JAROSLAV VACHEK ○ MILAN BEDNAŘÍK ○
KAROL KLOBUŠICKÝ ○ JAN MARŠÁK ○
JOSEF NOVÁK ○ IVAN ŠABO

FYZIKA PRE 1. ROČNÍK GYMNÁZIÍ

SLOVENSKÉ
PEDAGOGICKÉ
NAKLADATEĽSTVO

BRATISLAVA

Autori © prof. RNDr. Jaroslav Vachek, CSc., RNDr. Milan Bednařík, CSc., RNDr. Karol Klobušický, RNDr. Jan Maršák, RNDr. Josef Novák, CSc., PaedDr. Ivan Šabo, 1984

Lektorovali: RNDr. Arnošt Hladík, CSc., RNDr. Július Šoltés

Translation © RNDr. Eva Tomanová, 1984
Preložené z českého originálu Fyzika pro 1. ročník gymnázia. Praha, SPN 1984
Illustrations © Josef Kubík, 1984
Koordinátori: RNDr. Oldřich Lepil, CSc., RNDr. Jan Maršák, RNDr. Eva Tomanová

Schválilo Ministerstvo školstva SSR dňa 7. 4. 1983 pod číslom 2311/1983-21 ako 1. vydanie učebnice vyučovacieho predmetu fyzika pre 1. ročník gymnázia.

Tretie vydanie (upravené), 1993.

ISBN 80-08-01841-0
ISBN 80-08-01447-4 (2. vyd.)

OBSAH

ÚVOD

FORMY A PRÍČINY MECHANICKÉHO POHYBU

ÚVOD

1. Obsah a metódy fyziky. Význam fyziky

Slovo fyzika pochádza zo starogréčtiny, kde *fyzis* znamenalo prírodu. Fyzika bola pôvodne náuka o prírode vôbec. Postupne, ako počet poznatkov o prírode narastal, oblasť fyzikálneho skúmania sa zužovala. Oddelili sa biologické vedy, ktoré skúmajú špecifické deje v živých organizmoch, ďalej vedy zaoberajúce sa zmenami v zložení látok (chémia) a iné prírodné vedy (astronómia, geológia, mineralógia a ďalšie).

Čím sa zaoberá fyzika v súčasnosti? Odpoveď na túto otázku nie je jednoduchá a vysloviť vyčerpávajúcu definíciu obsahu fyziky je takmer nemožné. Istý okruh problémov, ktoré fyzika skúma, poznáte už zo základnej školy. Na gymnáziu sa oboznámite s ďalšími oblasťami fyzikálneho skúmania, vaše predstavy o fyzike sa rozšíria a prehĺbia.

Fyziku možno rozdeliť podľa metód práce, ktoré fyzici používajú alebo podľa okruhov javov, ktorými sa fyzika zaoberá. Podľa metód práce sa fyzika zvyčajne rozdeľuje na **experimentálnu** a **teoretickú.**

Experimentálna fyzika sa zaoberá pozorovaním javov, ktoré prebiehajú v prírode samovoľne (napr. pohyby planét, kozmické žiarenie), alebo sú vyvolané zámerne pri plánovanom pokuse. Meraním fyzikálnych veličín sa zisťujú zákonité vzťahy medzi týmito veličinami, čo umožňuje matematicky formulovať fyzikálne zákony. Experimentálna fyzika dnes pritom používa väčšinou veľmi zložité prístroje a zariadenia. Moderné fyzikálne laboratóriá sa svojím zložitým a nákladným vybavením podobajú často priemyselným podnikom.

Teoretická fyzika hľadá všeobecné zákony a z nich sa usiluje odvodiť nové poznatky. Používa na to rozličné myšlienkové konštrukcie a modely založené na využití matematického aparátu. Treba však povedať, že presnú hranicu medzi experimentálnou a teoretickou fyzikou nemožno určiť. Napríklad moderná experimentálna i teoretická fyzika využívajú vo veľkej miere výpočtovú techniku.

Podľa okruhu javov, ktorými sa fyzika zaoberá, možno ju rozdeliť na rozličné odbory, napr. na mechaniku, molekulovú fyziku a termiku, elektrinu a magnetizmus, optiku, atómovú a jadrovú fyziku. Toto rozdelenie však nie je dokonalé, ani historicky stále a neznamená, že jednotlivé odbory sú od seba prísne oddelené a navzájom nezávislé. Napríklad pri štúdiu optických javov sa využívajú poznatky teórie elektromagnetického poľa a podobne.

Poznatky objavené fyzikou majú veľký význam jednak pre ďalšie prírodné vedy, jednak pre techniku a technický rozvoj. Je to dané najmä tým, že fyzika sa zaoberá štúdiom procesov, ktoré nachádzame v živej i neživej prírode, na Zemi aj v celom vesmíre (gravitačné a elektromagnetické javy, deje v atómoch atď.). Preto sa fyzika (podobne ako matematika) stáva všeobecným základom ostatných prírodných vied, medicíny a pod. Pripomeňme len, aký význam majú napr. poznatky o elektromagnetickej indukcii na získavanie a prenos elektrickej energie, na prenos informácií, v modernej elektrotechnike, elektronike a inde, alebo aký význam majú poznatky o stavbe hmoty pre chémiu, biológiu, medicínu, energetiku a ďalšie odbory.

Fyzika významne ovplyvnila i názory ľudí na javy v okolitom svete a pomáha človeku správne sa v týchto javoch orientovať. Pomáha vyvracať najrozličnejšie povery o nadprirodzenom pôvode prírodných javov, umožňuje človeku utvoriť si moderný fyzikálny obraz sveta.

Dobré vedomosti z fyziky sú pre človeka modernej spoločnosti nevyhnutné. Umožňujú mu ovládnuť prírodné procesy a využiť ich vo svoj prospech, porozumieť základom modernej výroby a aktívne sa podieľať na rozvoji spoločnosti.

Iste každý z vás by chcel dôkladnejšie pochopiť niektorú z moderných oblastí ľudského poznania, či už sa týka astronómie, elektroniky, moderných počítačov, motorov, využitia fyzikálnych poznatkov v biológii a medicíne, alebo preniknúť do filozofického skúmania hmoty, priestoru, času a iné. Na to všetko vám fyzika poskytne nevyhnutný kľúč. Ale skutočné pochopenie podstaty týchto oblastí predpokladá systematicky si osvojiť základy fyziky. A je to práve mechanika, s ktorou sa budete v tomto školskom roku najviac oboznamovať a ktorá v historickom vývoji fyziky položila základy celému systému fyziky. Jej štúdium vám umožní pochopiť väčšinu základných fyzikálnych pojmov, veličín, zákonov a princípov, uvedie vás do fyzikálneho myslenia a umožní vám získať veľa užitočných poznatkov.

2. Fyzikálne veličiny a ich jednotky

Ak pozorujeme nejaké teleso, zisťujeme, že zaberá istý priestor, pohybuje sa, že niektoré jeho vlastnosti sa menia, že toto teleso pôsobí na iné telesá a podobne. Vlastnosti, stavy a procesy v tomto telese môžeme porovnávať s vlastnosťami, stavmi a procesmi v iných telesách.

Skúmaním fyzikálnych objektov (telies, polí) zisťujeme, že tieto objekty majú isté vlastnosti, nachádzajú sa v istých stavoch, prebiehajú na nich zmeny a že toto všetko možno meraním číselne zhodnotiť. Fyzikálne vlastnosti, stavy a ich zmeny, ktoré možno merať, charakterizujeme **fyzikálnymi veličinami.** Takýmito fyzikálnymi veličinami sú napr. dĺžka, hmotnosť, hustota, teplota, elektrický prúd, elektrické napätie a iné.

Zo základnej školy viete, že hmotnosť telies určujeme na váhach tak, že porovnávame teleso s neznámou hmotnosťou s telesom so známou hmotnosťou (napr. 1 kg). Teplotu telies zisťujeme tak, že pomocou teplomera porovnávame jeho teplotu so známymi teplotami, ktoré sa využili pri konštrukcii teplomera.

Meranie fyzikálnej veličiny sa zakladá na tom, že meranú veličinu porovnávame predpísaným postupom s inou fyzikálnou veličinou toho istého druhu. Aby sa meranie dalo prakticky využiť, zvolíme na meranie veličín rovnakého druhu vždy tú istú porovnávaciu veličinu, ktorú nazveme **meracia jednotka** (napr. m, kg, °C, A, V). Získaný číselný údaj (**číselná hodnota**) udáva, koľkokrát je meraná veličina väčšia ako meracia jednotka. Pomocou značiek môžeme vzťah medzi **hodnotou fyzikálnej veličiny** X, jej meracou jednotkou $[X]$ a číselnou hodnotou $\{X\}$ napísať v tvare

$$X = \{X\}\,[X]$$

Napríklad ak meriame dĺžku predmetu l pomocou meracej jednotky meter (m) a získame pritom číselnú hodnotu 5, píšeme

$$l = 5\ \mathrm{m}$$

V tabuľkách píšeme často len číselné hodnoty veličín. Pritom využívame poznatok, že pre číselnú hodnotu veličiny platí

$$\frac{X}{[X]} = \{X\}$$

napr. $\frac{l}{\mathrm{m}} = 5$.

Meraciu jednotku možno voliť ľubovoľne. Podľa voľby jednotky však dostávame rozličné číselné hodnoty (napr. 5 m = 500 cm = 5 000 mm). Číselná hodnota veličiny teda sama osebe nemá zmysel. Musíme vždy uviesť, pri akej meracej jednotke sa číselná hodnota získala.

Na začiatku vedeckého a technického rozvoja ľudstva sa volili jednotky ľubovoľne, napr. podľa rozmerov ľudského tela (palec, stopa, lakeť, siaha). Prechod od remeselnej výroby k priemyselnej výrobe viedol k normalizácii a postupne k nevyhnutnosti zaviesť dohodnuté meracie jednotky celosvetovo.

3. Sústavy fyzikálnych veličín a jednotiek

Rozvoj fyziky ukázal, že každá fyzikálna veličina súvisí s mnohými inými fyzikálnymi veličinami a ich zmenami. Keby sa každá fyzikálna veličina a jej jednotka určovali navzájom nezávisle, viedlo by to k veľkým praktickým ťažkostiam. Preto už od začiatku 19. storočia vznikali **sústavy veličín** a **jednotiek.** Pri tvorbe sústavy veličín a jednotiek sa postupuje tak, že sa určí istý počet **základných veličín** a k nim sa určia **základné jednotky.** Všetky ostatné veličiny sa určujú (definujú) pomocou vzťahov (tzv. veličinových vzťahov alebo rovníc) zo základných veličín a ich jednotky sa definujú pomocou základných jednotiek.

U nás sa môžu používať len **zákonné meracie jednotky**, ktoré vychádzajú z **Medzinárodnej sústavy jednotiek** označovanej **SI**. Je to skratka francúzskeho názvu *Systéme International d'Unités* (čítaj systém enternasjonal dynyté). Zákonné meracie jednotky sú obsiahnuté v štátnej norme (zatiaľ stále platí *ČSN 01 1300* — fotografia na zadnej predsádke).

4. Medzinárodná sústava jednotiek

Medzinárodnú sústavu jednotiek (SI) tvorí:

a) **Sedem základných jednotiek**, ktoré zodpovedajú siedmim základným veličinám; niektoré už poznáte, s ďalšími sa oboznámite postupne vo vyučovaní fyziky.

Základná veličina	Značka veličiny	Základná jednotka	Značka jednotky
dĺžka	l	meter	m
hmotnosť	m	kilogram	kg
čas	t	sekunda	s
elektrický prúd	I	ampér	A
termodynamická teplota	T	kelvin	K
látkové množstvo	n	mol	mol
svietivosť	I	kandela	cd

Každá základná jednotka má svoju definíciu, ktorá nezávisí od iných jednotiek a je uvedená v česko-slovenskej štátnej norme *ČSN 01 1300.*

b) **Dve doplnkové jednotky**

Doplnková veličina	Značka veličiny	Doplnková jednotka	Značka jednotky
rovinný uhol	α, β, γ	radián	rad
priestorový uhol	Ω	steradián	sr

Označenie doplnková jednotka vyplýva z osobitného postavenia doplnkových veličín v SI (bezrozmerné veličiny so základným významom).

c) **Odvodené jednotky** SI, ktoré sú určené na meranie všetkých ostatných (odvodených) fyzikálnych veličín. Odvodené jednotky sa odvodzujú pomocou **definičných vzťahov** zo základných alebo už odvodených jednotiek. Vychádza sa pritom z definičných vzťahov zodpovedajúcich veličín.

Napríklad zo základnej školy viete, že veličina hustota ϱ je určená vzťahom

$$\varrho = \frac{m}{V}$$

kde ϱ, m, V sú značky hustoty, hmotnosti a objemu.

Jednotku hustoty dostaneme, keď do pravej strany vzťahu dosadíme základné alebo už odvodené jednotky

$$[\varrho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

V SI sa teda pre hustotu používa odvodená jednotka kilogram na meter kubický.

Niektoré odvodené jednotky majú vlastné názvy a značky, zvyčajne podľa mien vynikajúcich fyzikov, napr. newton — N, ampér — A, volt — V.

Sčítať môžeme iba veličiny rovnakého druhu: dĺžku s dĺžkou, hmotnosť s hmotnosťou, prúd s prúdom a pod. Deliť alebo násobiť môžeme však aj veličiny rozličného druhu, ale veličiny, ktoré takto vzniknú, sú vždy iného druhu ako veličiny v podiele alebo súčine definičného vzťahu na pravej strane. V našom príklade

$$\varrho = \frac{m}{V}$$

sú na pravej strane veličiny určujúce hmotnosť m a objem V istého telesa, ale na ľavej strane je definovanou veličinou hustota — materiálová konštanta charakterizujúca látku, z ktorej je rovnorodé teleso zhotovené.

d) **Násobky a diely jednotiek** SI, ktorých názvy sa tvoria pomocou normalizovaných predpôn z názvov základných jednotiek. Výnimka je iba pri tvorení násobkov a dielov jednotky hmotnosti. V tabuľke uvedieme najpoužívanejšie predpony s mocninami desiatich, pomocou ktorých sa násobky a diely vyjadrujú.

Predpona	Značka	Násobok	Mocnina desiatich
tera-	T	1 000 000 000 000	10^{12}
giga-	G	1 000 000 000	10^{9}
mega-	M	1 000 000	10^{6}
kilo-	k	1 000	10^{3}
mili-	m	0,001	10^{-3}
mikro-	μ	0,000 001	10^{-6}
nano-	n	0,000 000 001	10^{-9}
piko-	p	0,000 000 000 001	10^{-12}

V niektorých prípadoch sa používajú aj iné predpony, napr. centi: 1 cm $= 10^{-2}$ m.

Aby sme nemuseli odvodené jednotky zapisovať pomocou zlomkovej čiary, píšeme pri značkách jednotiek **záporné exponenty,** napr.

$$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = \mathrm{kg} \,.\, \mathrm{m}^{-3}, \qquad \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{m} \,.\, \mathrm{s}^{-1}, \qquad \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = \mathrm{N} \,.\, \mathrm{kg}^{-1}$$

Pri počítaní so zápornými exponentmi platí (podobne ako pri kladných exponentoch), že pri násobení mocnín sa exponenty sčítajú, pri delení mocnín sa exponenty odčítajú, napr.

$$\mathrm{m}^{-2} \,.\, \mathrm{m}^{-1} = \mathrm{m}^{-3}, \qquad \frac{\mathrm{m}^{-2}}{\mathrm{m}^{-1}} = \mathrm{m}^{-2-(-1)} = \mathrm{m}^{-1}$$

Medzi zákonné meracie jednotky patria okrem jednotiek SI aj **vedľajšie jednotky** (napr. °C, min).

Úlohy

1. Závisí dĺžka predmetu od použitej meracej jednotky?
2. Koľkokrát sa zväčší číselná hodnota fyzikálnej veličiny, ak sa pri meraní použije 2-krát, 3-krát, 6,5-krát (všeobecne *n*-krát) menšia meracia jednotka, ako je pôvodná jednotka?
3. Napíšte základné aj odvodené jednotky, ktoré poznáte zo základnej školy.

FORMY A PRÍČINY MECHANICKÉHO POHYBU

1. Kinematika hmotného bodu

1.1 Mechanický pohyb

Pri pozorovaní hmotných objektov, napr. telies okolo nás, vidíme, že oblaky plynú po oblohe, lietadlo letí, parašutista sa vznáša na padáku na zem, kolesá idúceho auta sa otáčajú. Hovoríme, že tieto telesá sa pohybujú.

