a magnetického kvantového čísla (tzv. **šupky**: s ($l = 0$), p ($l = 1$), d ($l = 2$),...), čo sa experimentálne pozoruje ako rozštiepenie spektrálnych čiar v emisnom spektre vodíka.

Spin elektrónu.

V emisnom spektre vodíka sa však pozorovalo ďalšie štiepenie čiar, čo v roku 1925 viedlo Goudsmita a Uhlenbecka k vysloveniu hypotézy, podľa ktorej má elektrón aj vlastný, vnútorný moment hybnosti - tzv. spin, nezávislý na jeho prípadnom orbitálnom momente hybnosti, a určitý magnetický moment s ním spojený. Mali tým na mysli klasický obraz elektrónu ako nabitej guľôčky rotujúcej okolo svojej geometrickej osi a s touto rotáciou spojený vlastný moment hybnosti (spin) a magnetický moment so spinom spojený. Predstava elektrónu ako rotujúcej nabitej guľôčky je ale sotva v súlade s kvantovou fyzikou. V roku 1928 sa Diracovi v rámci relativistickej kvantovej mechaniky podarilo ukázať, že častica s nábojom a hmotnosťou elektrónu musí mať práve taký vlastný moment hybnosti a magnetický moment ako jej pripísali Goudsmit a Uhlenbeck.

K popisu spinového momentu hybnosti elektrónu sa užíva spinové kvantové číslo s , ktoré ako vyplýva z Diracovej teórie, môže nadobúdať jediná hodnotu $s = 1/2$. Tento záver je v súlade aj so spektrálnymi pozorovaniami. Podobne ako súvisí orbitálny moment hybnosti L s vedľajším kvantovým číslom l , súvisí aj spinový moment hybnosti S so spinovým kvantovým číslom s :

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar.$$

Rovnako ako vektor orbitálneho momentu hybnosti môže mať v magnetickom poli $2l+1$ orientácií od $-l$ do $+l$, môže mať i vektor spinového momentu hybnosti $2s+1 = 2$ orientácií popísaných hodnotami $m_s = 1/2$. Práve $2s+1 = 2$ možných orientácií spinu je v súlade s experimentálnymi pozorovaniami spektier, kde sa ukázalo, že pôvodne predpokladaný jediná stav je v skutočnosti dvojicou stavov (priestorové kvantovanie spinu elektrónu). Potom z -ová zložka spinového momentu hybnosti je určená spinovým magnetickým kvantovým číslom m_s :

$$S_z = m_s\hbar,$$

kde $m_s = \pm \frac{1}{2}$.

8.4 Viacelektrónové atómy

Základná konfigurácia vodíkového atómu znamená, že elektrón je vo svojom najnižšom kvantovom stave. Aké sú ale základné konfigurácie zložitejších atómov? Sú snáď všetky elektróny natlačené v najnižšom kvantovom stave? O nepravdepodobnosti takejto hypotézy svedčí napríklad veľký rozdiel chemických vlastností prvkov, ktorých atómová štruktúra sa líši iba o jediná elektrón. V roku 1925 z pozorovaní atómových spektier objavil **Pauli** základný princíp, ktorý spĺňajú viacelektrónové konfigurácie - tzv. vylučovací princíp. Tento princíp hovorí, že v atóme nemôžu existovať dva elektróny, ktoré by mali všetky štyri kvantové čísla (n, l, m_l, m_s) rovnaké, teda musia sa líšiť aspoň jedným kvantovým číslom.

Elektrónové konfigurácie mnohoelektrónových atómov sú určené dvomi základnými pravidlami:

1. Systém častíc je stabilný, ak je celková **energia minimálna**.
2. Platí **Pauliho vylučovací princíp** - v každom jednotlivom kvantovom stave môže v atóme existovať iba jeden elektrón.

Atómové vrstvy sú energetické hladiny obsadené elektrónmi s rovnakým hlavným kvantovým číslom n . Označujú sa veľkými písmenami abecedy počínajúc K:

$n =$	1	2	3	4	5	...
	K	L	M	N	O	...

Energie elektrónov v danej vrstve sa mierne líšia, lebo závisia od ďalších kvantových čísel l , m_l a m_s . S rastúcim kvantovým číslom l energie elektrónov rastú, závislosť energie od m_l a m_s je pomerne slabá.

Elektróny, ktoré majú v danej vrstve totožné vedľajšie kvantové číslo l , tvoria jednu podvrstvu - orbitál, ktorá sa označuje malým písmenom abecedy:

$l =$	0	1	2	3	...
	s	p	d	f	...

Zápis elektrónovej konfigurácie (napr. pre sodík) potom bude:

$$1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^1.$$

Každá podvrstva je daná svojím hlavným kvantovým číslom ($n = 1, 2, 3$), za ním nasleduje písmeno odpovedajúce orbitálnemu kvantovému číslu podvrstvy. Horný index za písmenom udáva počet elektrónov v danej podvrstve. Napr., atóm sodíka teda obsahuje v podvrstvách $1s$ ($n = 1, l = 0$) a $2s$ ($n = 2, l = 0$) po dva elektróny, v podvrstve $2p$ ($n = 2, l = 1$) šesť elektrónov a v podvrstve $3s$ ($n = 3, l = 0$) jeden elektrón.

Dôsledkom Pauliho vylučovacieho princípu je obmedzenie počtu elektrónov v atómovej vrstve. Pre vrstvu s hlavným kvantovým číslom n :

$$l = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l \quad m_s = \pm \frac{1}{2}.$$

Maximálny počet elektrónov v tejto vrstve potom bude:

$$N = \sum_{l=0}^{n-1} 2 \cdot (2l + 1) = \sum_{l=0}^{n-1} 4l + 2 = \frac{n}{2} (4(n - 1) + 2 + 4 \cdot 0 + 2) = 2n^2.$$

Ak napíšeme chemické prvky v poradí podľa ich atómového čísla (počet elektrónov), opakujú sa prvky s podobnými chemickými a fyzikálnymi vlastnosťami v pravidelných intervaloch, pretože závisia od periodicky sa opakujúceho počtu elektrónov vo vonkajšej vrstve (1 - 8). Toto empirické zistenie, známe ako **periodický zákon**, prvýkrát formuloval **Mendelejev** v roku 1869.

9 Jadro atómu

9.1 Úvod

Z pozorovaní rádioaktívnych látok vyplynulo, že aspoň niektoré jadrá musia mať vnútornú štruktúru, teda musí ich tvoriť súbor ešte jednoduchších častíc.

Keďže už bolo známe, že jadro atómu je nositeľom celého jeho kladného náboja, fyzici sa snažili nájsť najmenšiu kladne nabitú časticu, akýsi "kladný elektrón". To sa podarilo Rutherfordovi, ktorý našiel najmenšiu kladnú časticu s hmotnosťou skoro rovnou hmotnosti atómu vodíka, muselo teda ísť o vodíkové jadro. Jej elektrický náboj sa presne rovná náboju elektrónu, ale je kladný a jeho hmotnosť je 1836,11-krát väčšia ako hmotnosť elektrónu. Túto časticu nazval Rutherford **protón** (z gréčtiny: prvý), pretože je najľahšia a tvorí jadro prvého prvku periodickej tabuľky - vodíka.