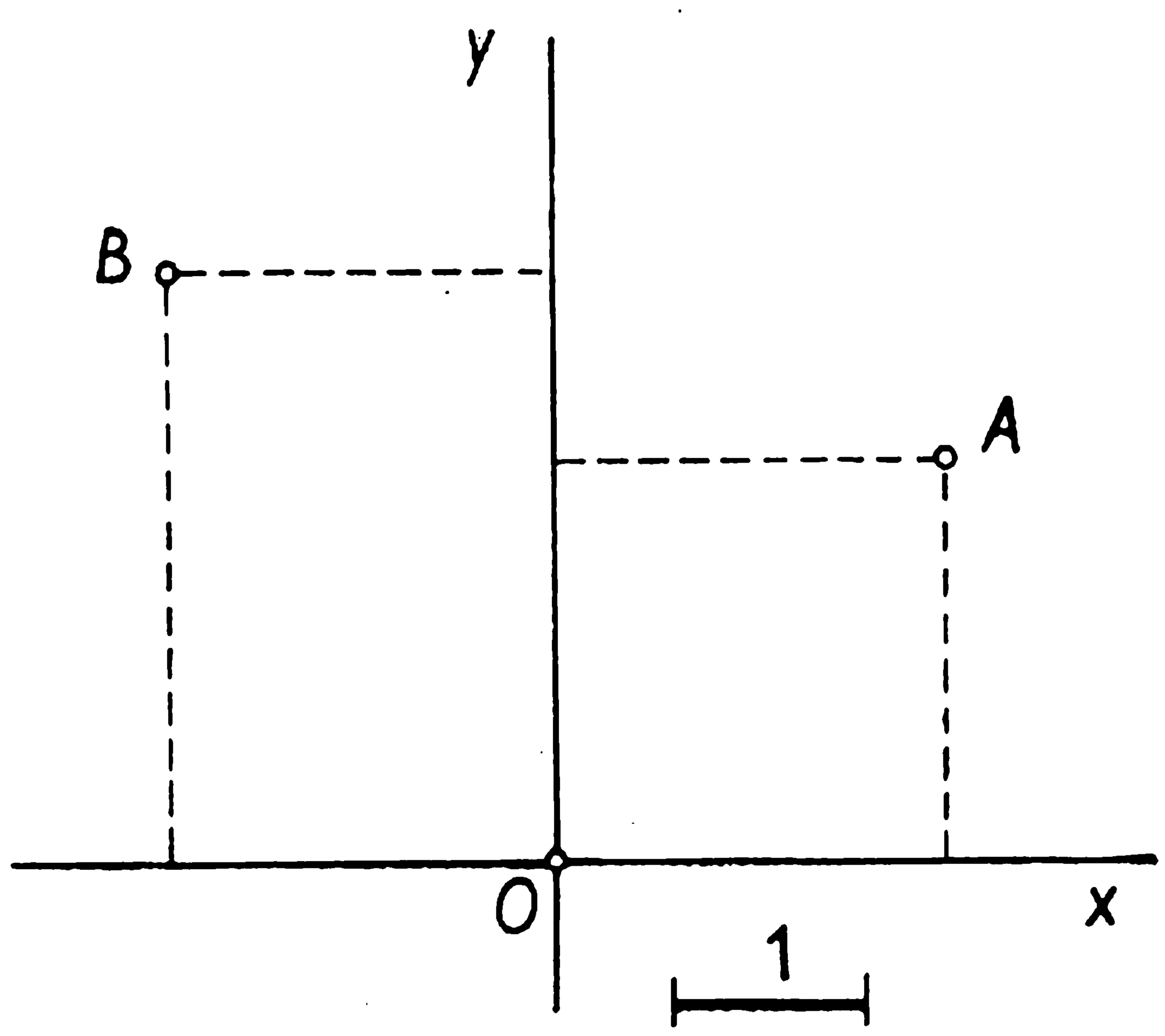
Prečo o všetkých spomenutých telesách (oblaky, lietadlo, výsadkár, kolesá auta) hovoríme, že sa pohybujú? Preto, lebo menia vzhľadom na nás svoju polohu. Ak telesá alebo ich časti menia svoju polohu vzhľadom na iné telesá, hovoríme o **mechanickom pohybe.**

Pohyb sa deje v priestore a čase. Mechanický pohyb je najjednoduchšia forma pohybu. Kvôli zjednodušeniu úvah o mechanickom pohybe považujeme telesá často za body. Napríklad pri sledovaní pohybu umelej družice Zeme je výhodné znázorniť družicu ako bod pohybujúci sa okolo Zeme. Ak sú rozmery telesa v pomere k ostatným rozmerom (rozmery družice vzhľadom na vzdialenosť od Zeme, vzhľadom na dráhu družice okolo Zeme a pod.) veľmi malé, zanedbávame ich a teleso nahrádzame bodom. Pritom však nemôžeme zanedbať hmotnosť telesa a preto zavádzame pojem **hmotný bod.** S podobným zjednodušením sa vo fyzike stretneme častejšie.

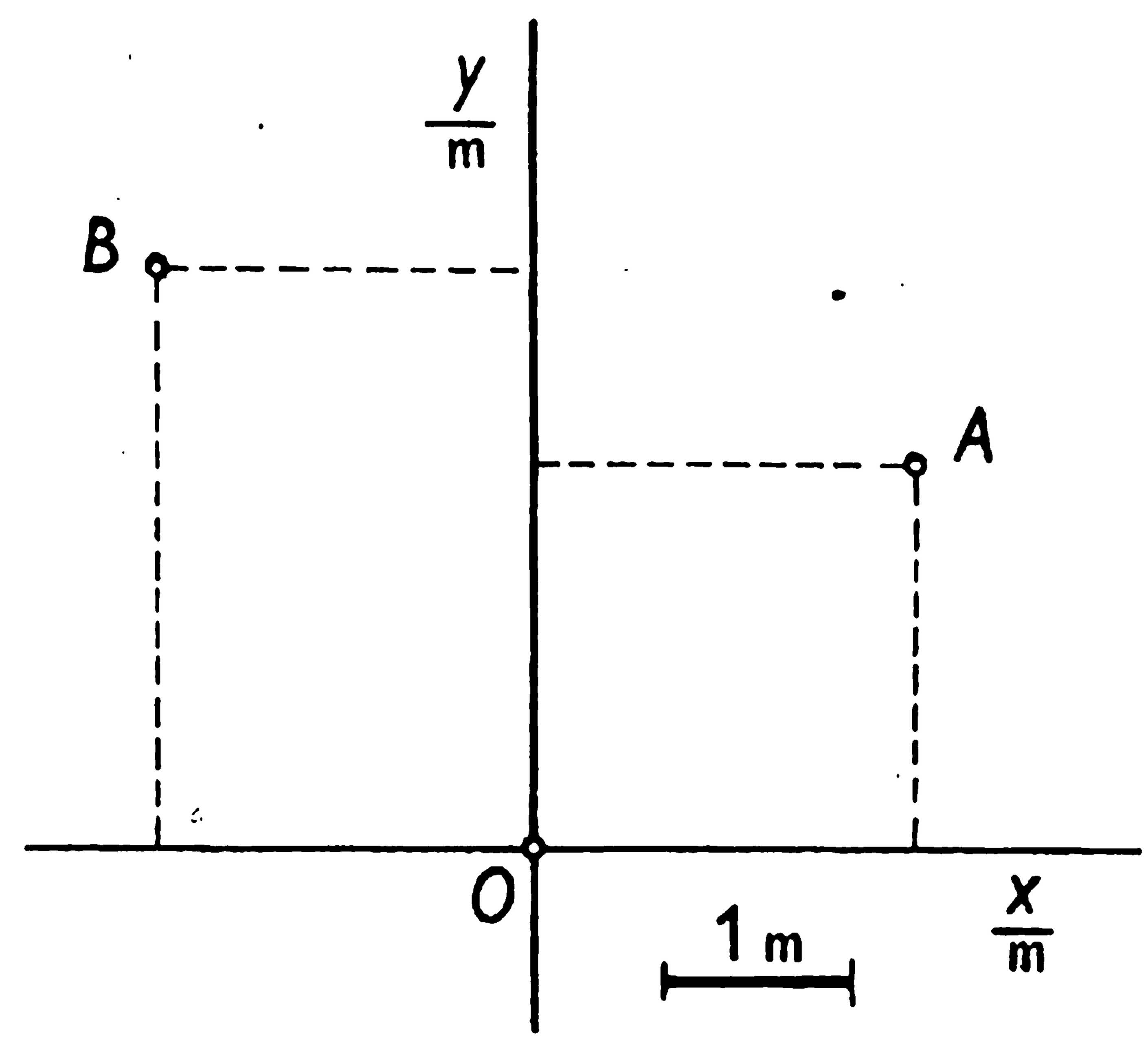
Skutočné teleso nahrádzame jeho **myšlienkovým modelom,** pri ktorom sú zachované len vlastnosti, ktoré sú dôležité na opis daného fyzikálneho deja; ostatné vlastnosti sú zanedbané (abstrahované). **Hmotný bod je teda model telesa, pri ktorom sa hmotnosť telesa zachováva, ale jeho rozmery sa zanedbávajú.**

Aby sme mohli opísať pohyb nejakého hmotného bodu (telesa), musíme sa dohodnúť, na ktoré telesá budeme jeho polohu vzťahovať. Toto teleso nazveme **vzťažné teleso** (napr. ľubovoľné objekty pevne spojené so Zemou). Na vzťažnom telese zvolíme **vzťažný bod** O a **sústavu súradníc,** vzhľadom na ktoré určujeme polohu telesa — hmotného bodu. Pohyb tohto hmotného bodu sledujeme pri dohodnutom spôsobe merania času. Ako budeme určovať polohu hmotného bodu?

Zo základnej školy viete, že v geometrii určujeme polohu bodu v rovine alebo v priestore tak, že udáme jeho súradnice v zvolenej sústave súradníc. Na obr. 1-1 je poloha bodov A a B v rovine určená dvojicami čísel $A = [2, 2]$, $B = [-2, 3]$; v matematike sú súradnice bodov vyjadrené číslami.



Obr. 1-1



Obr. 1-2

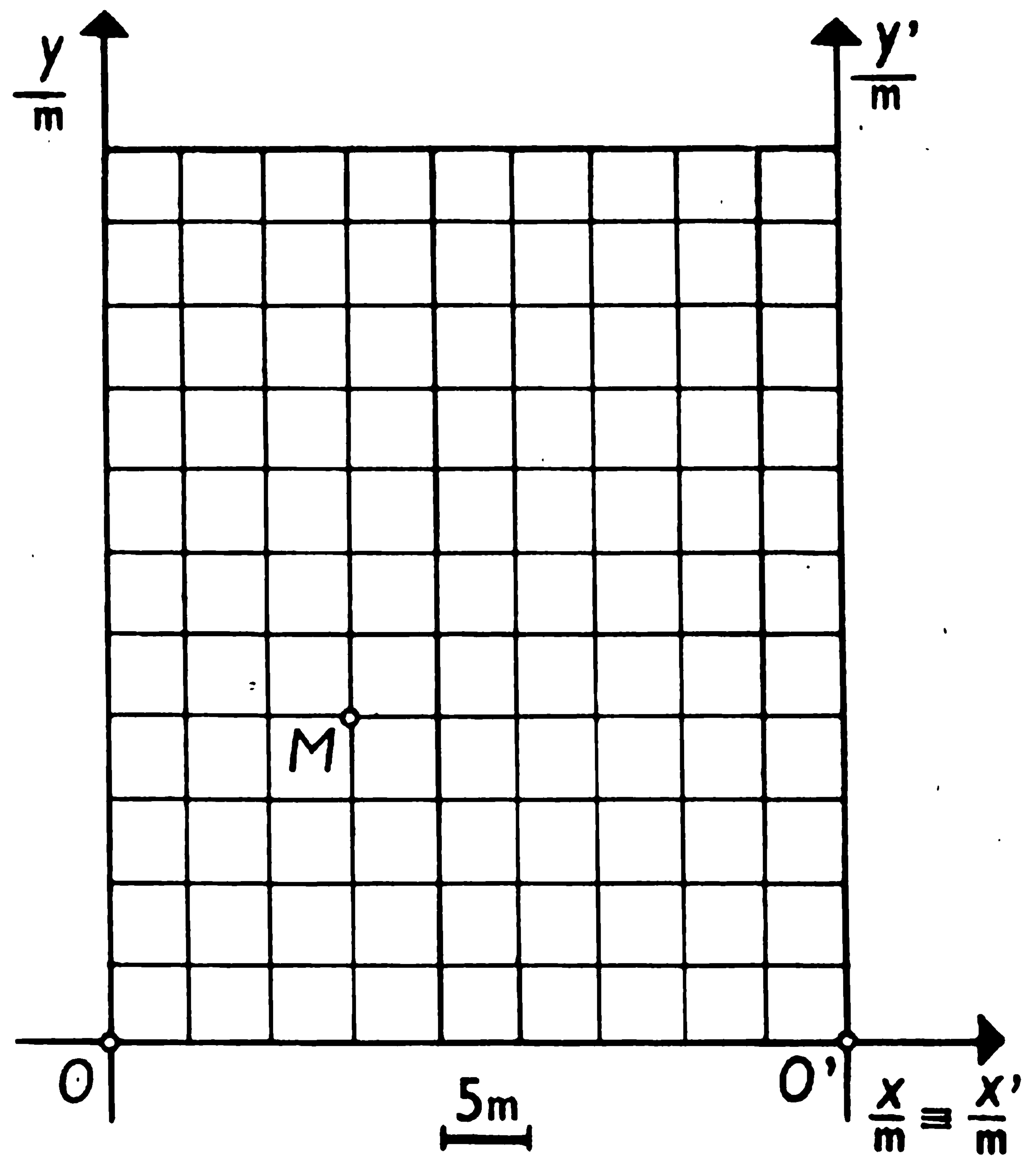
Spojením vzťažného telesa, na ktorom zvolíme vzťažný bod O, so sústavou súradníc a určením merania času vzniká **vzťažná sústava.** Bod O je začiatkom sústavy súradníc. Vzťažná sústava sa používa vo fyzike na určovanie polohy telesa a jej zmeny v závislosti od času.

Súradnice vo fyzike sú vždy čísla s jednotkou. Napríklad vo vzťažnej sústave Oxy (obr. 1-2) určujeme polohu bodov A a B vo fyzike súradnicami $A = [2\ \mathrm{m}, 2\ \mathrm{m}]$, $B = [-2\ \mathrm{m}, 3\ \mathrm{m}]$.

Úlohy

1. V pravouhlej sústave súradníc v rovine znázornite body $A = [-1\ \mathrm{m}, 2\ \mathrm{m}]$, $B = [3\ \mathrm{m}, 4\ \mathrm{m}]$, $C = [-4\ \mathrm{m}, -5\ \mathrm{m}]$, $D = [4\ \mathrm{m}, 0\ \mathrm{m}]$.
2. Určte súradnice lopty na ihrisku (obr. 1-3):
   a) vo vzťažnej sústave Oxy (začiatok je ľavý dolný roh ihriska),

b) vo vzťažnej sústave $O'x'y'$ (začiatok je pravý dolný roh ihriska).
[[15 m, 20 m]; -30 m, 20 m]]



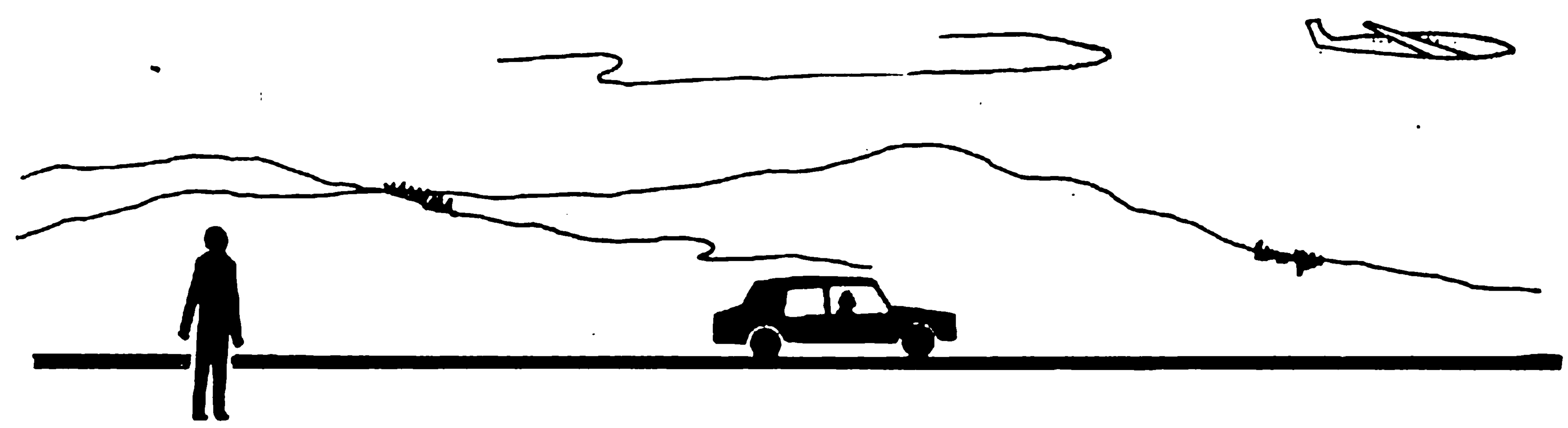
Obr. 1-3

1.2 Druhy pohybov. Trajektória

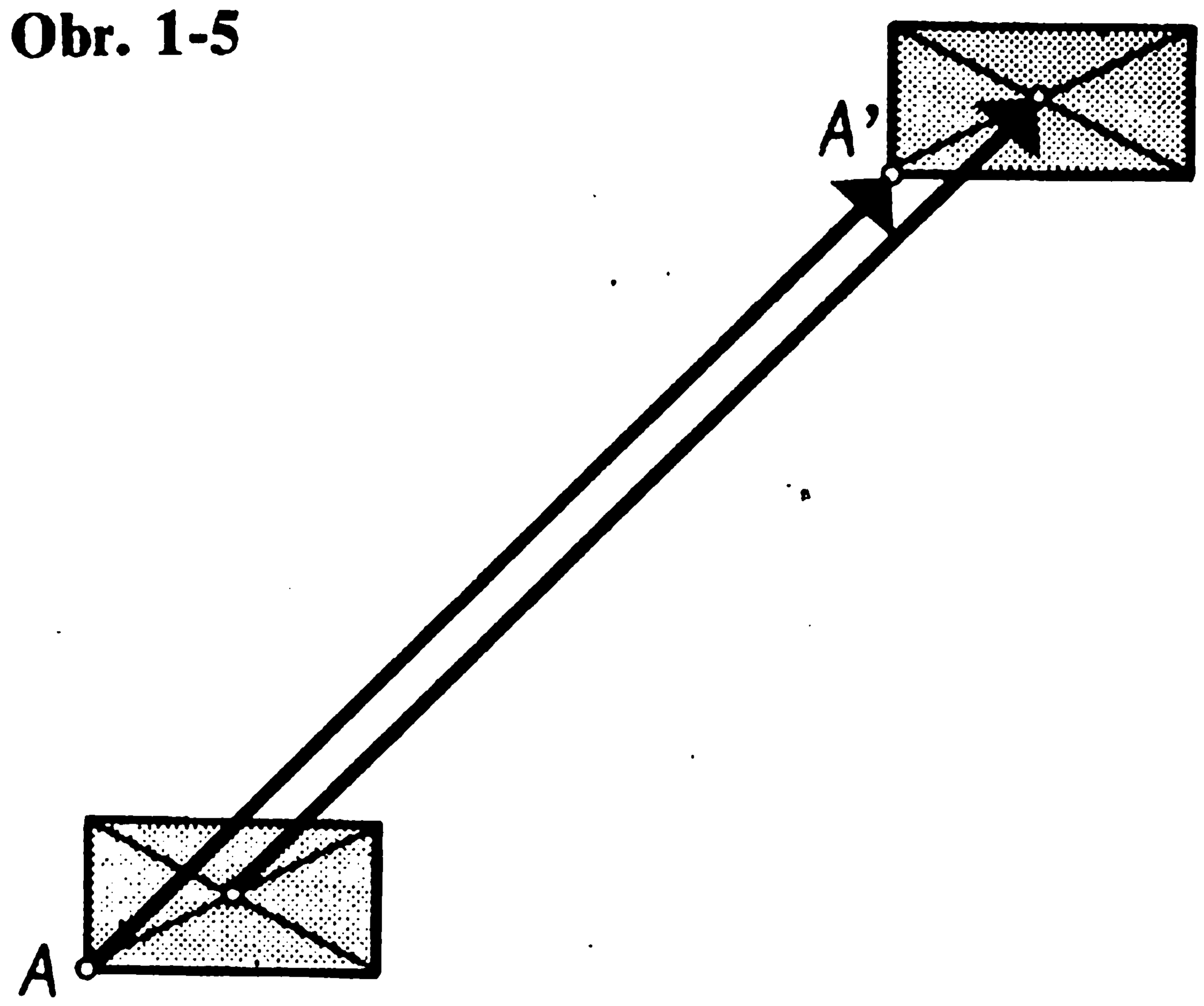
Pri pozorovaní mechanického pohybu sledujeme zmenu polohy telesa v čase vzhľadom na vzťažné teleso. Za vzťažné teleso však môžeme zvoliť ktorékoľvek teleso. Na obr. 1-4 je človek, ktorý stojí na Zemi — pozorovateľ. Pozoruje automobil a lietadlo. Lietadlo i automobil sú pre pozorovateľa pohybujúce sa telesá. Pre pilota v lietadle sú však pohybujúce sa telesá aj automobil, aj pozorovateľ, ktorý stojí na Zemi. Pokoj alebo pohyb môžeme zisťovať len vzhľadom na vzťažnú sústavu. V tomto zmysle hovoríme o relatívnosti pokoja a pohybu. Relatívnosť mechanického pohybu znamená, že opis pohybu závisí od voľby vzťažnej sústavy.

Množina (súhrn) všetkých polôh, v ktorých sa hmotný bod pri pohybe vyskytuje, nazýva sa trajektória hmotného bodu (z latinského *trajekcio* — preprava). Je to čiara (krivka), ktorú pri pohybe opisuje hmotný bod.

Obr. 1-4



Obr. 1-5



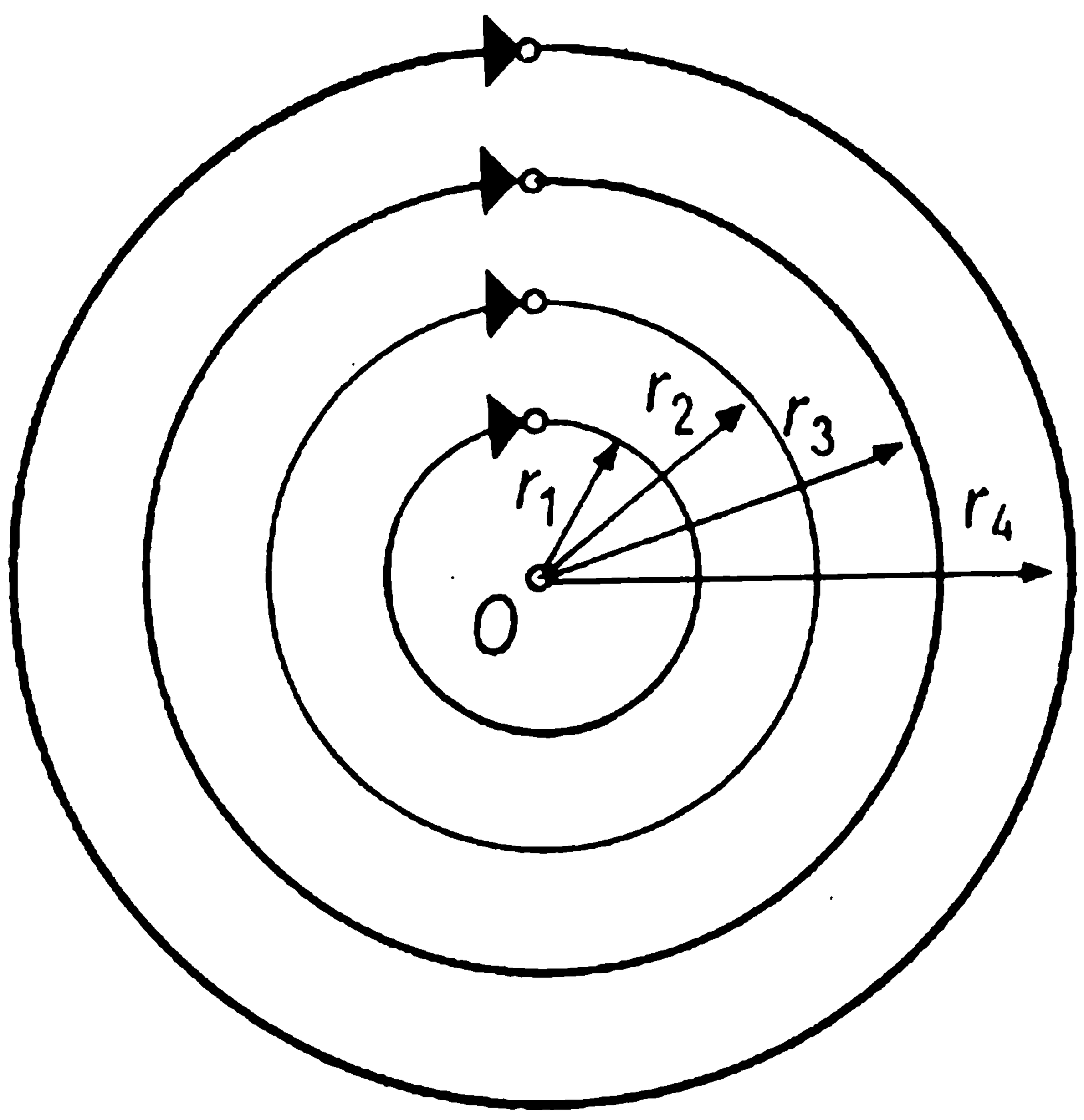
Ak je trajektória hmotného bodu časť priamky, koná bod priamočiary pohyb. V ostatných prípadoch je to krivočiary pohyb.

Pri pohybujúcom sa telese je to však zložitejšie. Telesá sa môžu pohybovať posuvným (translačným) pohybom, otáčavým (rotačným) pohybom, alebo pohybom zloženým z týchto pohybov.

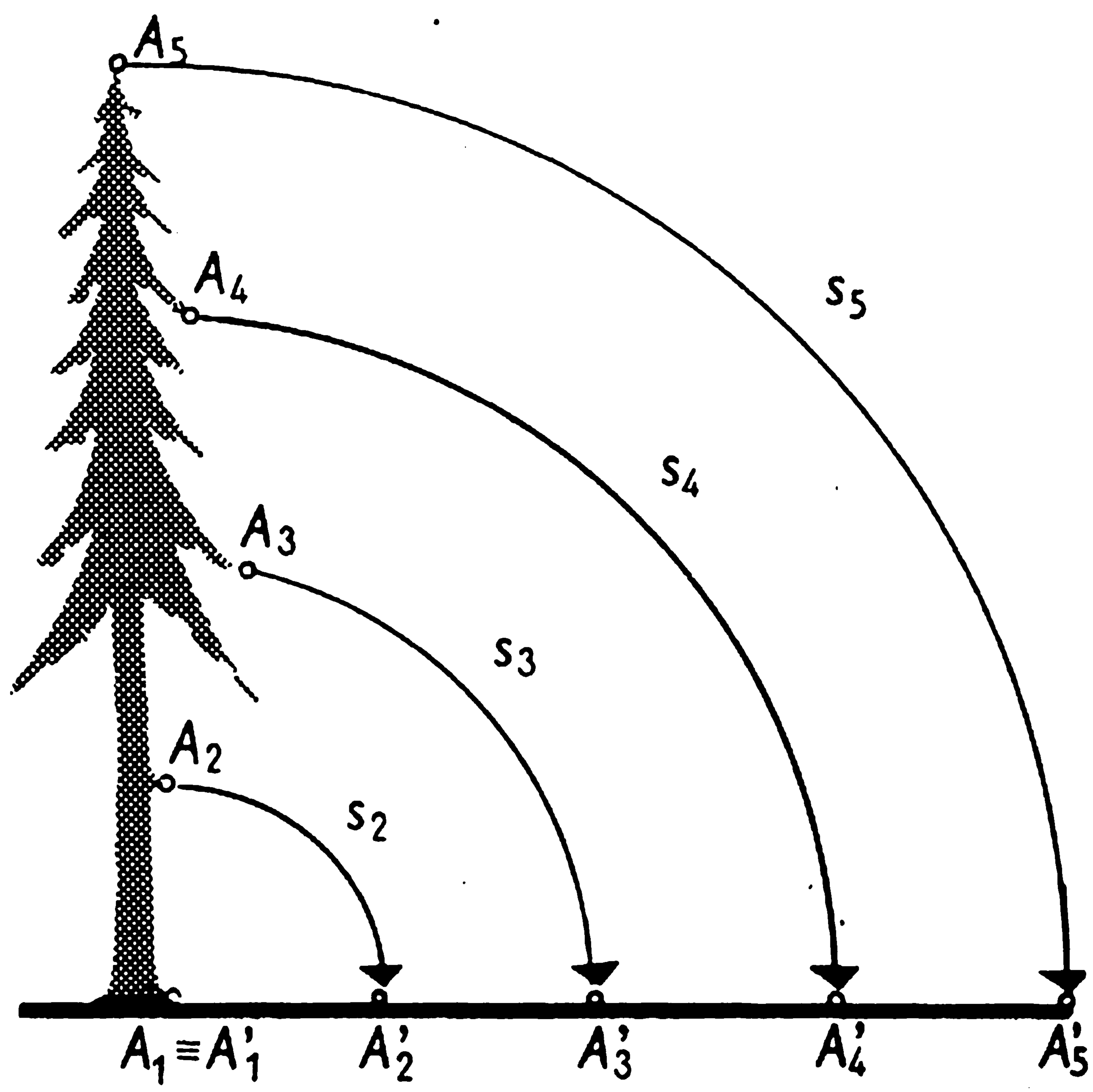
Pri posuvnom pohybe všetky body telesa opíšu za ten istý čas rovnakú trajektóriu a ľubovoľné priamky pevne spojené s telesom zachovávajú svoj smer vzhľadom na vzťažnú sústavu (obr. 1-5). Posuvný pohyb koná napr. karoséria autobusu, ktorý sa pohybuje po priamej vozovke, alebo trup výsadkára pri zoskoku z lietadla, alebo trup skokana na lyžiach pri jeho lete z mostíka.

Pri otáčavom pohybe telesa okolo nehybnej osi opisujú body telesa kružnice so stredmi na osi otáčania a tieto kružnice ležia v rovinách

kolmých na os otáčania. Otáčavý pohyb koná napríklad brúsny kotúč alebo padajúci odťatý strom (obr. 1-6 a 1-7). Z obr. 1-7 vidieť, že trajektória bodov A_1, A_2, A_3, A_4 je rozličná.



Obr. 1-6

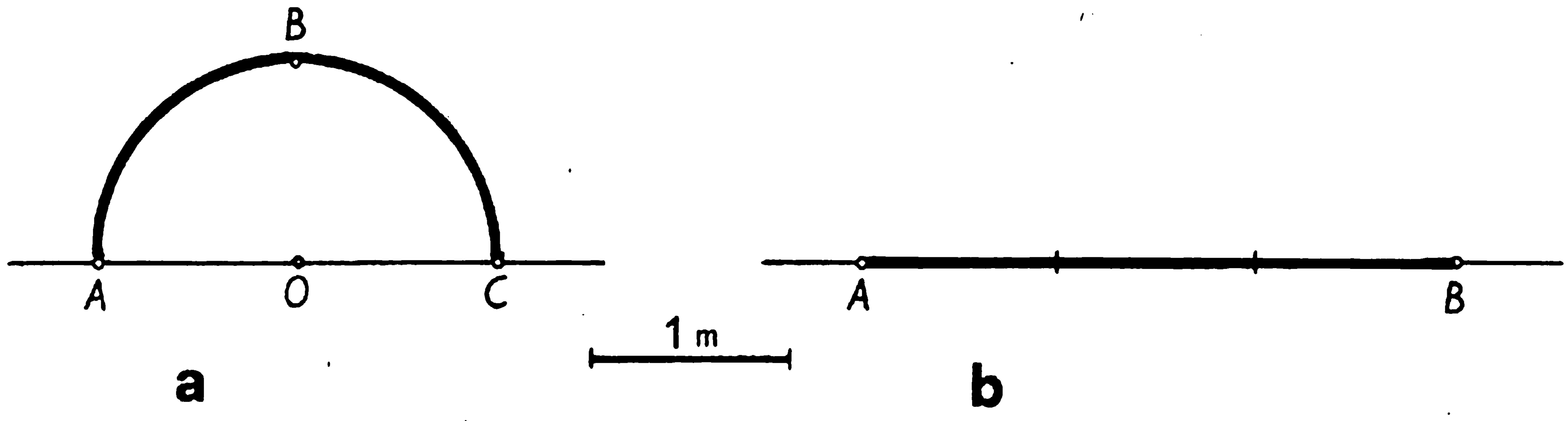


Obr. 1-7

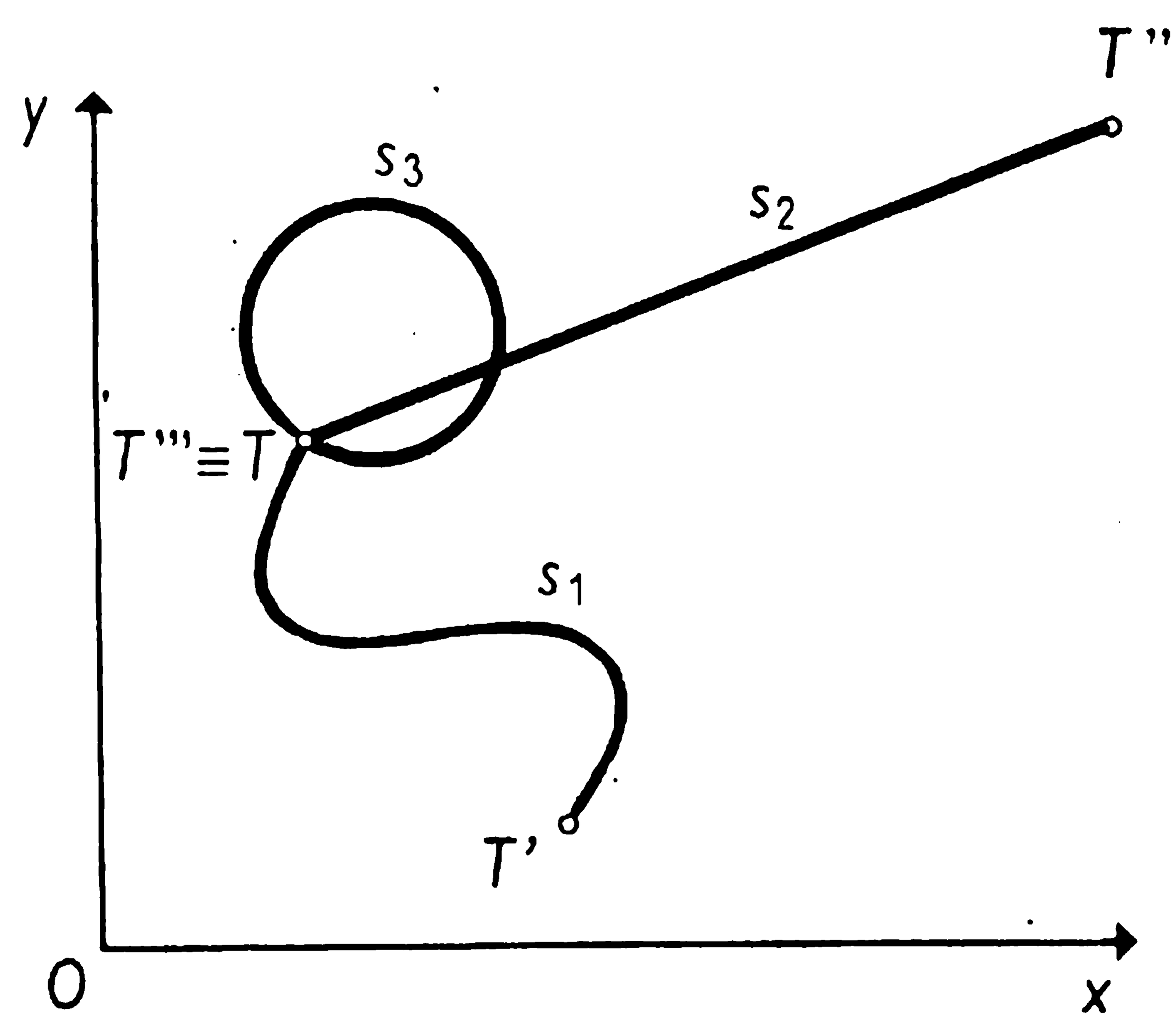
1.3 Kinematický opis pohybu

Časť mechaniky, ktorá sa zaoberá určením polôh bodov a ich zmien v čase, nazýva sa kinematika. Kinematika pohyb telesa len opisuje, nezaoberá sa príčinami pohybu.

Trajektória — krivka, po ktorej sa hmotný bod pohybuje, nie je fyzikálna veličina. Na kvantitatívny opis pohybu zavádzame veličinu dráha. **Dráha je dĺžka trajektórie, po ktorej sa hmotný bod pohyboval.** Napríklad na obr. 1-8a je zobrazená trajektória hmotného bodu krivkou *ABC* (polkružnica). Dráha hmotného bodu je π m = 3,14 m. Na obr. 1-8b je zobrazená trajektória hmotného bodu časťou priamky (úsečkou) a dráha hmotného bodu je 3 m.