Jadrá, ktoré je možné pokladať za hlavnú časť atómov, sa vzájomne líšia svojou hmotnosťou a veľkosťou kladného náboja, ktorá sa dá vyjadriť ako n -násobok elementárneho náboja. Moseley prišiel s myšlienkou, že číslo n sa pri každom posune v periodickej tabuľke prvkov o jeden prvok ďalej zvyšuje o jednotku. Vodík - prvý prvok v tabuľke, má jadro, ktoré tvorí jediný protón, teda $n=1$, pre hélium - druhý prvok, $n=2$, nasledujúci prvok - lítium má $n=3$, atď. Číslo n nazval Moseley **atómovým číslom** prvku (dnes sa užíva názov **protónové číslo**) a označuje sa Z . Ak usporiadame prvky podľa ich rastúceho atómového čísla, bude každý prvok bez výnimky v jemu príslušnej skupine Mendelejevovej periodickej tabuľky prvkov a ak majú dva prvky atómové čísla líšiace sa o jednotku, nemôže medzi nimi existovať žiaden ďalší dosiaľ neznámy prvok. Čoskoro bolo tiež zrejmé, že tak ako záporné elektrické náboje sú presnými násobkami náboja elektrónu, všetky kladné náboje sú presnými násobkami náboja protónu. Aby sme dostali výsledok zhodný s pozorovaním, je treba okrem protónov ešte uvažovať v jadre častice, ktoré majú hmotnosť ako protón, nulový náboj a poločíselný spin. Pre takúto elektricky neutrálnu časticu sa ujal názov **neutrón**. K objavu neutrónu došlo v roku 1932. Tým bola vyriešená otázka zloženia jadra - **jadro sa skladá z protónov a neutrónov**.

9.2 Hmotnosť jadra, väzbová energia

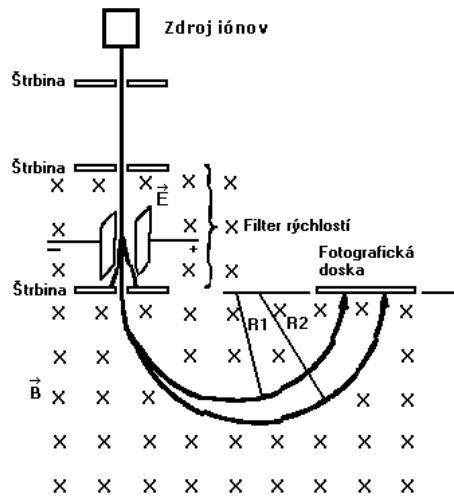
Počet protónov v jadre sa vyjadruje protónovým (atómovým) číslom Z , počet všetkých častíc jadra - teda protónov a neutrónov, ktoré sa jedným slovom nazývajú nukleóny (nukleus - jadro), sa vyjadruje **hmotnostným číslom** A . Ak poznáme hmotnosti protónu a neutrónu - m_p , m_n , **hmotnosť jadra** m_j

vypočítame:

$$Zm_p + (A - Z)m_n = m_j, \quad (9.1)$$

kde rozdiel $A - Z$ určuje počet neutrónov v jadre.

Takto vypočítanú hodnotu potom možno porovnať s nameranou hodnotou hmotnosti jadra. Na meranie hmotností nabitých častíc, a teda i atómových jadier, slúži tzv. hmotnostný spektrometer. Jeho schéma je na Obr. 9.1. Dvojica štr-



Obr. 9.1

bín kolimuje zväzok kladných iónov (jadier), aby všetky leteli v jednom smere, potom jadrá prechádzajú filtrom rýchlosti. Ten sa vytvára homogénnymi elektrickými a magnetickými poľami, pričom vektor intenzity elektrického poľa a vektor indukcie magnetického poľa sú na seba kolmé a sú kolmé i na zväzok iónov. Elektrické pole s intenzitou veľkosti E pôsobí na zväzok s nábojom q silou veľkosti qE a magnetické pole s indukciou veľkosti B silou veľkosti Bqv , kde v je rýchlosť kladných iónov. Smery síl sú opačné, čím sa dosiahne, že k štrbine na druhom konci filtra dôjdu iba ióny, ktoré sa nevychýlili a tak všetky majú rovnakú rýchlosť, pre ktorú z rovnosti veľkosti sily elektrického a magnetického poľa máme $v = \frac{E}{B}$. Prejdúc štrbinou, ióny vojdú do homogénneho magnetického

poľa s indukciou kolmou na smer ich rýchlosti a budú sa teda pohybovať po kruhových dráhach, ktorých polomer (z podmienky rovnosti dostredivej a magnetickej sily) je rovný $R = \frac{mv}{qB}$. Keďže q , B a v poznáme, umožňuje meranie R určiť hmotnosť m iónu.

Presné merania hmotnosti jadier ukázali, že ich hmotnosť m je vždy menšia, ako je hmotnosť vypočítaná podľa (9.1) a

$$Zm_p + (A - Z)m_n - m_j = \Delta m,$$

je tzv. **hmotnostný schodok**.

Zo špeciálnej teórie relativity si pamätáme ekvivalenčný vzťah medzi energiou a hmotnosťou, takže hmotnostnému schodku bude prislúchať energia:

$$\Delta E = \Delta mc^2.$$

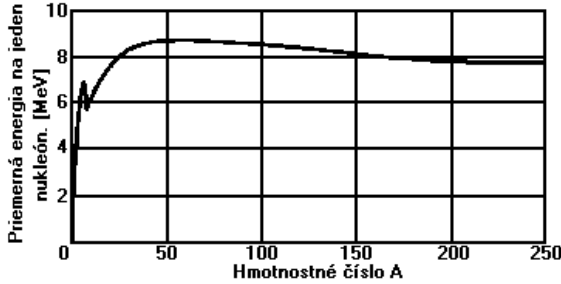
Táto energia je spotrebovaná na to, že jadro drží pokope, je to tzv. **väzbová energia**. Sila, ktorá drží spolu kladné protóny a elektricky neutrálne neutróny musí byť silnejšia ako je elektrostatické odpudzovanie medzi protónmi, je to jedna zo základných síl - interakcií v prírode, tzv. **silná sila**. Ako hovorí jej názov, je to najsilnejšia sila v prírode, ale má veľmi krátky dosah, práve taký, ako je rozmer jadra, takže ak opustíme jadro, túto silu už nepozorujeme. Pri určovaní rozmerov jadra (pomocou rozptylových experimentov s elektrónmi, podobných Rutherfordovmu s α časticami) sa zistilo, že objem jadra je vždy úmerný počtu nukleónov, ktoré obsahuje, t.j. hmotnostnému číslu A . Ak je polomer jadra R , objem je $(4/3)\pi R^3$ a R^3 je tak úmerné A . Tento súvis sa obvykle uvádza v opačnom tvare:

$$R = R_0 A^{1/3}, \quad R_0 \approx 1,3 \cdot 10^{-15} \text{ m}.$$

Polomery jadier majú veľkosť rádovo 10^{-15} až 10^{-14} m, čo je aj dosah silnej interakcie.

Zo známych hodnôt hmotnosti jadra a jeho rozmerov môžeme vypočítať hustotu jadrovej hmoty ako podiel hmotnosti a objemu. Vychádza číslo rádu 10^{17} kg/m³, čo je obrovská hustota.

Vrátíme sa teraz k väzbovej energii, bude nás zaujímať jej veľkosť. Najprv zavedieme niektoré nové jednotky, ktoré sa používajú v mikrosvete. Unifikovaná hmotnostná jednotka u je 1/12 hmotnosti jadra uhlíka $^{12}_6\text{C}$, $1u = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg. Jednotkou energie je 1 elektrónvolt a jeho násobky. Elektrónvolt je energia, ktorú získa jeden elektrón, ak v pozdĺžnom elektrostatickom poli prejde medzi dvomi bodmi, medzi ktorými je potenciálový rozdiel jeden volt, $1\text{eV} = 1,602 \cdot 10^{-19}$ J.