Obr. 1-8



Obr. 1-9

V základnej škole ste dráhu rovnomerného pohybu hmotného bodu po priamke počítali podľa vzťahu

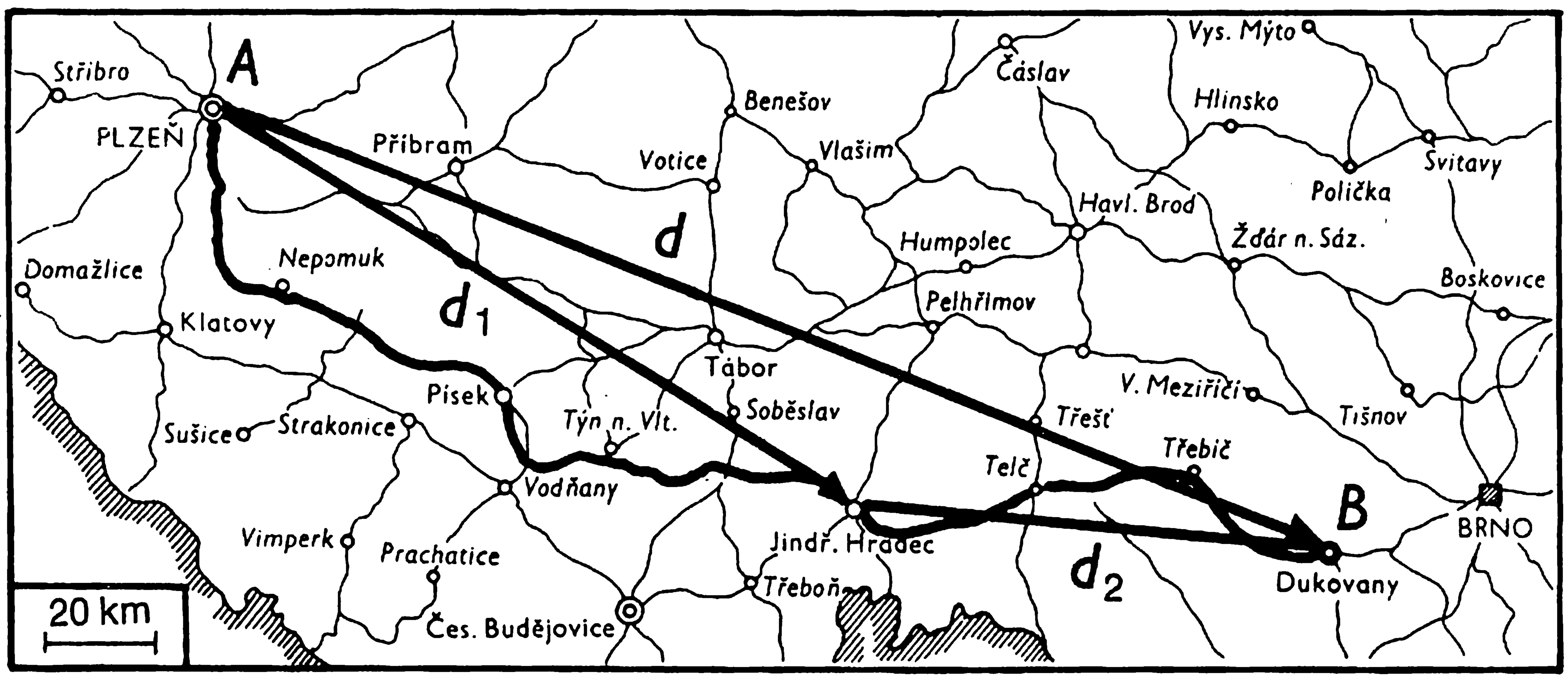
$$s = v\ t$$

kde v je rýchlosť a t čas pohybu. Ďalej viete, že závislosť dráhy od času pri pohybe hmotného bodu možno určiť aj tabuľkou alebo grafom.

Na určenie polohy hmotného bodu nestačí poznať len dráhu. Na obr. 1-9 sú vo vzťažnej sústave Oxy znázornené postupne zmeny polohy hmotného bodu zo začiatočnej polohy v bode T po prejdení rovnakej dráhy $s_1 = s_2 = s_3$ po rozličných trajektóriách (sínusoida, úsečka, kružnica) do bodov T', T'', T'''. Na určenie zmeny polohy by bolo potrebné poznať nielen dráhu, ale aj trajektóriu. Preto je často vhodnejšie určovať zmenu polohy hmotného bodu pomocou veličiny posunutie.

1.4 Posunutie

Pri stavbe jadrovej elektrárne v Dukovanoch bolo treba zabezpečiť prepravu ťažkých reaktorových súčastí z Plzne do Dukovian. Na mape môžeme vyznačiť východiskové miesto (závod v Plzni) ako bod A a cieľové miesto (stavba elektrárne v Dukovanoch) ako bod B (obr. 1-10). Úlohou je teda zabezpečiť prevoz z miesta A do miesta B, čo môžeme na mape vyznačiť orientovanou úsečkou $\boldsymbol{AB}$.



Obr. 1-10

Zmenu polohy hmotného bodu vo fyzike určujeme orientovanou úsečkou, ktorá spája začiatočnú a koncovú polohu hmotného bodu. Veličina, ktorú táto orientovaná úsečka predstavuje, nazýva sa **orientované posunutie** alebo vektor posunutia, značka $\boldsymbol{d}$. Dĺžka úsečky AB znázorňuje v zvolenej mierke vzdialenosť jeho začiatočného a koncového bodu pri pohybe a nazýva sa **veľkosť posunutia** $d = |\boldsymbol{d}|$, smer polpriamky AB určuje **smer posunutia.**

Preto v našom príklade treba okrem veľkosti posunutia (vzdialenosť začiatočnej a koncovej polohy) — 213 km ešte uviesť, odkiaľ súčasti prepravujeme a v akom smere, napr. z Plzne východojuhovýchodným smerom. Vo fyzike znázorníme toto posunutie orientovanou úsečkou. Jej dĺžka v zvolenej mierke (napr. 1 cm $\hat{=}$ 20 km) zodpovedá veľkosti posunutia.

Veličiny vo fyzike, ktoré sú určené veľkosťou a smerom, nazývajú sa vektorové fyzikálne veličiny, stručne **vektory** (z latinského *vektor* — nosič, jazdec).

Ako súvisí posunutie s trajektóriou a dráhou pohybu? Keby sme použili na prepravu vrtuľník, v ideálnom prípade by bolo možné, aby letel po priamočiarej trajektórii z Plzne do Dukovian. Dráha pohybu po priamočiarej trajektórii by sa rovnala veľkosti posunutia; platilo by

$$s = d$$

Vzhľadom na veľkú hmotnosť reaktorových súčastí však treba na prepravu použiť špeciálne nákladné ťahače a nájsť pre ne vhodnú trasu po vyhovujúcich cestách, mostoch, podjazdoch a pod. Skutočnou trajektóriou je teda krivka (obr. 1-10) a dráha je väčšia ako veľkosť posunutia.

$$s > d$$

1.5 Skladanie posunutí

Prevoz reaktorových súčastí nemožno uskutočniť za deň. Na mape môžeme vyznačiť posunutia pre jednotlivé dni (obr. 1-10), napr. Plzeň—Jindřichov Hradec (posunutie $\boldsymbol{d}_1$), Jindřichov Hradec—Dukovany (posunutie $\boldsymbol{d}_2$). Posunutie $\boldsymbol{d}$ si predstavujeme zložené z dvoch posunutí $\boldsymbol{d}_1$ a $\boldsymbol{d}_2$. Všetky tri posunutia v geometrickom zobrazení tvoria strany trojuholníka. Vektor posunutia $\boldsymbol{d}$ nazývame **súčet vektorov** posunutia $\boldsymbol{d}_1$ a $\boldsymbol{d}_2$ a píšeme

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2$$

Skladať dve po sebe nasledujúce posunutia hmotného bodu znamená, že do koncového bodu prvého posunutia umiestime začiatočný bod druhého posunutia. Výsledné posunutie je určené začiatočným bodom prvého posunutia a koncovým bodom druhého posunutia.

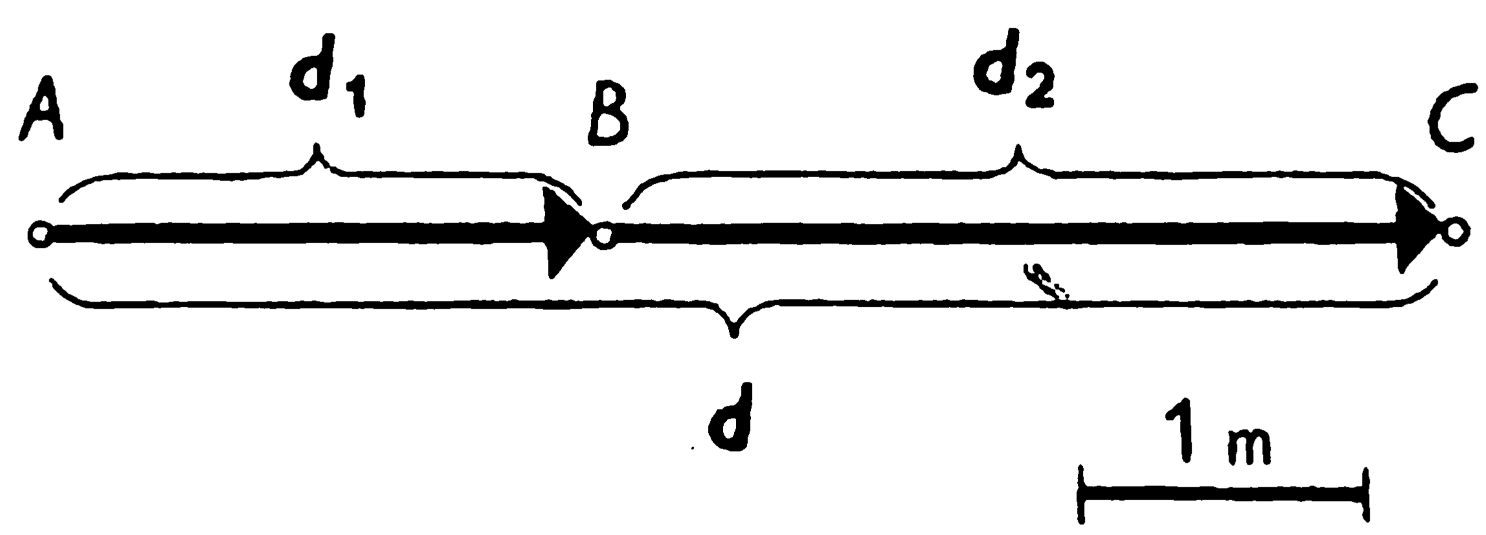
Z geometrie viete, že dĺžka ľubovoľnej strany trojuholníka je menšia ako súčet dĺžok zostávajúcich dvoch strán. Keď posunutia neležia v jednej priamke, musí platiť

$$d < d_1 + d_2$$

Keď posunutia budú mať rovnaký smer, napr. $\boldsymbol{d}_1 \triangleq \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{d}_2 \triangleq \boldsymbol{BC}$, $d_1 = 2$ m, $d_2 = 3$ m (obr. 1-11), tak pre výsledné posunutie platí

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2, \qquad d = d_1 + d_2$$
$$d = 2\ \mathrm{m} + 3\ \mathrm{m} = 5\ \mathrm{m}$$

Zložením niekoľkých posunutí rovnakého smeru vznikne posunutie takého istého smeru a jeho veľkosť sa rovná súčtu veľkostí jednotlivých posunutí.



Obr. 1-11

Keď majú posunutia opačný smer, napr. $\boldsymbol{d}_3 \triangleq \boldsymbol{OD}$ a $\boldsymbol{d}_4 \triangleq \boldsymbol{DE}$ (obr. 1-12), $d_3 = 5$ m, $d_4 = 4$ m, výsledné posunutie je $\boldsymbol{d} \triangleq \boldsymbol{OE}$

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_3 + \boldsymbol{d}_4$$

ale

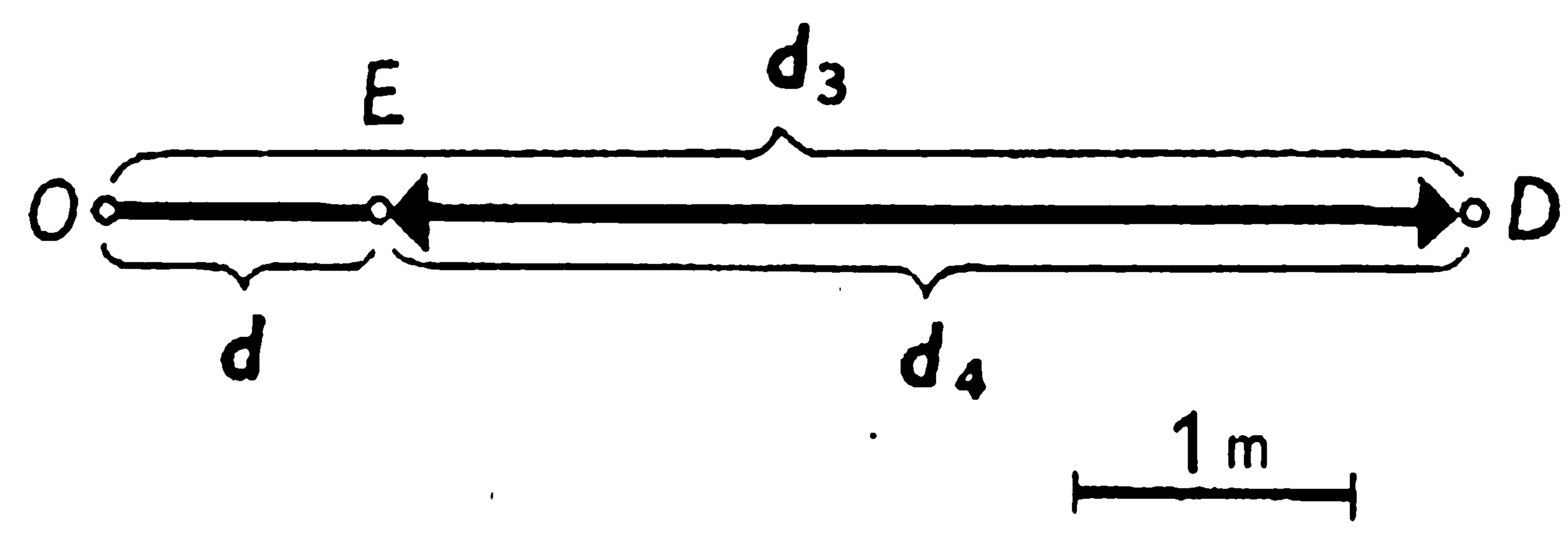
$$d = d_3 - d_4, \qquad d = 5\ \mathrm{m} - 4\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{m}$$

Pri skladaní dvoch posunutí opačného smeru veľkosť výsledného posunutia sa rovná rozdielu veľkostí väčšieho a menšieho posunutia a smer výsledného posunutia súhlasí so smerom väčšieho z obidvoch posunutí.

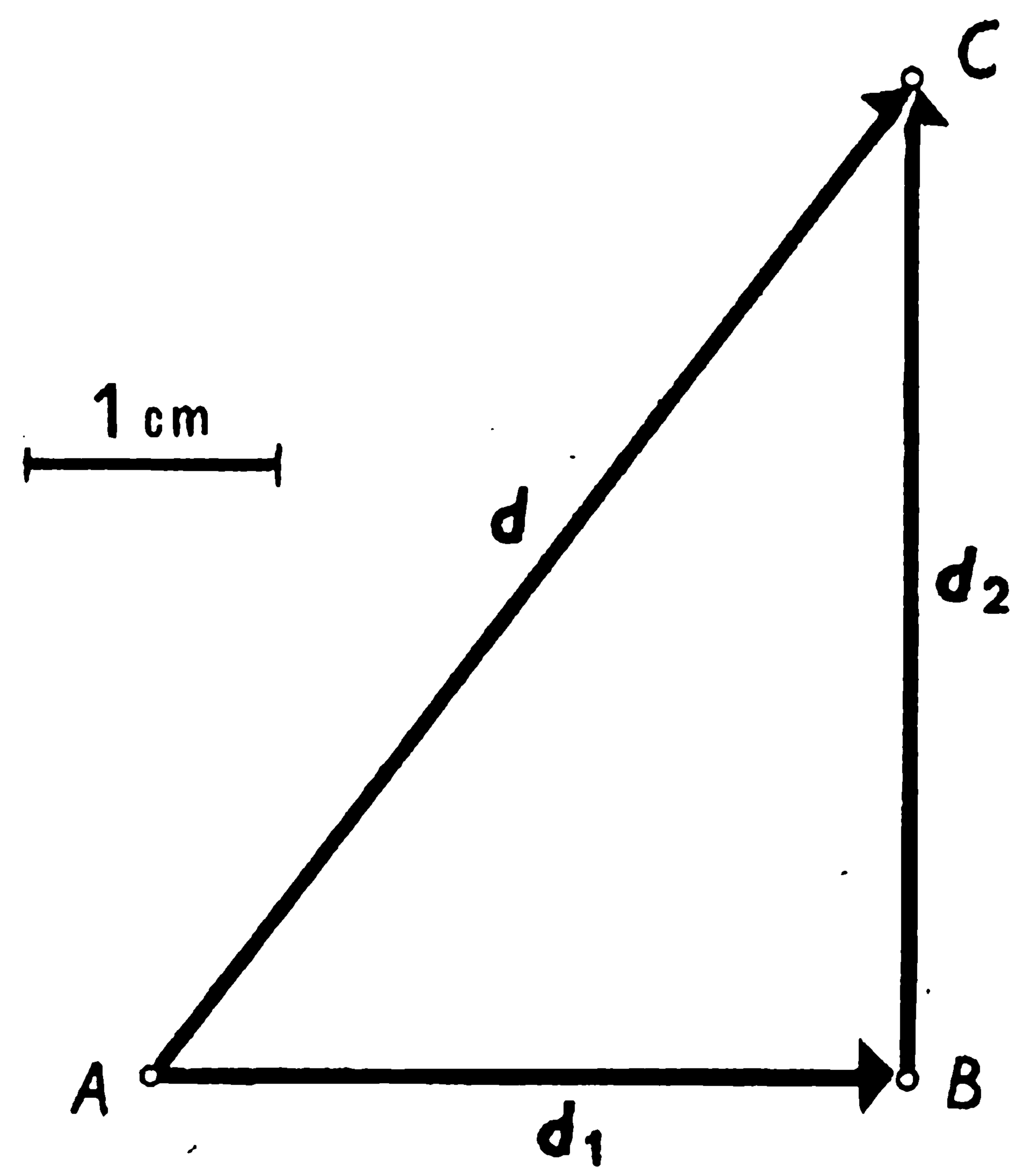
Keď sú posunutia navzájom kolmé, napr. $\boldsymbol{d}_1 \perp \boldsymbol{d}_2$ (obr. 1-13), $d_1 = 3$ cm, $d_2 = 4$ cm, môžeme veľkosť výsledného posunutia určiť podľa Pytagorovej vety

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2, \qquad d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$$

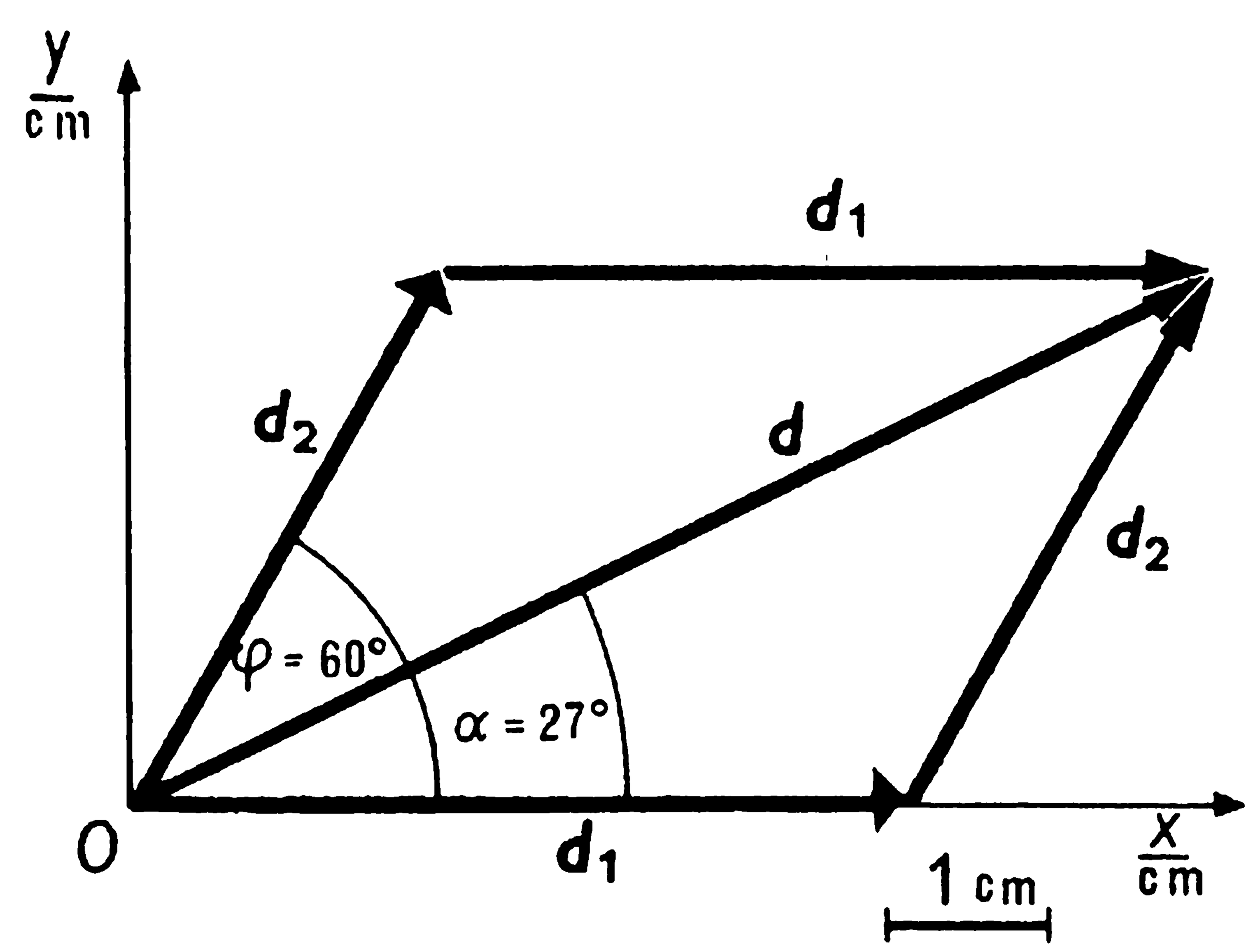
$$d = \sqrt{3^2 + 4^2}\ \mathrm{cm} = 5\ \mathrm{cm}$$



Obr. 1-12



Obr. 1-13



Obr. 1-14

Keď majú posunutia všeobecne rôzny smer, určíme výsledné posunutie využitím vlastností rovnobežníka (obr. 1-14). Napríklad $\boldsymbol{d}_1$ má veľkosť $d_1 = 5$ cm a smer zhodný so smerom x, $\boldsymbol{d}_2$ má veľkosť $d_2 = 4$ cm a s osou x zviera uhol $\varphi = 60°$.

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2$$

Z obrázka meraním určíme: $d \doteq 7{,}8$ cm, $\alpha \doteq 27°$ (uhol zovretý osou x).
Z geometrickej konštrukcie výsledného posunutia je zrejmé, že

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2 = \boldsymbol{d}_2 + \boldsymbol{d}_1$$

Výsledné posunutie nezávisí od toho, v akom poradí jednotlivé posunutia skladáme (skladanie posunutí je komutatívne).

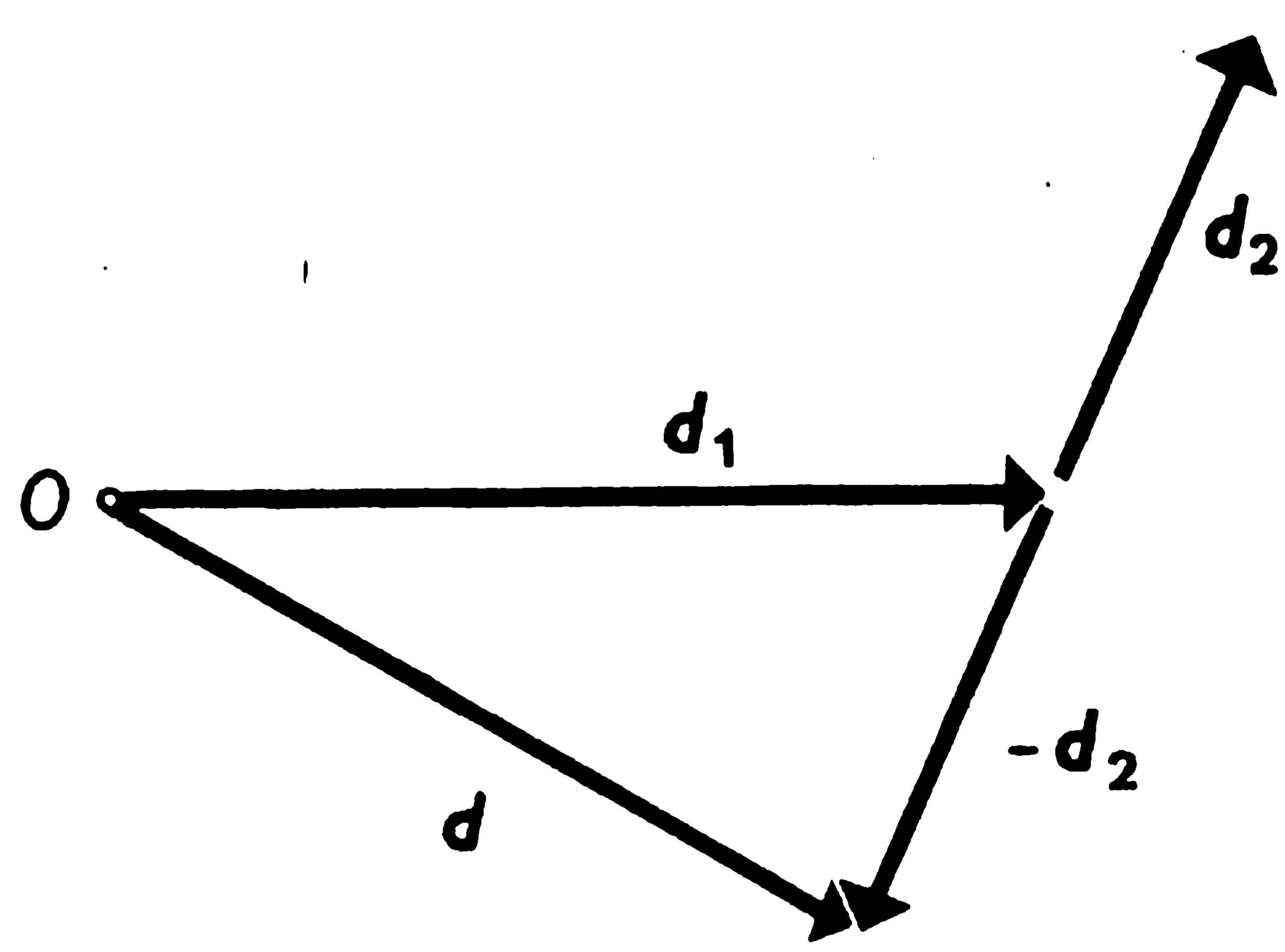
Keď je posunutí viac, skladáme ich postupne: k súčtu prvých dvoch pripočítame tretie atď.

Keď máme od posunutia $\boldsymbol{d}_1$ odčítať posunutie $\boldsymbol{d}_2$, postupujeme tak, že posunutie $\boldsymbol{d}_1$ zložíme s posunutím opačným (opačného smeru) k $\boldsymbol{d}_2$. Pre výsledné posunutie platí (obr. 1-15)

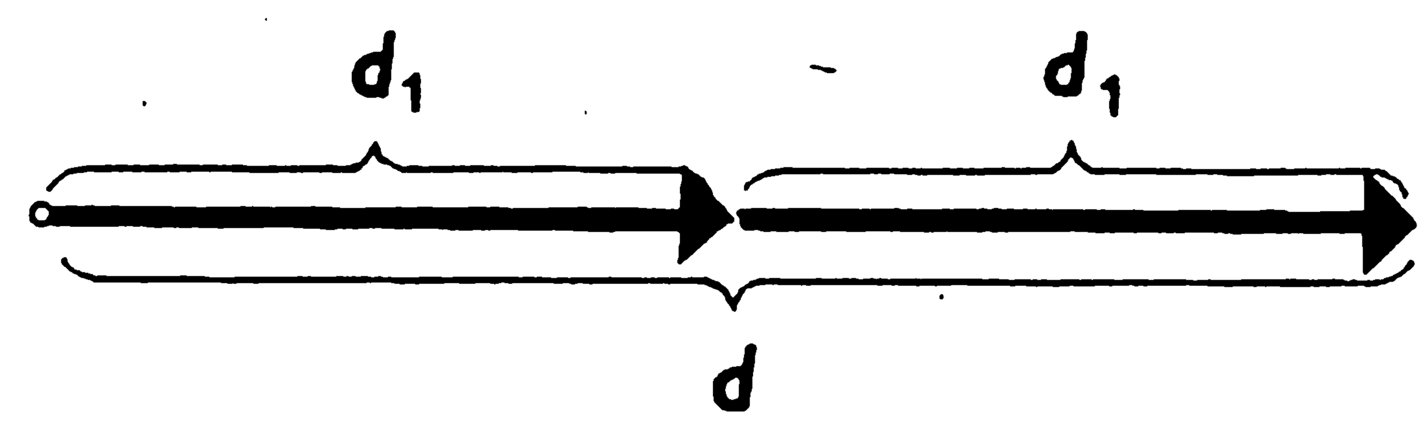
$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_1 + (-\boldsymbol{d}_2)$$

Dve zhodné posunutia majú rovnakú veľkosť a súhlasný smer. Ak máme zložiť dve zhodné posunutia $\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_1$, výsledné posunutie (obr. 1-16) je

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_1 + 2\,\boldsymbol{d}_1,\ d = 2d_1$$



Obr. 1-15



Obr. 1-16

Pri násobení posunutia kladným číslom n má výsledné posunutie rovnaký smer a jeho veľkosť sa rovná n-násobku veľkosti násobeného posunutia

$$\boldsymbol{d} = n\,\boldsymbol{d}_1, \qquad d = n\,d_1$$

Pri násobení posunutia záporným číslom zmení sa smer výsledného posunutia na opačný.

Úlohy

1. V ktorom prípade pre skladanie posunutí platí, že veľkosť výsledného posunutia sa rovná súčtu veľkostí posunutí?
2. Zložte dve posunutia $\boldsymbol{d}_1$ a $\boldsymbol{d}_2$. Veľkosť posunutí $d_1 = 4$ m, $d_2 = 1$ m. Posunutia majú opačný smer.
3. Zložte dve posunutia $\boldsymbol{d}_1$ a $\boldsymbol{d}_2$ znázornené orientovanými úsečkami $\boldsymbol{OA}$ a $\boldsymbol{OB}$. Súradnice bodov sú $O = [0\text{ m}, 0\text{ m}]$, $A = [3\text{ m}, 3\text{ m}]$, $B = [5\text{ m}, 2\text{ m}]$. Zmerajte veľkosť výsledného posunutia d. [9,4 m]
4. Na kružnici s polomerom 10 cm a stredom S sú dané body A, B, C tak, že stredový uhol $\sphericalangle ASB = 60°$ a stredový uhol $\sphericalangle ASC = 90°$. Určte dĺžku oblúka kružnice a veľkosť posunutí: a) $\widehat{AB}$, $\boldsymbol{AB}$; b) $\widehat{AC}$, $\boldsymbol{AC}$. [10,5 cm, 10,0 cm; 15,7 cm, 14,1 cm]
5. Dve posunutia sú dané orientovanými úsečkami $\boldsymbol{d}_1 \triangleq \boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{d}_2 \triangleq \boldsymbol{AB}$. Body O, A, B majú súradnice $O = [0\text{ m}, 0\text{ m}]$, $A = [0\text{ m}, 4\text{ m}]$, $B = [3\text{ m}, 4\text{ m}]$. Nájdite súčet a rozdiel obidvoch posunutí. Určte veľkosť výsledných posunutí. [5 m, 5 m]
6. Dané sú tri posunutia znázornené orientovanými úsečkami $\boldsymbol{d}_1 \triangleq \boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{d}_2 \triangleq \boldsymbol{OB}$, $\boldsymbol{d}_3 \triangleq \boldsymbol{OC}$. Nájdite výsledné posunutie, ktoré vznikne ich zložením. Určte jeho veľkosť. Body O, A, B, C majú súradnice: $O = [0\text{ m}, 0\text{ m}]$, $A = [4\text{ m}, 0\text{ m}]$, $B = [0\text{ m}, 3\text{ m}]$, $C = [4\text{ m}, 3\text{ m}]$. [10 m]

Poznámka: Symbol $\triangleq$ značí „zodpovedá" alebo „predstavuje".

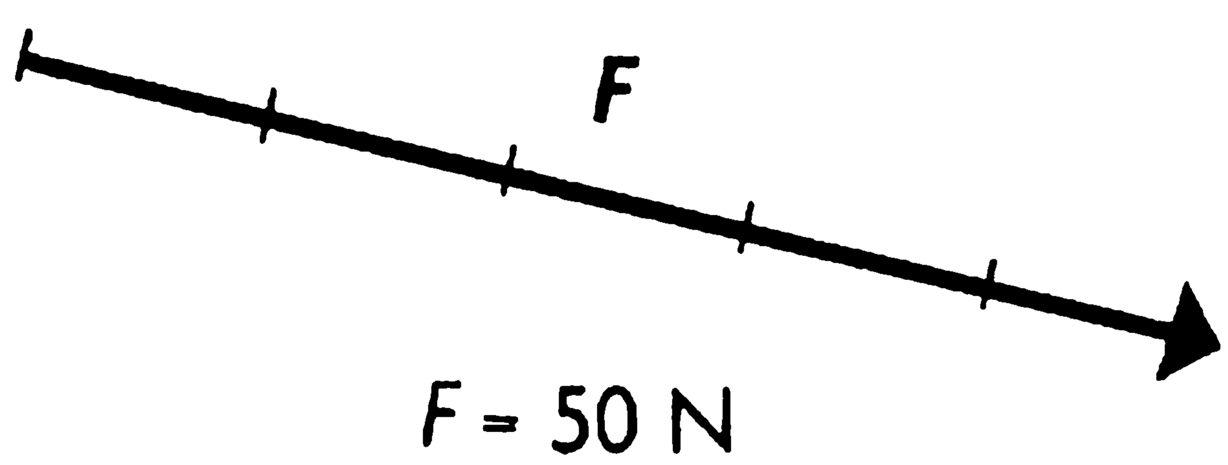
1.6 Skalárne a vektorové fyzikálne veličiny

Dosiaľ sme spoznali vo fyzike dve rozličné skupiny fyzikálnych veličín. Na určenie dĺžky, objemu alebo hmotnosti stačí udať okrem jednotky len ich číselnú hodnotu. Napríklad $l = 2$ m, $V = 0{,}1\text{ m}^3$, $m = 1{,}1$ kg. Na určenie sily alebo posunutia nestačí udať len veľkosť sily, napr. $F = 10$ N alebo veľkosť posunutia $d = 5$ m. Na určenie sily alebo posunutia treba okrem veľkosti udať ešte ich smer.