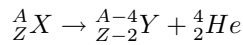


Obr. 9.2

Používajú sa násobky napr. $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$. Energia odpovedajúca jednej unifikovanej hmotnostnej jednotke $E(1u) = m(1u)c^2 = 938,1 \text{ MeV}$. Na Obr. 9.2 je závislosť väzbovej energie pripadajúcej na jeden nukleón jadra od hmotnostného čísla. Z tohto obrázka je vidieť, že veľkosť väzbovej energie pripadajúcej na jeden nukleón narastá až po nasýtenú hodnotu, ktorú nadobudne pomerne rýchle, a má hodnotu asi 8 MeV . Takouto energiou je v priemere držaný v jadre jeden jeho nukleón. Ak túto energiu prepočítame do jednotiek SI, dostaneme hodnotu $8 \cdot 10^{14} \text{ J/kg}$, pričom napr. teplo získané spálením 1 kg benzínu je asi miliónkrát menšie.

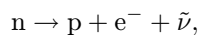
9.3 Prirodzená rádioaktivita

Prirodzená rádioaktivita (rádioaktívna premena) je jav, kedy sa prvok samovoľne mení na iný prvok, teda mení sa aspoň jedno z čísel A a Z . Vieme, že sú dva druhy rádioaktivity - α a β . Pri α rádioaktivite sú z jadra vyžarované jadrá hélia, ktoré sa skladajú z dvoch protónov a dvoch neutrónov, teda v tomto prípade sa mení aj hmotnostné číslo - znižuje sa o 4, aj protónové číslo, ktoré sa znižuje o 2:



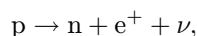
β rádioaktivita je:

1. Premena neutrónu v jadre na protón:



ktorá musí byť sprevádzaná vznikom zápornej častice, aby bol splnený zákon zachovania náboja. Tou časticou je elektrón. Navyiac, ako sa ukázalo z energetického rozdelenia, musí tu vzniknúť ešte jedna častica, ktorá unáša energiu, a tou je neutrálne antineutríno. V tomto prípade hmotnostné číslo sa nemení a protónové vzrastá o 1.

2. Premena protónu v jadre na neutrón:



pričom vzniká antičastica elektrónu - pozitron a neutríno. Opäť sa hmotnostné číslo nemení a protónové číslo teraz klesá o 1.

*Stretli sme sa tu s antičasticami. **Antičastice** majú rovnakú hmotnosť a spin ako ich odpovedajúce častice, ale majú opačný náboj a niektoré ďalšie vlastnosti popísané kvantovými číslami, o ktorých sme nehovorili. Prvýkrát ich teoreticky predpovedal Dirac v 30. rokoch, keď riešil Schrödingerovu rovnicu pre relativistický elektrón - tzv. Diracovu rovnicu, a získal pre energiu (a teda aj hmotnosť) dve riešenia, jedno z nich záporné a toto pripísal existencii antičastíc. Keď sa stretne častica so svojou antičasticou, dôjde k ich anihilácii, to znamená, že častice prestanú existovať a vzniká energetické elektromagnetické žiarenie. Deje sa to presne v zmysle Einsteinovej relativistickej rovnice $E = mc^2$, ktorá vyjadruje ekvivalenciu medzi hmotnosťou a energiou.*

Rádioaktívna premena sa vyznačuje ešte niečím novým - nie je zaň zodpovedná žiadna zo základných interakcií, o ktorých sme hovorili doteraz, ale ďalšia - štvrtá a posledná zo základných síl prírody - tzv. **slabá interakcia**. Táto interakcia je slabšia ako silná i ako elektromagnetická (preto jej názov) a má extrémne krátky dosah, ešte kratší ako silná. Je v prírode zodpovedná za rozpady. Rádioaktívna premena je dej, ktorý sa týka mikrosвета - jadra atómu, teda sa tu stretávame s javom, ktorý sa dá popísať len podľa kvantovej mechaniky. To znamená, že budeme vedieť vypočítať iba pravdepodobnosť toho, že sa dané jadro v danom čase premení.

Za elementárny časový interval dt z pôvodných N jadier ubudne premenou dN jadier, takže možno písať:

$$-dN = \lambda N dt,$$

kde λ je charakteristika daného rádioaktívneho prvku, tzv. **konštanta premeny**. Integrovaním tohto vzťahu od pôvodných N_0 jadier na začiatku merania po konečný počet N nepremených jadier v čase t dostávame **zákon premeny**

v tvare:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Konštanta λ vyjadruje pravdepodobnosť, že sa jadro premení za jednotku času. Iná konštanta rádioaktívnej látky je jej **doba polpremeny** $T_{1/2}$ - je to taký časový interval, počas ktorého sa premení práve polovica pôvodného množstva látky:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}},$$

odkiaľ máme súvis doby polpremeny s konštantou premeny:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Takže napr. ak máme rádioaktívnu látku s polčasom premeny 5 hodín, to znamená, že každé jadro má 50% pravdepodobnosť, že sa premení počas 5 hodín a polovica pôvodného počtu jadier sa za 5 hodín premení, za ďalších 5 hodín je to podobné - opäť sa premení polovica nepremených jadier (teda za 10 hodín sa premenia nie všetky jadrá, ale iba 75% pôvodných jadier). Treba si na tomto mieste ešte uvedomiť, že každé nepremené jadro má v tomto prípade 50% pravdepodobnosť premeny, ale že v žiadnom prípade o konkrétnom jadre nevieme povedať, či sa premení alebo nie - to je tá "principiálna" pravdepodobnosť z kvantovej mechaniky.

9.4 Jadrové reakcie

Kým chemické reakcie sú interakcie atómov a molekúl, pri ktorých sa premiestňujú elektróny, rádioaktívne premeny, ako sme videli, znamenajú emisiu častíc z jadra alebo zmenu povahy častíc vo vnútri jadra. Takéto deje sa nazývajú **jadrové reakcie** a odohrávajú sa pri nich oveľa intenzívnejšie energetické zmeny ako pri chemických reakciách. Rádioaktivita je samovoľná jadrová reakcia. Je dosť možné, že keby nebolo aspoň niekoľkých samovoľných jadrových reakcií, ktoré sa odohrávajú bez akéhokoľvek ľudského podnetu či zásahu, nikdy by sme neboli prišli na existenciu takýchto javov. Prvým, kto vyvolal jadrovú reakciu v laboratóriu bol Rutherford. Spôsobil premenu dusíka ($A = 14$), ktorý sa zlúčil s nalietačujúcim héliom ($A = 4$) a vznikol tak kyslík ($A = 17$) a vodík ($A = 1$). Táto reakcia bola zviditeľnená pomocou hmlovej komory - prvého dráhového detektora častíc, kde elektricky nabitú časticu zanechávajú stopu, pretože pozdĺž ich dráhy vznikajú v nasýtenej pare kvapôčky.

Štiepenie jadier a syntéza jadier. Pokles krivky väzbovej energie pri vysokých a nízkych hmotnostných číslach (Obr.9.2) má veľmi dôležité dôsledky. Jej pokles pri vysokých hmotnostných číslach hovorí, že nukleóny sú k sebe viac viazané, ak sú rozdelené v dvoch jadrách so stredne veľkými hmotnostnými číslami, než ako keby boli všetky spolu v jednom jadre s vysokým hmotnostným číslom. To znamená, že ak sa jedno jadro s vysokým hmotnostným číslom rozštiepi na dve jadrá - fragmenty so stredne veľkými hmotnostnými číslami, môže sa uvoľniť energia. Toto je dôvod štiepenia jadier. Uvoľnenú energiu možno využiť v jadrových reaktoroch produkujúcich energiu, ktorá dnes uspokojuje značnú časť svetovej spotreby energie. Problematická je ale otázka bezpečnosti (značné obavy vyvolali havárie v jadrových elektrárnach, najmä černoobylská havária v roku 1986) a otázka likvidácie odpadu - štiepných produktov, ktoré sú nebezpečne rádioaktívne. Ako prirodzená rádioaktivita, tak aj jadrové štiepenie sa týka jadier s veľkými hmotnostnými číslami, ktoré sa menia na jadrá so stredne veľkými hmotnostnými číslami a väčšou stabilitou, pričom úbytok hmotnosti sa mení na energiu, ktorá je uvoľňovaná. Ak sa ostreľuje jadro uránu ($A = 235$) pomalým neutrónom, z každého rozštiepeného jadra sa uvoľňujú dva, tri pomalé neutróny, ktoré potom štiepia ďalšie jadrá uránu a dochádza takto k reťazovej reakcii, pri ktorej sa uvoľňuje oveľa viac energie ako pri prirodzenej rádioaktivite. Väzbová energia na nukleón fragmentov je asi 8,5 MeV, väzbová energia na nukleón pôvodného jadra je 7,6 MeV. Rozdiel energie pre jeden nukleón je teda 0,9 MeV, čo je pre približne 240 nukleónov 216 MeV. Približne takáto energia sa uvoľní pri štiepení jedného jadra uránu.

Pokles krivky pri nízkych hmotnostných číslach hovorí, že môže byť tiež uvoľnená energia v prípade, ak z dvoch jadier s nízkym hmotnostným číslom fúziou vznikne jedno jadro s väčším (stredne veľkým) hmotnostným číslom (t.j. pri vysokej teplote splynú v jedno jadro). Aj tento jav predstavuje premenu smerom k jadrám so stredne veľkými hmotnostnými číslami a s väčšou stabilitou. Aj tu klesá celková hmotnosť a uvoľňuje sa energia. Pozrime sa na to na príklade jadra deuterónu (ťažký vodík - $A = 2$, jeden protón, jeden neutrón), ktorý sa spojí s ďalším deuterónom a vytvorí jadro hélia ($A = 4$, dva protóny a dva neutróny). Hmotnosť deuterónu je 2,014 hmotnostných jednotiek, dvoch jeho jadier je 4,028. Hmotnosť hélia, ktoré má zvlášť silnú väzbu, je iba 4,0026 u . Strata hmotnosti pri zlúčení je teda 0,0254 u , čo je 0,63% pôvodnej hmotnosti dvoch jadier deuterónu, kým pri štiepení uránu-235 vzniká strata len 0,056% pôvodnej hmotnosti. Z určitej hmotnosti deuterónu môže teda syntézou vzniknúť asi 11-krát viac energie ako štiepením uránu rovnakej hmotnosti.

Ukázalo sa, že energia vznikajúca jadrovou syntézou, má zásadný význam pre pochopenie Vesmíru. Vo väčšine hviezd neustále prebieha syntéza vodíka, ktorá

môže slúžiť ako zdroj energie počas miliárd rokov.

10 Elementárne častice a sily, ktoré na ne pôsobia

10.1 Ako sa skúma mikrosvet

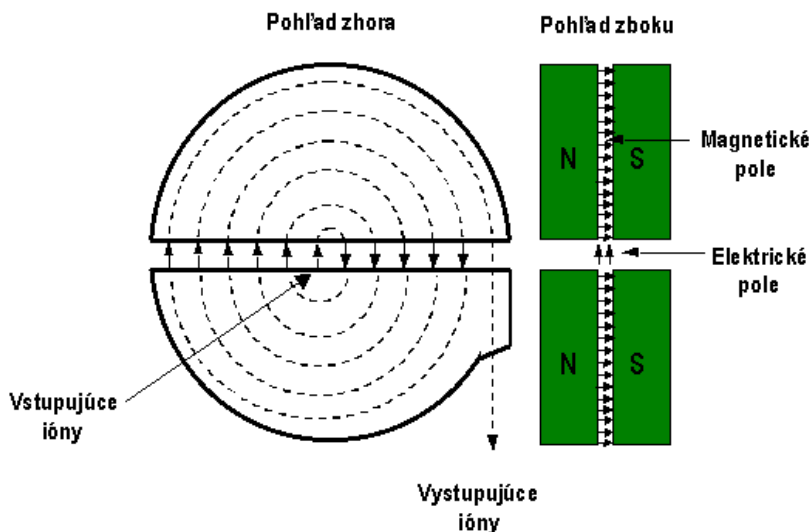
Pri skúmaní mikrosвета prechádzame do rozmerov menších ako 10^{-14} m, ktoré sú primálne na to, aby sme ich mohli priamo pozorovať našimi zmyslami, preto si najprv povieme niečo o spôsoboch skúmania týchto oblastí. Základný spôsob predstavuje Rutherfordov pokus ostreľovania tenkej kovovej fólie α časticami. Aby zistil štruktúru atómu, musel sa Rutherford „pozrieť“ do jeho vnútra a použil na to malú časticu s dosť veľkou energiou, ktorú mal k dispozícii z rádi-oaktívneho rozpadu. Teda princíp je taký, že **terčik**, ktorý je v pokoji, sa ostreľuje **nalietavajúcou časticou**, ktorá akoby bola vystrelená z nejakého praku. Platí pritom pravidlo, že do čím menších rozmerov sa chceme dostať, tým väčšiu hybnosť musí mať „strela“. Toto vyplýva z Heisenbergových relácií neurčitosti, pomocou ktorých môžeme získať veľmi jednoducho niektoré zaujímavé odhady. Pre neurčitosť polohy a hybnosti platí súvis: $\Delta r \Delta p \geq \hbar$. Za neurčitosť hybnosti možno uvažovať rozdiel hybností nalietavajúcej a odrazenej častice - tzv. prenos hybnosti. Potom na skúmanie oblastí čoraz menších rozmerov $r \geq \Delta r$ potrebujeme odpovedajúco čoraz väčšie prenosi hybností $\Delta p \geq \frac{\hbar}{r}$. Ak teda chceme skúmať atóm ($r \approx 10^{-10}$ m), potrebujeme prenos hybnosti $\Delta p \approx 0,000002$ GeV/c, pre štúdium štruktúry jadra ($r \approx 10^{-15}$ m) už potrebujeme prenosi hybnosti $\Delta p \approx 0,2$ GeV/c a ak chceme zisťovať štruktúru nukleónu ($r \approx 10^{-16}$ m), je potrebných (2 – 3) GeV/c. Teda čím je **väčší rozdiel hybností**, tým **menšie oblasti priestoru** môžeme skúmať.

K realizácii potrebujeme dve základné veci - mať dostatočne rýchlu nalietavajúcu časticu (s dostatočne veľkou hybnosťou) a zariadenie, pomocou ktorého budeme môcť nejakým spôsobom sledovať, čo sa udialo, keď nalietavajúca častica zasiahla terčik.