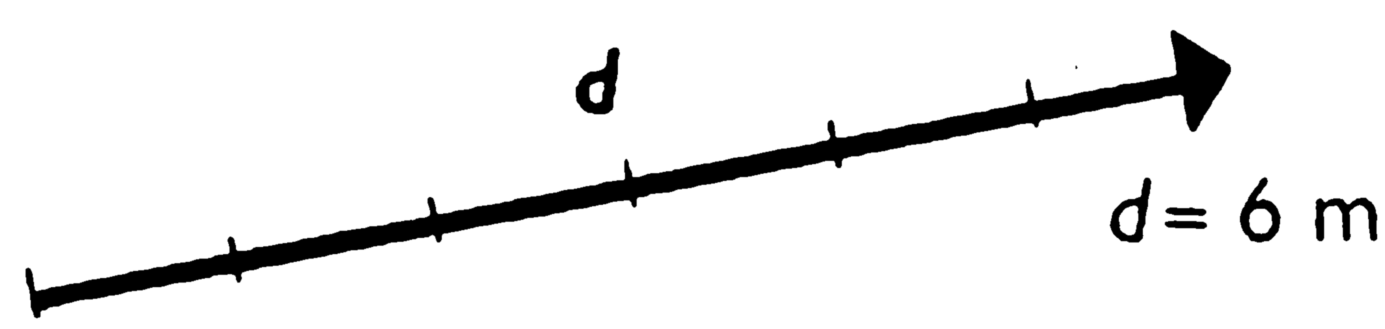
Skalárne fyzikálne veličiny — skaláry (z lat. *scalae* — schody, stupnice) sú napríklad čas, hustota, teplota, obsah. **Určené sú číselnou hodnotou a jednotkou, v ktorej sa príslušná veličina meria.** Hodnotu skaláru znázorňujeme bodom na príslušnej stupnici, napr. bodom na teplotnej stupnici, bodom na dĺžkovej stupnici (stupnici dĺžkového meradla), bodom na časovej stupnici (časovej osi) alebo na ciferníku hodín. Skaláry označujeme písmenami, dohodnutými značkami príslušných veličín.

Vektorové fyzikálne veličiny — vektory sú napr. sila a posunutie. **Na určenie týchto veličín treba udať nielen ich veľkosť, ale aj smer.**

Ako už vieme, na počítanie s týmito veličinami platia odlišné pravidlá ako na počítanie s reálnymi číslami s jednotkou. Napríklad vektory sčitujeme podľa rovnobežníkového pravidla. S ďalšími pravidlami počítania s vektorovými veličinami sa oboznámime postupne. Ako symbol pre vektory sa v tlači používa polohrubé písmeno $\boldsymbol{F}$ (sila), $\boldsymbol{d}$ (posunutie); v texte písanom rukou vektory označujeme šípkou nad písmenom — značkou fyzikálnej veličiny, napr. $\vec{F}$, $\vec{d}$.



Obr. 1-17



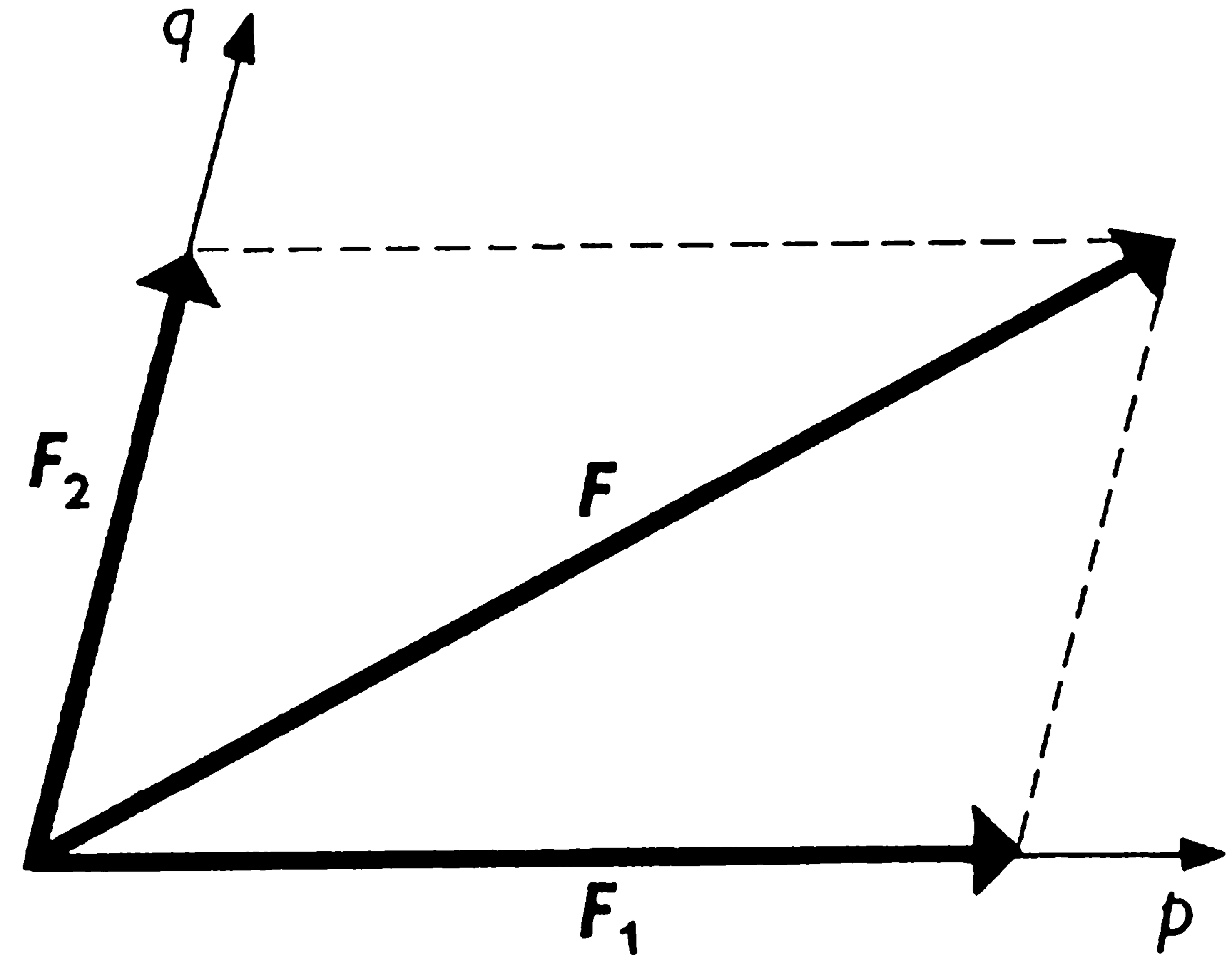
Obr. 1-18

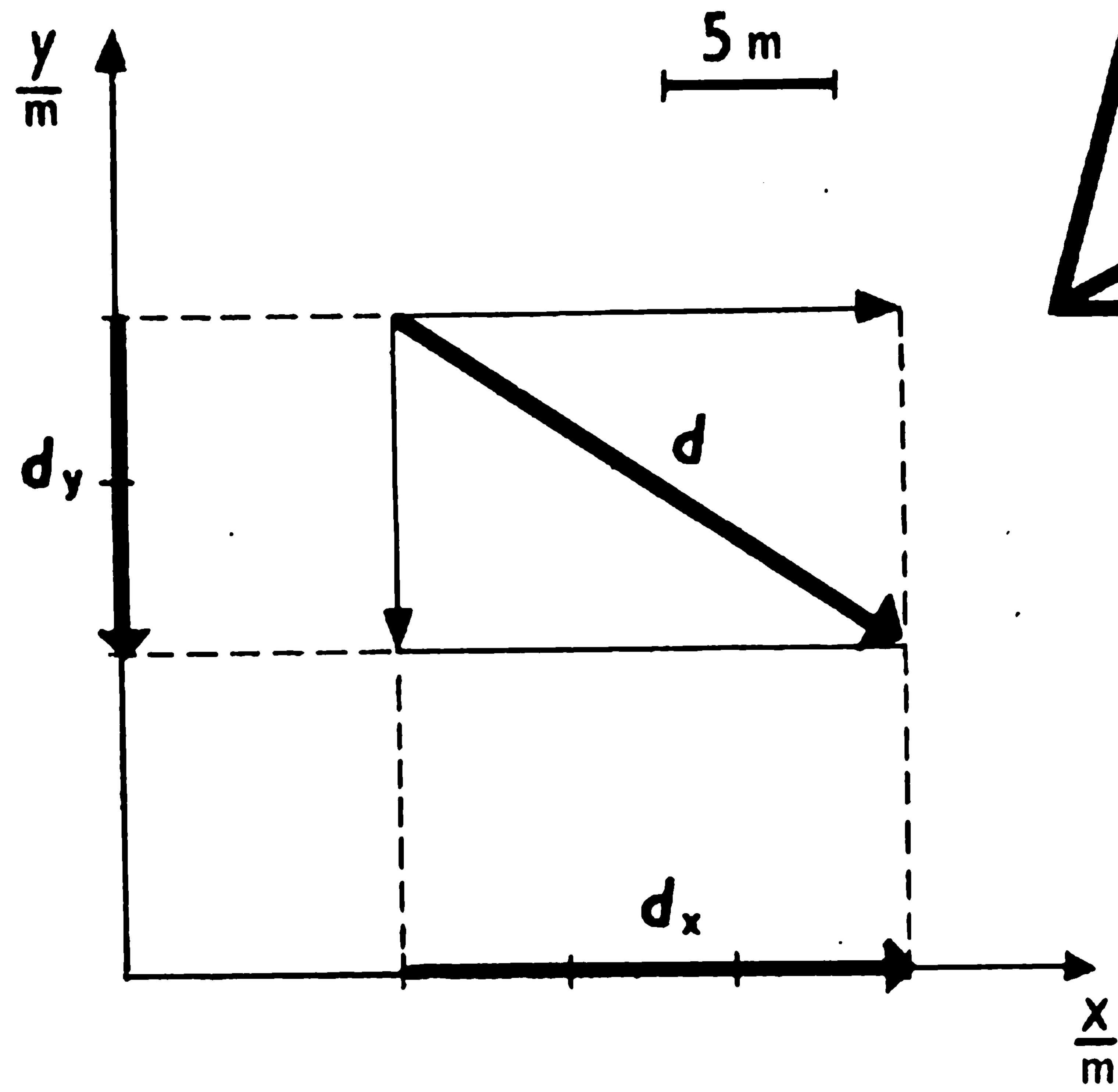
Graficky vektor znázorňujeme **orientovanou úsečkou.** Priamka preložená jej koncovými bodmi sa nazýva vektorová priamka. Vektorová priamka a šípka označujú smer a dĺžka úsečky znázorňuje veľkosť vektora. Veľkosť vektora je skalár. Na obr. 1-17 je znázornená sila $\boldsymbol{F}$ a na obr. 1-18 posunutie $\boldsymbol{d}$. Ich veľkosti sú $F = |\boldsymbol{F}| = 50$ N, $d = |\boldsymbol{d}| = 6$ m. Treba rozlišovať medzi vektorom vo fyzike (napr. silou alebo posunutím) a jeho matematickým (geometrickým) znázornením orientovanou úsečkou. Sčítanie alebo odčítanie vektorov má vo fyzike význam len pre fyzikálne veličiny rovnakého druhu (napr. len pre sily, alebo len pre posunutia). **Pri násobení vektora reálnym číslom je súčin opäť vektor rovnakého druhu.** Ak násobíme napr. silu reálnym číslom, je tento súčin opäť sila; ak násobíme reálnym číslom posunutie, výsledkom je posunutie.

Na príklade sily sa ešte oboznámime s **rozkladom vektora do daných smerov.** Rozklad sily do daných smerov robíme pomocou **vektorového rovnobežníka** (obr. 1-19). Smery sú určené polpriamkami p a q. Hľadáme také dve sily $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$, aby ich zložením vznikla sila $\boldsymbol{F}$. Sily $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ nazývame **zložky** sily $\boldsymbol{F}$. Vo fyzike postupujeme rovnako aj pri rozklade iných vektorov, teda aj pri rozklade posunutia do daných smerov.

Dôležitý je rozklad vektora do smerov určených osou x a osou y

Obr. 1-19





Obr. 1-20

zvolenej vzťažnej sústavy (obr. 1-20). Zložky vektora $\boldsymbol{d}$ v tomto prípade označujeme $\boldsymbol{d}_x$ a $\boldsymbol{d}_y$

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_x + \boldsymbol{d}_y$$

Veľkosti zložiek (kladné čísla s jednotkou) v našom príklade sú

$$|\boldsymbol{d}_x| = 15 \text{ m}, \qquad |\boldsymbol{d}_y| = 10 \text{ m}$$

Zložka $\boldsymbol{d}_x$ má súhlasný smer s osou x, zložka $\boldsymbol{d}_y$ má opačný smer ako os y.

Úlohy

1. Dané je posunutie OA a dve polpriamky určené bodmi $p \equiv OB$ a $q \equiv OC$. Rozložte vektor posunutia do smerov určených týmito polpriamkami. Body O, A, B, C majú súradnice: $O = [0 \text{ m}, 0 \text{ m}]$, $A = [5 \text{ m}, 5 \text{ m}]$, $B = [4 \text{ m}, 2 \text{ m}]$, $C = [2 \text{ m}, 4 \text{ m}]$.
2. Určte zložky vektora posunutia daného orientovanou úsečkou $\boldsymbol{AB}$ do súradnicových osí a veľkosti zložiek. Súradnice bodov sú $A = [3 \text{ m}, 2 \text{ m}]$, $B = [7 \text{ m}, 5 \text{ m}]$.
[[4 m, 3 m]]

1.7 Rovnomerné a nerovnomerné pohyby

Zo state 1.2 viete, že podľa tvaru trajektórie môžeme pohyby rozdeliť na priamočiare a krivočiare. Podľa veľkosti rýchlosti rozdeľujeme pohyby na rovnomerné a nerovnomerné.

Rovnomerným pohybom nazývame taký pohyb, pri ktorom hmotný bod prejde v ľubovoľných, ale rovnakých časových úsekoch rovnaké dráhy. V ostatných prípadoch je pohyb nerovnomerný.

Pre dráhu a rýchlosť rovnomerného pohybu poznáte vzťah

$$\boxed{s = v\,t} \qquad \boxed{v = \frac{s}{t}}$$

kde s je dráha, ktorú prejde pohybujúci sa hmotný bod za čas t. Pritom predpokladáme, že v okamihu 0 s, od ktorého počítame čas, je prejdená dráha 0 m.

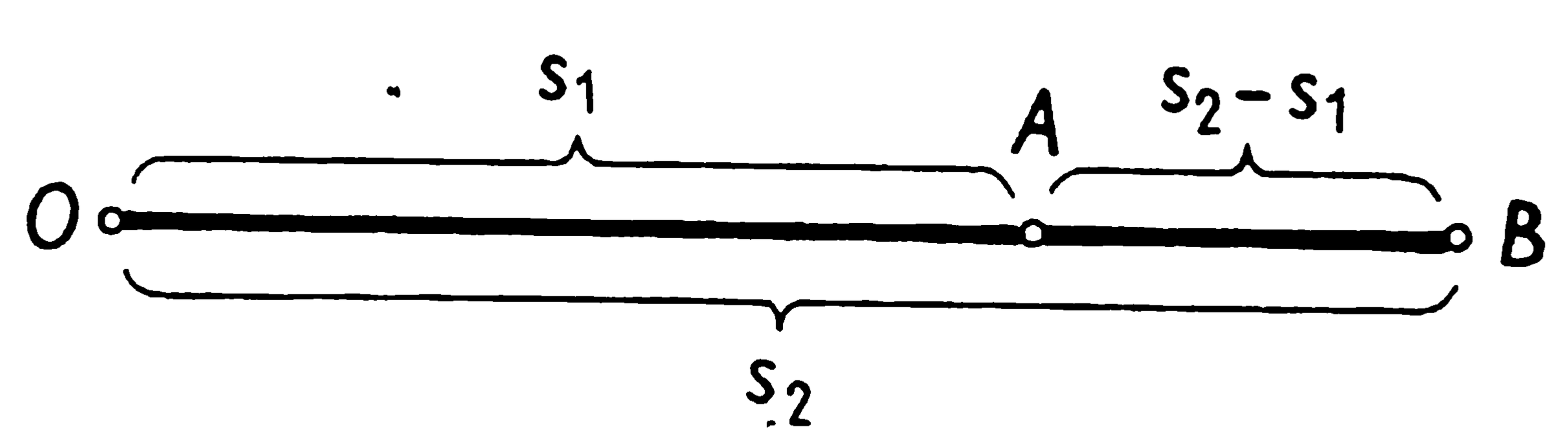
Viete už, že pre nerovnomerný pohyb je užitočné zaviesť pojem **priemerná rýchlosť** v_p nerovnomerného pohybu

$$\boxed{v_p = \frac{s}{t}}$$

kde s je dráha prejdená pri nerovnomernom pohybe za čas t.

Priemerná rýchlosť nerovnomerného pohybu sa rovná rýchlosti rovnomerného pohybu, pri ktorom by hmotný bod prešiel rovnakú dráhu za rovnaký čas.

Ak chceme určiť veľkosť rýchlosti rovnomerného pohybu, nemusíme merať celú dráhu; stačí určiť rýchlosť na ktoromkoľvek úseku trajektórie. Napríklad za čas t_1 prejde pohybujúci sa hmotný bod dráhu s_1, za čas t_2 ($t_1 < t_2$) prejde dráhu s_2 (obr. 1-21). V dobe $t_2 - t_1 = \Delta t$ prejde bod úsek



Obr. 1-21

dráhy $s_2 - s_1 = \Delta s$ (čítaj delta t, delta s; symbolom Δ vyjadrujeme všeobecne zmenu veličiny). Pretože ide o rovnomerný pohyb, musí platiť

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Podľa tohto vzťahu vieme určiť veľkosť rýchlosti rovnomerného pohybu v ktoromkoľvek okamihu, vieme teda určiť veľkosť okamžitej rýchlosti rovnomerného pohybu. Ak v tomto vzťahu berieme za čas $t_1 = 0$ s a v tomto čase dráha $s_1 = 0$ m a ak zvolíme $s_2 = s$ a $t_2 = t$, tak $\Delta s = s$ a $\Delta t = t$, potom dostaneme vzťah $v = \frac{s}{t}$.

Veľkosť okamžitej rýchlosti rovnomerného pohybu sa rovná veľkosti rýchlosti daného rovnomerného pohybu.