Na urýchľovanie nalietavajúcich častíc slúžia **urýchľovače**. Podľa tvaru dráhy, pozdĺž ktorej je častica urýchľovaná, sa delia na lineárne a kruhové. Elektricky nabitú časticu sa v nich urýchľujú pri prechode pozdĺžnym elektrostatickým poľom. V röntgenovej trubici (1895) boli elektróny urýchlené potenciálom okolo 1000V. Keď sa elektróny spomalili dopadom na antikatódu, emitovali elektromagnetické žiarenie (tento jav sa využíva v televíznej obrazovke). Ak sa trubica predĺži, elektróny môžu byť urýchľované pozdĺž celej jej dĺžky na vyššie energie (**lineárny urýchľovač**). Súčasné technológie umožňujú zvýšiť energiu elektrónu asi o 7 MeV na každý meter trubice. Napr. lineárny urýchľovač v Stanforde v

Kalifornii je dlhý 2 míle a elektróny tak môžu byť urýchlené na energiu nad 20 GeV. Takéto elektróny môžu „skúmať“ vnútornú štruktúru protónov.

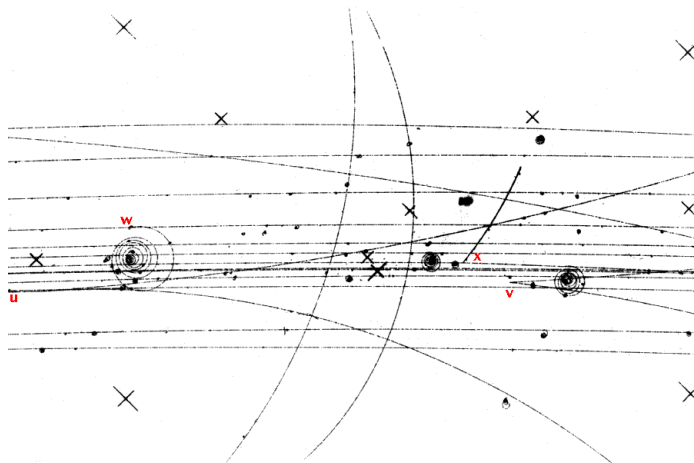
Keďže protóny sú ťažšie ako elektróny, ich urýchľovanie na vyššie energie si



Obr. 10.1

vyžaduje väčšie vzdialenosti, pozdĺž ktorých môže urýchľovacia sila pôsobiť. Lawrence urýchlil protóny pozdĺž dráhy tvaru kružnice (kruhový urýchľovač). Magnetické pole zakrivovalo ich dráhu pozdĺž jednej polkružnice a elektrické pole na prechode medzi polkružnicami ich lineárne urýchlilo, potom ich dráha bola opäť zakrivená magnetickým poľom pozdĺž druhej polkružnice. Protóny takto mnohokrát obiehali až sa urýchlili na energie okolo 1 MeV. Toto klasické zariadenie sa nazýva **cyklotrón** Obr.10.1 .

Čo sa týka zariadení - tzv. **detektorov**, pomocou ktorých môžeme „pozorovať“, čo sa udialo (úvodzovky sú tam preto, aby sme si uvedomili, že v žiadnom prípade nič nepozorujeme priamo, ale skúmame iba nejaké stopy, ktoré zanechali častice). V dráhovom detektore sa zviditeľňuje dráha nabitých častíc. Prvým dráhovým detektorom bola **hmlová komora**, ďalším dráhovým detektorom, ktorý umožnil množstvo významných objavov, je **bublinová komora**. V nej



Obr. 10.2

je dráha častice zviditeľnená bublinkami, ktoré vznikajú v prehriatej kvapaline (Obr. 10.2). Nabité častice pozdĺž svojej dráhy ionizujú atómy kvapaliny, ktoré sa stávajú zárodkami bubliniek (varu). Keď tieto bublinky narastú do pozorovateľnej veľkosti, celá komora sa fotografuje viacerými fotoobjektívmi a na filmoch ostane zachovaná rovinná informácia-priemety skutočnej dráhy častice do viacerých rovín, z ktorých sa potom určia parametre dráhy častice v priestore (napr. krivosť, dĺžka dráhy). Celá komora je uložená v magnetickom poli, ktoré spôsobí, že dráhy častíc (všetky majú elektrický náboj) sa zakrivia. Zo smeru zakrivenia sa určí, či častica nesie kladný alebo záporný elektrický náboj a z jeho veľkosti, ktorá je nepriamo úmerná hybnosti častice, je možné získať hybnosť. V prípade, že nalietajúca častica sa zrazila s časticou kvapaliny - terčíkom a interagovala s ňou, je na filmoch zachovaná informácia o interakcii, ktorá sa ďalej spracúva až po fyzikálny výstup - aké častice vznikli a aké majú vlastnosti. Je treba si uvedomiť, že bublinová komora poskytuje síce úplnú informáciu o interakcii, ale celý postup spracovania až po fyzikálny výstup, kde je treba získať dostatočne vysokú štatistiku, je časovo veľmi náročný.

V súčasnosti sa používajú **kombinované dráhové a elektronické detektory** (Obr. 10.3), ktoré umožňujú efektívne študovať aj veľmi zriedkavé javy.



























Obr. 10.3

10.2 Elementárne častice

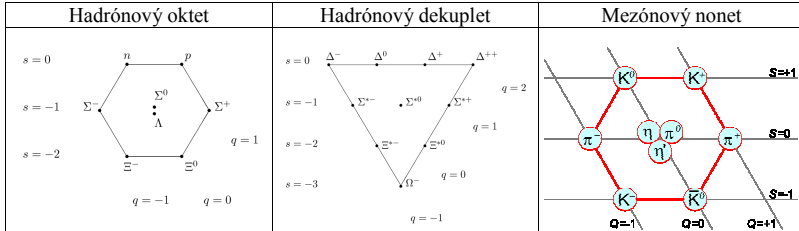
Z častíc, o ktorých sme doteraz hovorili, sú elektróny a neutrína (a samozrejme aj ich antičastice) naozaj elementárne častice, to znamená, že **nemajú vnútornú štruktúru**. Patria do skupiny elementárnych častíc, ktoré sa nazývajú **leptóny** (z gréckeho - malý) a dajú sa rozdeliť na tri generácie (Obr. 10.4). Prvú generáciu tvoria elektrón a elektrónové neutríno, druhú tvoria mión (je to častica, o ktorej by sme mohli povedať, že je to o niečo ťažší elektrón) so svojim neutrínom a tretiu tau (to už je naozj „ťažký elektrón“ - jeho hmotnosť je väčšia ako je hmotnosť protónu) so svojim neutrínom. Tieto častice, keďže sú elementárne, sa teda spontánne nemenia na žiadne jednoduchšie častice, dochádza iba k premenám nestabilných ťažších leptónov - tau a mionu na najľahší elektrón, ktorý je stabilný. Z týchto častíc náš dnešný Vesmír obsahuje iba elektróny a elektrónové neutrína. Pozitróny a antineutrína vznikajú iba pri niektorých rádioaktívnych rozpadoch a ťažšie leptóny a ich neutrína vznikajú iba v laboratórnych podmienkach. Všetky leptóny majú poločíselný spin a teda musia spĺňať Pauliho princíp a ich ďalšou významnou spoločnou vlastnosťou je, že nikdy neinteragujú prostredníctvom silnej interakcie, jednoducho ju necítia, interagujú slabo a pokiaľ majú elektrický náboj, aj elektromagneticky.