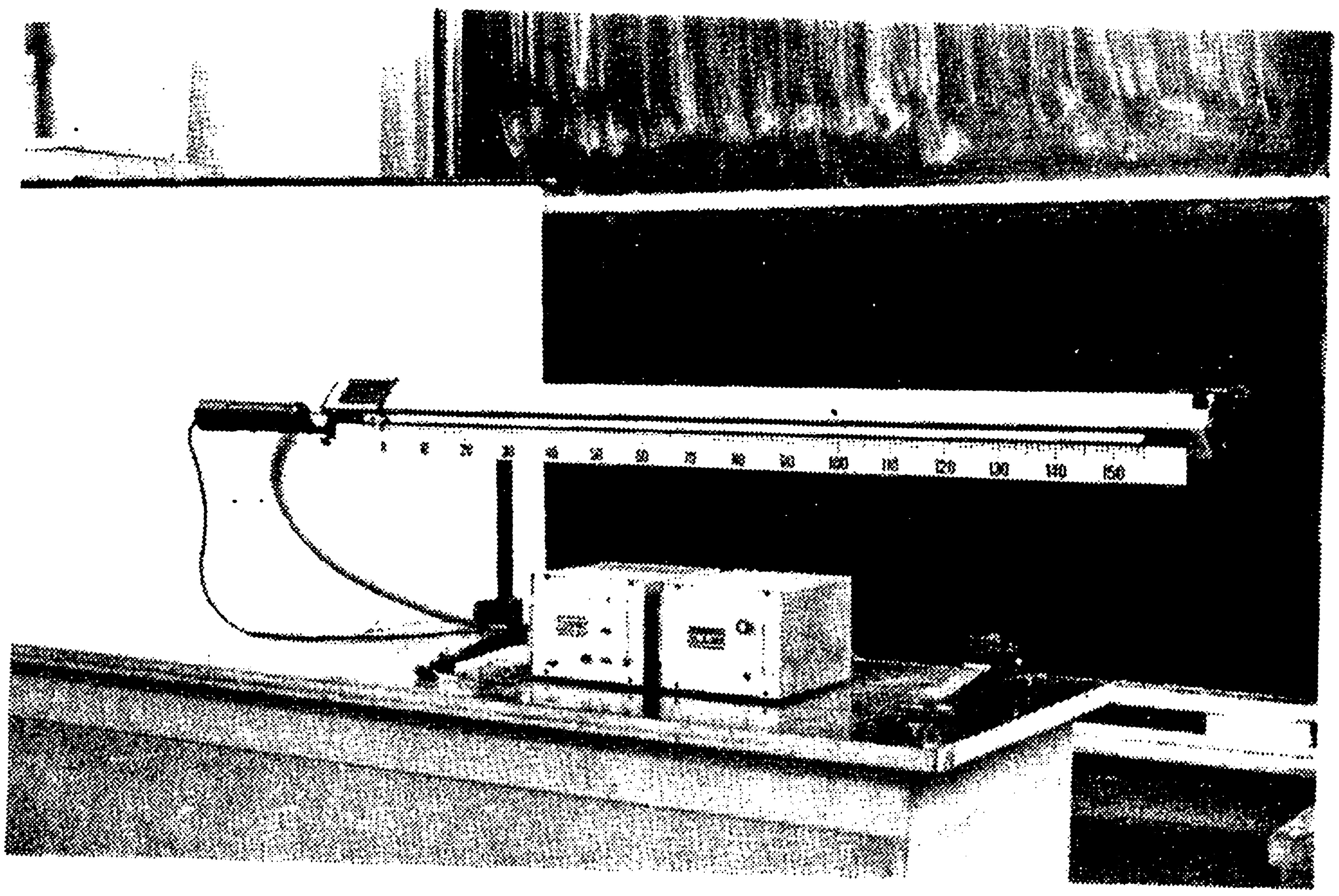
Úlohy

1. Auto ide z Prahy do Českých Budějovíc. Vzdialenosť Praha—Benešov (45 km) prejde za 35 minút, Benešov—Tábor (43 km) za 50 minút a Tábor—Budějovice (60 km) za 50 minút. Aká je priemerná rýchlosť auta na jednotlivých úsekoch cesty a celej trase v $km.h^{-1}$? [77,1 $km.h^{-1}$; 51,6 $km.h^{-1}$; 72 $km.h^{-1}$; 65,8 $km.h^{-1}$]
2. Auto prešlo rovnomerným pohybom dráhu 120 km za 1 h 30 min. Určte jeho priemernú rýchlosť. Určte dráhu, ktorú prešlo jednak za prvých 20 min, jednak za 50 min od začiatku pohybu. Vypočítajte rýchlosť auta medzi dvadsiatou a päťdesiatou minútou jazdy. [80,0 $km.h^{-1}$; 26,7 km; 66,7 km; 80,0 $km.h^{-1}$]

1.8 Rovnomerný pohyb. Rovnomerný priamočiary pohyb

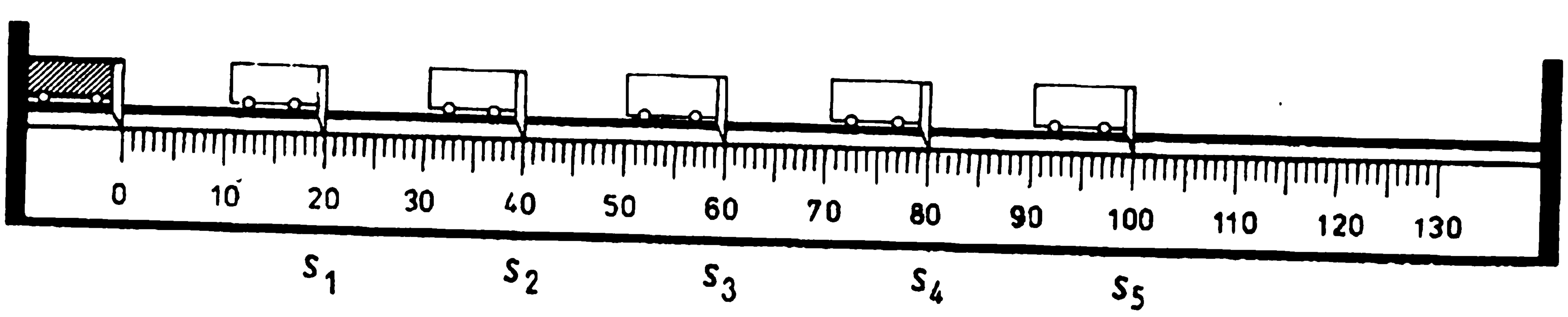
Pozorujme pohyb vozíka podľa obr. 1-22 a zaznamenajme do tabuľky údaje o dráhach s prejdených za čas t

$\frac{t}{\text{s}}$	0	1	2	3	4
$\frac{s}{\text{m}}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8

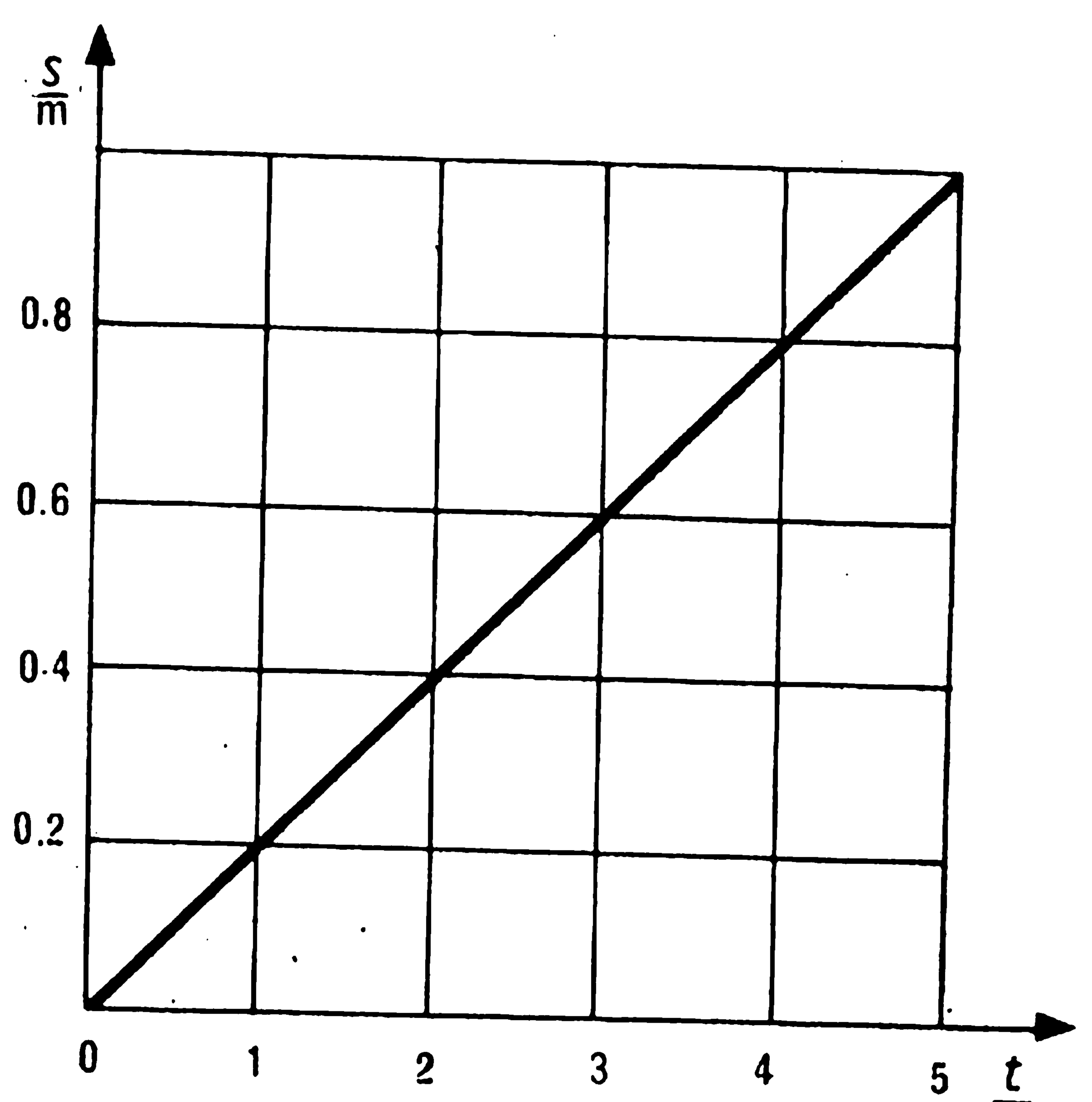


Obr. 1-22a

Fotografia vzduchovej dráhy. Vozíček sa pohybuje na vzduchovom vankúši. Tým sa prakticky odstraňuje vplyv trenia na pohyb vozíčka



Obr. 1-22b



Obr. 1-23

Zostrojme graf závislosti dráhy pohybu od času (stručne graf dráhy) (obr. 1-23).

Vidíme, že grafom dráhy sledovaného rovnomerného pohybu je priamka prechádzajúca začiatkom. Toto platí pre každý rovnomerný pohyb nezávisle od toho, či je tento pohyb priamočiary alebo krivočiary.

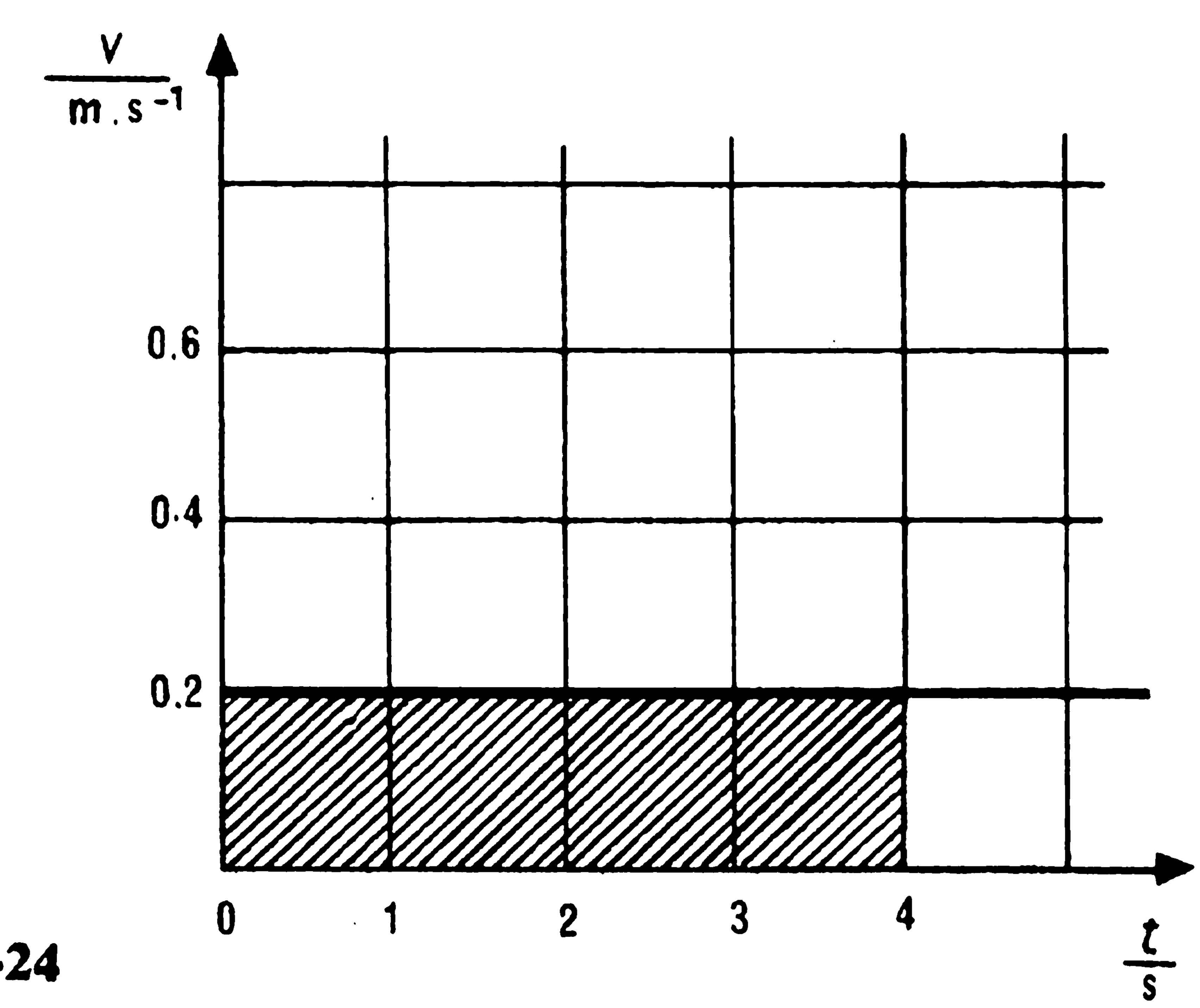
Ak v čase $t_1 = 0$ s teleso už prešlo dráhu $s_1 = s_0$, grafom dráhy rovnomerného pohybu bude časť priamky, ktorá na osi dráhy prechádza bodom s_0. Pre dráhu v čase $t_2 = t$ potom platí $s = s_0 + v\ t$.

Zostavme tabuľku rýchlosti v vozíka v závislosti od času t

$\frac{t}{s}$	1	2	3	4
$\frac{v}{m.s^{-1}}$	0,2	0,2	0,2	0,2

a zostrojme graf závislosti rýchlosti rovnomerného pohybu od času (graf rýchlosti, obr. 1-24).

Grafom je časť priamky rovnobežná s časovou osou a pretínajúca os rýchlosti v bode 0,2 $m.s^{-1}$.



Obr. 1-24

Určme obsah vyšrafovaného obdĺžnika v daných jednotkách

$$P = 4\ \mathrm{s} \,.\, 0{,}2\ \mathrm{m}\,.\,\mathrm{s}^{-1} = 0{,}8\ \mathrm{m}$$

Všeobecne môžeme písať $t\, v = s$.

Vidíme, že obsah vyznačeného obrazca zodpovedá prejdenej dráhe.

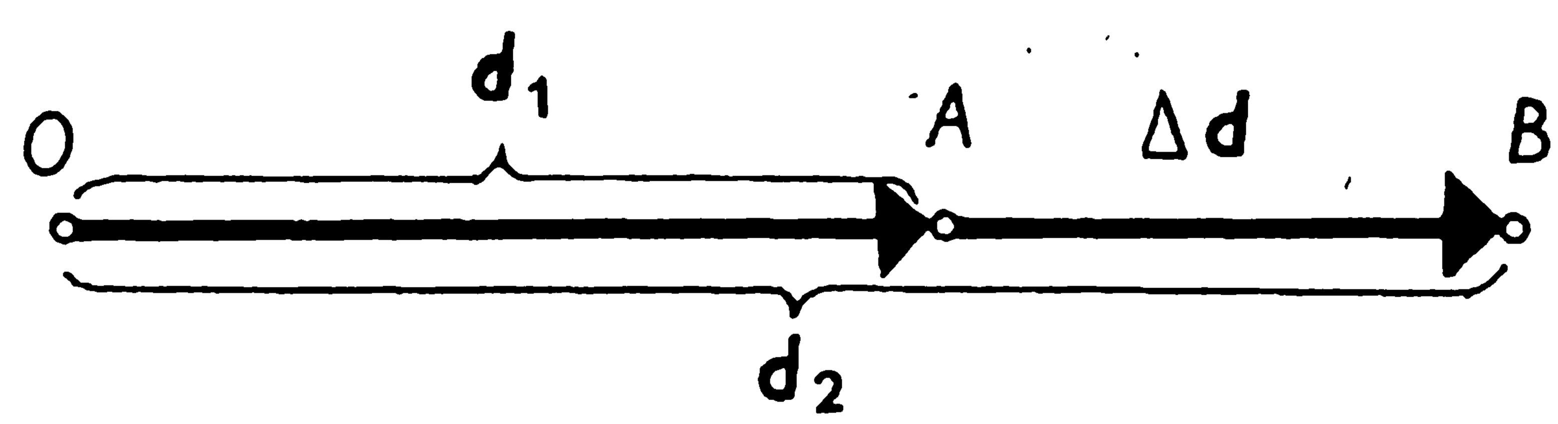
Vektor rýchlosti

Podľa známych vzťahov viete vypočítať veľkosť okamžitej rýchlosti rovnomerného priamočiareho pohybu podľa vzťahu

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Keď poznáte napr. stálu veľkosť rýchlosti lietadla letiaceho z istého miesta, no nepoznáte smer rýchlosti, nemôžete ešte určiť, do ktorého miesta doletí za daný čas. Veličina **okamžitá rýchlosť** je určená nielen svojou veľkosťou, ale i smerom. Okamžitá rýchlosť je vektorová veličina.