Ostatné častice, napríklad protóny a neutróny, ktoré sa nachádzajú v jadrách atómov, majú vnútornú štruktúru, teda nie sú elementárne v takom zmysle ako leptóny. A tak ako je jadro držané pokope silnou interakciou, všetky tieto častice interagujú aj prostredníctvom silnej interakcie. Nazývajú sa spoločným názvom **hadróny** (z gréckeho - silný). Postupne sa ukázalo, že takýchto častíc je veľké množstvo. Začiatkom šesťdesiatych rokov začal Gell-Mann zaraďovať tieto častice do symetrických mnohouholníkov s 8 (oktet), 9 (nonet) alebo 10 členmi (dekuplet) podľa niektorých ich zachovávajúcich sa charakteristík. Vytvoril tak triedy častíc a vytvoril tak pre ne obdobu periodickej tabuľky prvkov (Obr. 10.5).

Toto však nestačilo, lebo ani Mendelejevova tabuľka prvkov nebola uspokojivo vysvetlená, kým sa nepodarilo popísať vnútornú stavbu atómov a odkryť význam rozdielu v usporiadaní elektrónov v jednotlivých hladinách. Tak aj Gell-Mannovi sa zdalo, že hadróny musia mať vnútornú štruktúru, ktorá by vysvetľovala, prečo sa delia do jednotlivých skupín. Pokúsil sa teda nájsť skupinu častíc, ktoré by boli elementárne a mali také vlastnosti, že ich vhodným zostavením by sa dali získať všetky hadróny s ich známymi vlastnosťami - napr. jedna kombinácia by dala protón, druhá neutrón, ďalšia pión, atď. Pritom ale veľmi rýchle

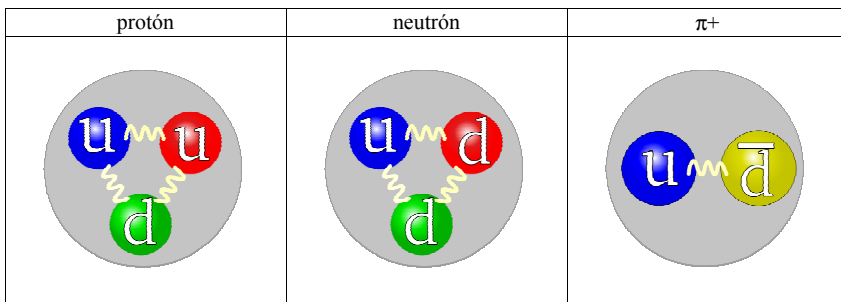
Rodina	Častica	Náboj	Hmotnosť (GeV/c ²)	
Prvá generácia	Kvarky	Horný (Up)   	$\frac{2}{3}$	0.330
		Dolný (Down)   	$-\frac{1}{3}$	0.333
	Leptóny	Elektrón 	-1	5.11×10^{-4}
		Elektrónové neutrino 	0	$< 1.4 \times 10^{-4}$
Druhá generácia	Kvarky	Pôvabný (Charm)   	$\frac{2}{3}$	1.65
		Podivný (Strange)   	$-\frac{1}{3}$	0.486
	Leptóny	Mión 	-1	0.106
		Miónové neutrino 	0	$< 2.5 \times 10^{-4}$
Tretia generácia	Kvarky	Vrchný (Top)   	$\frac{2}{3}$	≈ 188
		Spodný (Bottom)   	$-\frac{1}{3}$	4.5
	Leptóny	Tau 	-1	1.78
		Tau neutrino 	0	< 0.035

Obr. 10.4



Obr. 10.5

zistil, že túto úlohu nemôže úspešne vyriešiť, ak sa má držať zásady, že každá elementárna častica musí mať celočíselný náboj (ako majú všetky známe častice). Prišiel na to, že častice, z ktorých sú zložené hadróny, musia mať náboje zlomkové - tretinové z náboja elektrónu či protónu. Navrhol tri takéto častice, z ktorých by sa skladali hadróny - baryóny (ako protón či neutrón) by sa skladali z troch častíc a mezóny (ako pión) by sa skladali z dvoch. Pomenoval ich **kvarky** a stanovil tri druhy - **u** (up - hore) s nábojom $+2/3$, **d** (down - dole) s nábojom $-1/3$ a **s** (strange - podivný). Potom napr. protón sa skladá z 2 u-kvarkov a 1 d-kvarku, neutrón z 2 d-kvarkov a 1 u-kvarku. Mezóny sa skladajú z kvarku a antikvarku, napr. kladný pión z u-kvarku a d-antikvarku (Obr. 10.6) Dnes sú



Obr. 10.6

známe tri dvojice kvarkov (podobne ako tri dvojice leptónov), ďalšie tri kvarky sú **c** (charm - pôvabný), **b** (bottom - spodný) a **t** (top - vrchný) (Obr.10.4).

Nikdy sa nepodarilo pozorovať samostatný kvark a zdá sa, že to vyplýva zo samotnej povahy silnej interakcie, ktorá drží kvarky v hadrónoch. Silná interakcia má totiž takú zvláštnu vlastnosť, že narastá s rastom vzdialenosti častíc, medzi ktorými pôsobí (podobne ako narastá pružná sila pri naťahovaní pružiny). Ostreľovanie protónov vysokoenergetickými elektrónmi na začiatku 70. rokov poskytlo dôkazy, že vo vnútri protónov sú rozptyľujúce body, ktoré odpovedajú kvarkom a že kvarky vo vnútri protónov naozaj existujú.

10.3 Sily v mikrosvete

Keďže gravitačná sila medzi elementárnymi časticami je zanedbateľne slabá, v mikrosvete sa prejavujú tri zo štyroch základných silových pôsobení (interakcií) prírody - elektromagnetická, slabá a silná. Najslabšia z nich je slabá a najsilnejšia silná interakcia. Ďalší podstatný rozdiel medzi nimi je ten, že kým elektromagnetická interakcia má nekonečný dosah, silná a slabá majú veľmi krátky dosah rovný rozmeru jadra - asi 10^{-15} m. Bola prijatá predstava, že každý typ interakcie medzi dvomi časticami prebieha prostredníctvom vzájomnej výmeny iných častíc - tzv. výmenných častíc danej interakcie (nositeľov interakcie). Trochu si priblížime túto predstavu.

Je to niečo podobné, ako keď dvaja ľudia sediaci každý v jednom člne pokojne sa vznášajúcom na pokojnej hladine jazera, si začnú naraz vzájomne prehadzovať lopty. Dôsledkom bude, že člny sa pohnú smerom od seba - teda došlo tu k silovému pôsobeniu bez vzájomného dotyku, prostredníctvom prehadzovanej (vymieňanej si) lopty.

Z princípu neurčitosti vyplýva jeden veľmi prekvapujúci záver, že je možné porušiť zákon zachovania energie „zapožičaním“ množstva energie ΔE , pokiaľ sa vráti do uplynutia časového intervalu Δt , pričom súvis medzi časom a „zapožičanou“ energiou je daný princípom neurčitosti:

$$\Delta t = \frac{\hbar}{\Delta E}.$$

Táto energia sa môže využiť na kreáciu častíc - energia sa premení na hmotnosť Δm podľa Einsteinovho ekvivalenčného vzťahu:

$$\Delta E = \Delta mc^2,$$

takže časový interval, počas ktorého musí byť energia vrátená, je potom:

$$\Delta t = \frac{\hbar}{\Delta mc^2}.$$

Keďže energia musí byť vrátená predtým ako uplynie časový interval Δt , vytvorené častice žijú iba veľmi krátko - majú veľmi krátku dobu života a nazývajú sa **virtuálne častice**.

Môžeme približne určiť ako ďaleko od reálnej častice môže dôjsť virtuálna častica, ak sa pohybuje maximálne rýchlosťou svetla. Keďže po vzdialení sa do uplynutia časového intervalu Δt musí aj vrátiť späť, vzdialenosť určíme:

$$d = c \frac{\Delta t}{2}.$$

Ak budeme napríklad uvažovať, že reálnou časticou je protón a produkuje virtuálny pión, ktorého hmotnosť je $2,48 \cdot 10^{-28}$ kg, dostaneme pre dobu života hodnotu $\Delta t = 4,7 \cdot 10^{-24}$ s a pre vzdialenosť, kde sa až môže vzdialiť $d = 0,75 \cdot 10^{-15}$ m. Ako vidieť, virtuálny pión sa môže vzdialiť do vzdialenosti približne rovnej rozmerom jadier.

Ak budeme uvažovať dva protóny v jadre, potom si možno predstaviť, že jeden protón emituje virtuálny pión, ktorý sa priblíži k druhému protónu a ten ho bude absorbovať a následne bude opäť emitovať virtuálny pión, ktorý sa vráti k prvému protónu a ten ho absorbuje, takže energia sa vráti tak, ako to požaduje Heisenbergov princíp neurčitosti. Takto si protóny medzi sebou môžu **vymieňať virtuálne pióny**. Hideki Yukawa v roku 1934 vyslovil domnienku, že ak si dva protóny vzájomne vymieňajú pióny (mezóny), výsledkom tejto výmeny bude veľmi silná príťažlivá sila medzi protónmi. Podobne je tomu s neutrónmi. Táto sila musí mať veľmi krátky dosah, pretože sa nepozoruje mimo jadra. Predpovedaný pión bol objavený v roku 1947 Cecilom Powellom (Nobelove ceny: Yukawa - 1949, Powell - 1950).

Zásadný význam koncepcie „požičiavania“ energie na produkovanie virtuálnych častíc, ako to umožňuje princíp neurčitosti, tkvie v zovšeobecnení tejto myšlienky: všetky **interakcie** v prírode môžu byť spôsobené **vzájomnou výmenou virtuálnych častíc**.

Takými to časticami sú vždy častice s celočíselným spinom (bozóny). Pre elektromagnetickú interakciu sú týmito časticami **fotóny**, ktoré majú nulovú pokojovú hmotnosť a práve preto je dosah tejto interakcie neobmedzený. (Podobne by to malo byť pre gravitačné pole - jeho výmenná častica tzv. gravitón má mať tiež nulovú pokojovú hmotnosť pretože gravitácia má tiež neobmedzený dosah. Problémom je, že gravitón nebol doteraz pozorovaný pre spomínanú slabosť

tejto interakcie).

Môžeme si teda predstaviť, že protóny a neutróny v jadre si neustále medzi sebou vymieňajú pióny a tým vzniká vzájomné silové pôsobenie, ktoré ich drží pokope. My však už vieme, že ani protóny, ani neutróny nie sú elementárne častice, ale že sa skladajú z troch kvarkov, a ani pióny nie sú elementárne, ale keďže sú mezónmi, skladajú sa z dvojice kvark - antikvark. Takže ak sa dostávame do rozmerov vnútra protónu ($< 10^{-15}$ m) vyvstáva otázka, čo drží kvarky v hadrónoch - čo je silná interakcia na elementárnej úrovni. Túto otázku (a mnohé ďalšie) rieši **kvantová chromodynamika** - teória silných interakcií. Podľa nej je výmennou časticou silnej interakcie medzi kvarkami **gluón** a táto interakcia má takú zvláštnu vlastnosť, že je veľmi slabá pokiaľ sú kvarky blízko seba (napr. vo vnútri hadrónu), ale stáva sa veľmi silnou, ak sa snažíme kvarky od seba oddialiť. Možno si tu predstaviť analógiu so silou pružiny, ktorá tiež narastá s rozťahovaním pružiny. A je tu ešte jedna analógia: ak sa nám aj podarí vyvinúť dostatočnú silu na roztrhnutie pružiny, dva takto získané útržky budú opäť podobnými pružinami s dvomi koncami. Podobne, ak sa nám dostatočne energetickou nalietajúcou časticou podarí rozbiť hadrón, to čo vznikne budú opäť hadróny a kvarky ostanú naďalej v nich skryté. Kvantová chromodynamika zavádza ďalšiu vlastnosť kvarkov - tzv. **farbu**, pričom existujú tri rôzne farby a rôzne farby sa priťahujú (podobne ako náboje rôznych typov). Spomínané zvláštne vlastnosti silnej interakcie sú dané aj tým, že aj jej nositeľ gluón má farbu (na rozdiel od fotónu v prípade elektromagnetickej interakcie, ktorý nemá elektrický náboj).

Napr. protón je zložený z troch kvarkov rôznych farieb a navonok je farebne neutrálny (tri farby zmiešaním dajú neutrálnu - bielu farbu). Pozorovať môžeme iba **farebne neutrálné objekty** a to je dôvod, prečo nepozorujeme samostatný kvark.

Slabá interakcia je slabšia ako elektromagnetická, ak pôsobí na hranici svojho dosahu, teda na vzdialenosť rozmeru jadra. Ak ale sa interagujúce častice k sebe priblížia, intenzita slabej interakcie sa zvyšuje a pri vzdialenostiach $\approx 10^{-17}$ m sa stáva porovnateľnou s elektromagnetickou. V 70. rokoch bola navrhnutá teória, ktorá zjednocovala elektromagnetickú a slabú interakciu - tzv. **elektroslabá teória**. Nositeľom elektromagnetickej časti interakcie bol fotón a slabá časť zjednotenej interakcie mala mať dva elektricky nabité nositele a jeden elektricky neutrálny, všetky veľkej hmotnosti (krátky dosah tejto interakcie) - rádovo stokrát ťažšie ako protón. Tieto častice, tzv. **ťažké bozóny** W^+ , W^- , Z boli experimentálne objavené začiatkom 80. rokov, pričom snaha o ich objav bola motiváciou kvalitatívnej zmeny v experimente, boli produkované tzv. **protižeňné zväzky** vysokoenergetických častíc, takže už nie nalietajúca strela

narážajúca na nehybný terčik, ale dva zrážajúce sa zväzky nalietajúce oproti sebe, čo umožnilo značne zvýšiť energiu zrážky a tým pravdepodobnosť objavu takých hmotných častíc, ako boli predpovedané ťažké bozóny. Elektroslabá teória bola týmto potvrdená. Tento objav a jeho následné experimentálne potvrdenie bolo také významné, že ako teoretici Glashow, Weinberg a Salam, tak aj experimentálni fyzici Rubia a Van der Meer získali Nobelove ceny.

Štyri sily v prírode				
sila	pôsobí na	intenzita	dosah	sprostredkujúca častica
gravitačná	Všetky leptóny a hadróny	6×10^{-39}	neohraničený	gravitón
slabá	Všetky leptóny a hadróny	10^{-5}	$\approx 10^{-17}$ m	W^{\pm} a Z^0
elektromagnetická	Nabité leptóny a hadróny	1/137	neohraničený	fotón
silná	Všetky hadróny	1	$\approx 10^{-15}$ m	gluón

Obr. 10.7

Dnes teda poznáme štyri typy interakcií (Obr.10.7). Gravitačná interakcia je hybnou silou vo Vesmíre. Elektromagnetická interakcia drží elektróny v atómoch a silná nukleóny v jadrách. Slabá interakcia je zodpovedná za rozpady (a teda z nášho pohľadu nie je také dôležitá pre náš svet ako ostatné tri interakcie). Keďže, ako sme uviedli, existuje jediná elektroslabá interakcia, môžeme sa pýtať, prečo sú elektromagnetické a slabé aspekty tohto jediného javu také odlišné. Je tomu tak preto, lebo žijeme za nízkych teplôt. Keby bola teplota oveľa, oveľa vyššia ako je v dnešnom našom svete (ako skutočne bola v určitej vývojovej etape Vesmíru a ako dnes vieme simulovať v experimente s vysokoenergetickými protibežnými zväzkami), existovala by naozaj len jediná interakcia. S poklesom teploty sa oba aspekty od seba oddeľujú - jediná interakcia sa prejavuje v dvoch nápadne odlišných podobách. Opäť môžeme použiť analógiu: voda existuje v troch skupenstvách - ako kvapalina, ľad a para. Ľuďom neznalým nášho sveta by sa zdalo, že sú to tri úplne rôzne látky, medzi ktorými nie je žiaden súvis. Predpokladajme, že teplota by bola dostatočne vysoká, takže všetka voda by existovala iba v plynnom skupenstve, bola by teda viditeľne jedinou látkou s jediným súborom vlastností. Ak teplota klesne, časť pary skvapalnie a voda a para budú v rovnováhe. Takto máme dve rôzne látky s dvomi veľmi rozdielnymi

súbormi vlastností. Ak teplota klesne ešte nižšie, časť vody zamrzne a máme ľad, vodu a paru, všetko v rovnováhe, vzhľad a vlastnosti všetkých troch súčastí sú úplne odlišné. Napriek tomu všetky tri sú v podstate tou istou látkou.

Potvrdenie elektroslabej zjednocujúcej teórie nás povzbudzuje v našich ďalších zjednocovacích úvahách. Podľa týchto predstáv na počiatku Vesmíru (bezprostredne po tzv. veľkom tresku) bola nepredstaviteľne vysoká energia a v tomto okamžiku existovala jediná interakcia. S poklesom teploty (podľa našich merítkov veľmi rýchlym) sa oddelila ako samostatná interakcia gravitácia, ktorá s pokračujúcim poklesom teploty slabla. Potom sa oddelila silná interakcia a nakoniec slabá a elektromagnetická a takto v dnešnom (chladnom) svete máme štyri interakcie.

Použitá literatúra

Murla, M., Pekárek, S.: Physics I, Department of Physics FEE, CTU, Praha, 1992

Pekárek, S., Murla, M.: Physics II, Department of Physics FEE, CTU, Praha, 1994

Beiser, A.: Úvod do moderní fyziky, Academia, Praha 1978

Feynman, R., Leighton, R.B., Sands, M.: Feynmanove prednášky z fyziky, ALFA, Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava, 1980

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: Fyzika, VUT v Brne, Nakladatelství Vutium a Prometheus, Praha, 2001

Hajko, V., Daniel-Szabó, J.: Základy fyziky, Veda, Vydavateľstvo SAV, Bratislava, 1980

Hecht, E.: Physics, Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, California, 1994

Horák, Z., Krupka, F.: Fyzika, SNTL, ALFA, Praha, 1976

Close, F.: The Cosmic Onion, Quarks and the Nature of the Universe, Heinemann Education Books, Ltd., 1990

Isaev, P.S.: Obyknovennye, strannye, očarovannye, prekrasnye..., Energoatomizdat, 1995

Červeň, I.: Fyzika po kapitolách, FEI STU, Bratislava, 2005

<http://particleadventure.org/>

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html>

Obsah

1	Elektrostatické pole	3
1.1	Coulombov zákon	3
1.2	Intenzita elektrostatického poľa	4
1.3	Tok intenzity elektrostatického poľa, Gaussov zákon	7
1.3.1	Niektoré aplikácie Gaussovho zákona	10
1.4	Práca a potenciálna energia v elektrostatickom poli,	12
1.5	Pohyb nabitej častice v elektrickom poli	16
1.6	Energia sústavy nábojov, nabitého vodiča a elektrostatického poľa	18
1.7	Kapacita vodiča, elektrický kondenzátor	20
1.8	Dielektriká	22
2	Elektrický prúd v kovoch	29
2.1	Intenzita prúdu, hustota prúdu	29
2.2	Ohmov zákon, Jouleov zákon	31
2.2.1	Ohmov zákon	31
2.2.2	Jouleov zákon	34
2.3	Elektromotorické napätie	35
3	Magnetické pole	39
3.1	Indukcia magnetického poľa, pohyb náboja v magnetickom poli . .	39
3.2	Gaussov zákon magnetického poľa	41
3.3	Biotov - Savartov zákon	42
3.4	Zákon celkového prúdu (Ampérov zákon)	44
3.5	Sila pôsobiaca na vodič, ktorým tečie prúd, v magnetickom poli .	45
3.5.1	Sila pôsobiaca medzi dvomi rovnobežnými priamymi vo-	46
	dičmi	
3.5.2	Sily pôsobiace na prúdovú slučku, magnetický moment . .	47
3.6	Magnetické vlastnosti látok	48
4	Elektromagnetické pole	54
4.1	Elektromagnetická indukcia	54
4.2	Indukčnosť	56
4.3	Energia a hustota energie v magnetickom poli	59
4.4	Elektrický oscilačný obvod	62
5	Maxwellove rovnice	68
5.1	Zákon zachovania elektromagnetickej energie, Poyntingov vektor	72

6	Elektromagnetické vlnenie	74
6.1	Opis elektromagnetického vlnenia	74
6.2	Elektromagnetické spektrum	77
6.3	Vlnové vlastnosti elektromagnetického žiarenia	78
6.3.1	Youngov interferenčný pokus	78
6.3.2	Interferencia svetla na tenkej vrstve	80
7	Základy kvantovej mechaniky	84
7.1	Časticové vlastnosti elektromagnetického žiarenia	84
7.1.1	Žiarenie absolútne čierneho telesa	84
7.1.2	Fotoelektrický jav	88
7.1.3	Comptonov jav	90
7.2	Vlnové vlastnosti častíc	94
7.2.1	De Broglieho vlny, vlnovo-časticový dualizmus	94
7.2.2	Experimentálne potvrdenie de Broglieho hypotézy	95
7.2.3	Popis častice pomocou vlnového balíka	98
7.3	Heisenbergove vzťahy neurčitosti	100
7.4	Schrödingerova rovnica	102
7.4.1	Zostavenie Schrödingerovej rovnice	102
7.4.2	Častica v jednorozmernej, nekonečne hlbkej jame	105
8	Atóm	110
8.1	Úvod	110
8.2	Bohrov model vodíkového atómu	111
8.3	Výsledky kvantovomechanického popisu vodíkového atómu	115
8.4	Viacelektrónové atómy	117
9	Jadro atómu	119
9.1	Úvod	119
9.2	Hmotnosť jadra, väzbová energia	119
9.3	Prirodzená rádioaktivita	122
9.4	Jadrové reakcie	124
10	Elementárne častice a sily, ktoré na ne pôsobia	127
10.1	Ako sa skúma mikrosvet	127
10.2	Elementárne častice	131
10.3	Sily v mikrosvete	134