Pri priamočiarom pohybe určuje smer rýchlosti vektor posunutia, ktorý leží v danej trajektórii. V čase t_1 je hmotný bod pohybujúci sa rovnomerne po priamke v bode A (obr. 1-25), v čase t_2 je v bode B.



Obr. 1-25

Pri pohybe po priamke v danom smere sa veľkosť vektora posunutia rovná dráhe

$$|\boldsymbol{d}| = d = s$$

Pre veľkosť okamžitej rýchlosti teda platí

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{d}{\Delta t}$$

Pri rovnomernom pohybe po priamke je smer rýchlosti rovnaký ako smer posunutia. Platí teda

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{d}}{\Delta t}$$

Okamžitá rýchlosť (vektor okamžitej rýchlosti) rovnomerného priamočiareho pohybu je určená pomerom posunutia a zodpovedajúcej doby, v ktorej posunutie nastalo.

Ak uvažujeme o posunutí za čas počítaný od začiatku pohybu (t. j. v čase $t_1 = 0$ je hmotný bod v bode A a v čase t_2 v bode B, teda $\Delta t = t - 0 = t$), môžeme pre rýchlosť rovnomerného pohybu písať

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{d}}{t}$$

Odtiaľ pre vektor posunutia dostaneme

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{v} t$$

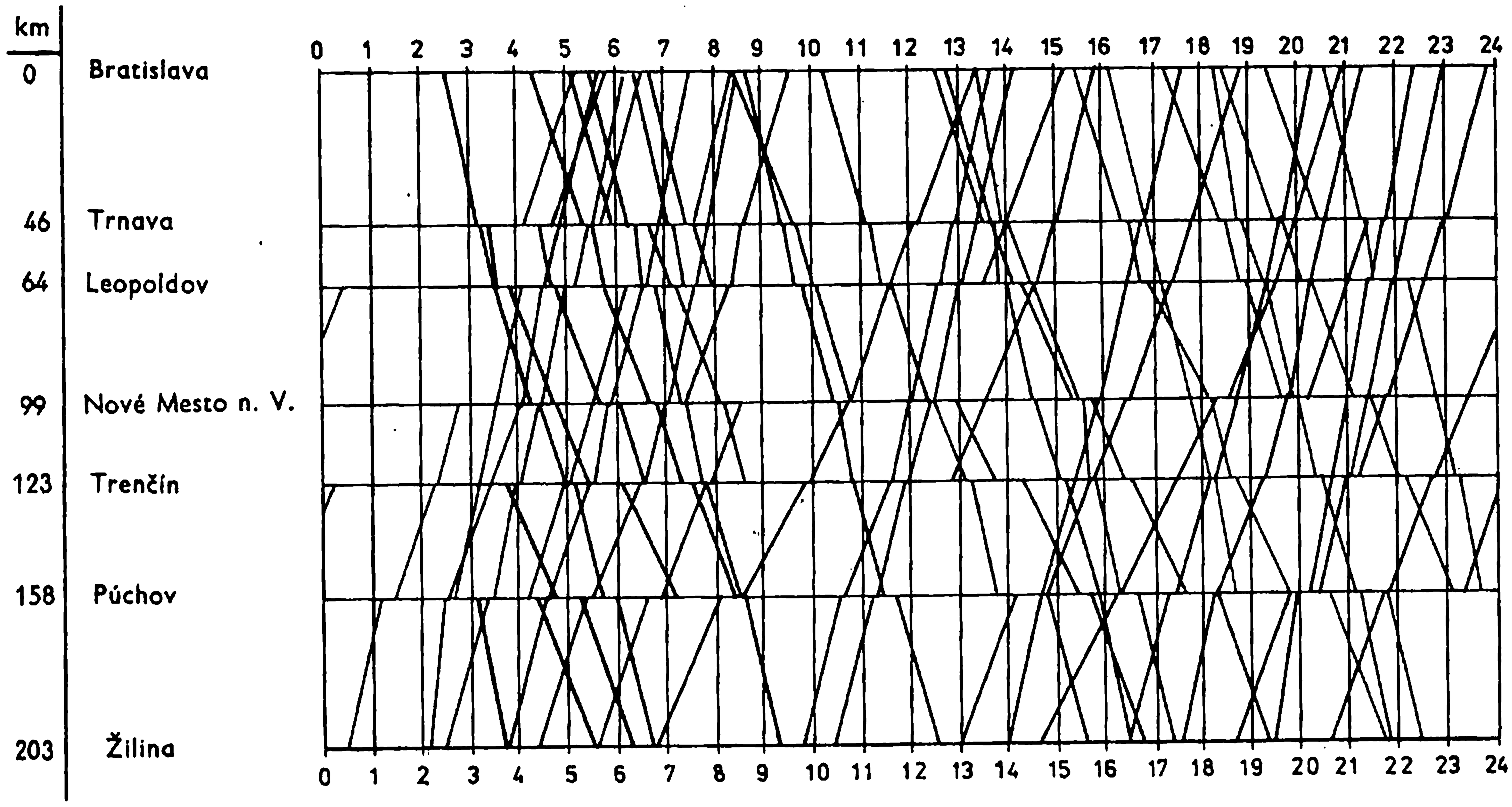
V tejto kapitole sa prvýkrát stretávame s násobením a s delením vektorovej fyzikálnej veličiny skalárnou veličinou.

Súčin (podiel) vektorovej veličiny a skalárnej veličiny je opäť vektorová veličina, ale všeobecne iného druhu, ako sú veličiny v súčine (podiele). Veľkosť výslednej vektorovej veličiny sa rovná súčinu (podielu) veľkostí veličín vystupujúcich v súčine (podiele). Výsledná vektorová veličina má rovnaký smer ako vektorová veličina v súčine (podiele), ak skalárna veličina má kladnú číselnú hodnotu a opačný smer, ak skalárna veličina má zápornú číselnú hodnotu.

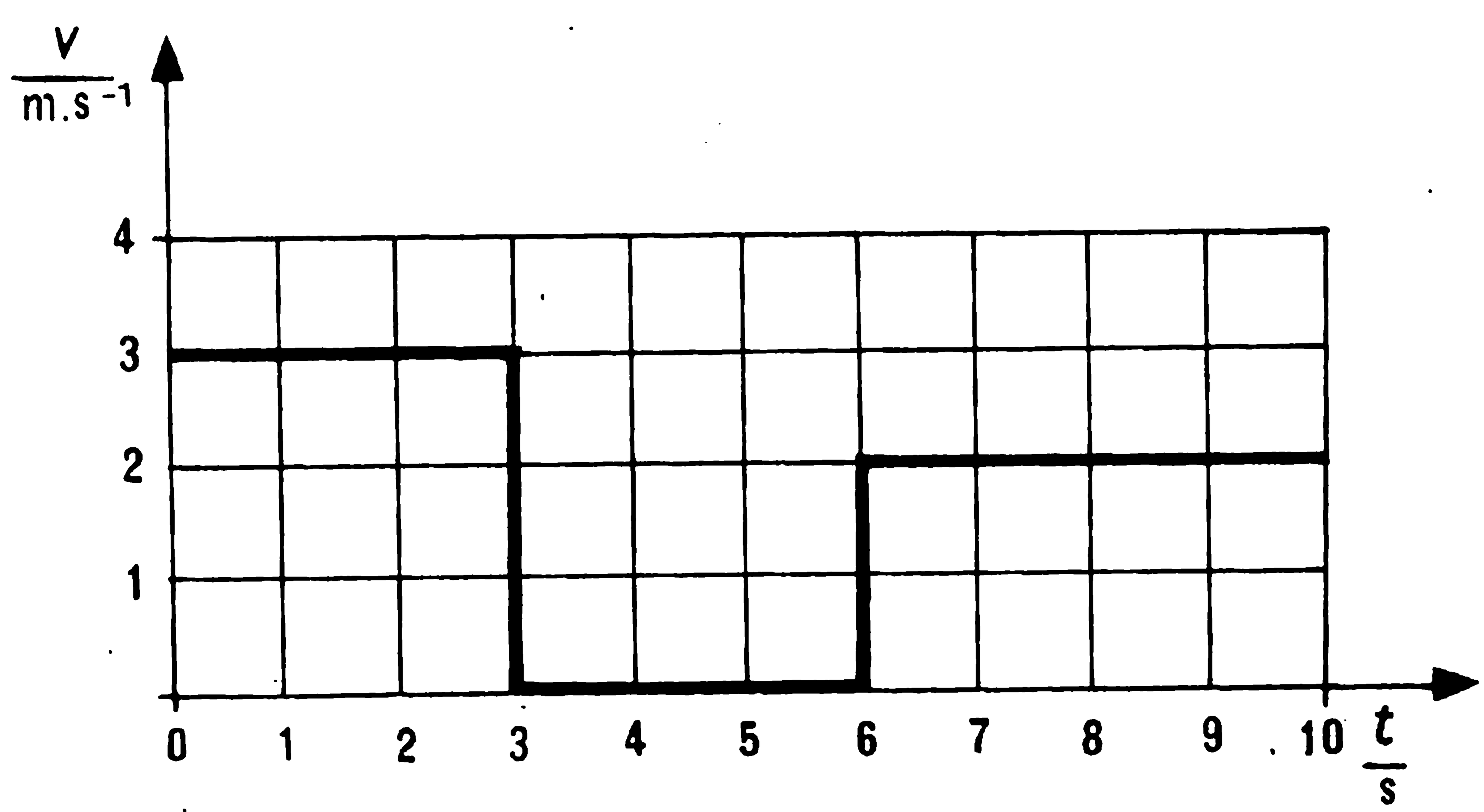
V našom príklade má vektor posunutia a vektor okamžitej rýchlosti rovnaký smer (pretože čas má vždy kladné číselné hodnoty), ale fyzikálne sú to celkom odlišné veličiny. Na ich meranie sa používajú jednotky rozličného druhu: pre posunutie m, pre rýchlosť $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Úlohy

1. Na obr. 1-26 je úsek grafického cestovného poriadku (grafikonu), ktorý sa používa v železničnej doprave. Rozhodnite, ktorý vlak má vo vyznačenom úseku dráhy najväčšiu a ktorý najmenšiu rýchlosť.



Obr. 1-26



Obr. 1-27

2. Na obr. 1-27 je graf závislosti rýchlosti pohybu hmotného bodu od času. Zostrojte k nemu graf závislosti dráhy od času, ak v bode $t = 0$ je aj $s = 0$. Akú veľkú dráhu prejde hmotný bod za 10 s? [17 m]
3. Riešte graficky úlohu: Zo stanice A vyjde nákladný vlak rýchlosťou $v_1 = 50\ \mathrm{km.h^{-1}}$. O tri hodiny za ním vyjde rýchlik, ktorý má rýchlosť $80\ \mathrm{km.h^{-1}}$. V akej vzdialenosti je stanica B, v ktorej sa budú obidva vlaky míňať? Za aký čas po odchode rýchlika zo stanice A sa to stane? Výsledok overte výpočtom. [400 km; 5 h]

1.9 Rýchlosť rovnomerne zrýchleného pohybu

Lietadlo sa pri štartovaní rozbieha po vodorovnej priamočiarej dráhe letiska. Aby mohlo vzlietnuť, musí dosiahnuť rýchlosť niekoľko sto kilometrov za hodinu. Veľkosť rýchlosti lietadla vzrastá, pohyb lietadla je **zrýchlený.**

Sledujme pohyb vozíka, ktorý uvádza do pohybu stála sila. Pozorujeme, že jeho pohyb je zrýchlený, priamočiary. Zaujíma nás okamžitá rýchlosť v jednotlivých miestach trajektórie. Ak sila prestane v istom okamihu pôsobiť, meraním dráhy prejdenej za rovnaké časové intervaly sa presvedčíme, že pohyb vozíka je rovnomerný. Rýchlosť rovnomerného pohybu v tomto prípade sa teda rovná okamžitej rýchlosti, ktorú mal vozík, keď naň prestala pôsobiť sila meniaca jeho rýchlosť. Môžeme teda povedať:

Okamžitá rýchlosť telesa v istom okamihu je rýchlosť, ktorou by sa teleso pohybovalo, keby od tohto okamihu bol jeho pohyb rovnomerný priamočiary.

Sledujme pri našom pokuse, akú veľkosť rýchlosti získa vozík po jednej, dvoch, troch a štyroch sekundách zrýchleného pohybu. Po jednej sekunde necháme vozík pohybovať sa ďalej rovnomerne okamžitou rýchlosťou, ktorú mal na konci prvej sekundy; túto rýchlosť odmeriame. Podobne urobíme aj pre ďalšie sekundy a hodnoty zapíšeme do tabuľky:

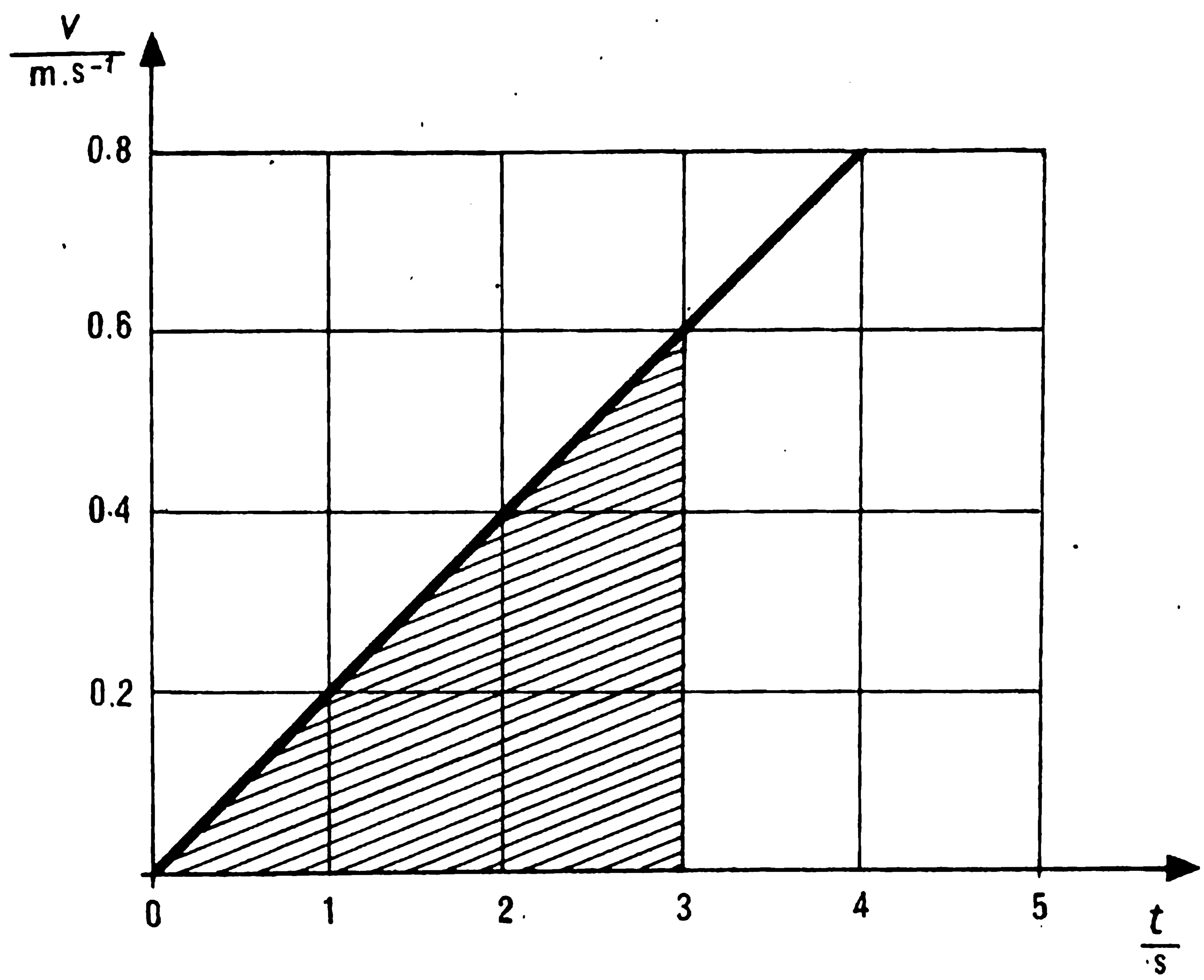
$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	1	2	3	4
$\frac{v}{\mathrm{cm.s^{-1}}}$	0	$20=20.1$	$40=20.2$	$60=20.3$	$80=20.4$

Z pokusu je zrejmé, že veľkosť rýchlosti vzrastá priamo úmerne s časom pohybu, $v \sim t$.

Túto závislosť možno zapísať v tvare

$$\boxed{v = a\,t}$$

kde a je veľkosť novej veličiny, ktorú nazývame **zrýchlenie.**



Obr. 1-28

Zostrojme graf závislosti rýchlosti rovnomerne zrýchleného pohybu od času pre náš pokus (obr. 1-28). Vidíme, že grafom rýchlosti je časť priamky prechádzajúcej začiatkom.

Keby vozík mal už na začiatku (v čase $t_1 = 0$) nenulovú **začiatočnú rýchlosť** v_0, potom by sme podobným pokusom ako predtým zistili pre veľkosť jeho okamžitej rýchlosti v čase $t_2 = t$ zavislosť

$$\boxed{v = v_0 + a\,t}$$

Pohyb, ktorého veľkosť okamžitej rýchlosti v je rastúca lineárna funkcia času, nazýva sa **rovnomerne zrýchlený pohyb.** Pohybujú sa ním napr. telesá padajúce vo vákuu k zemi, kĺzajúce sa bez trenia po naklonenej rovine a približne aj rozbiehajúce sa dopravné prostriedky.

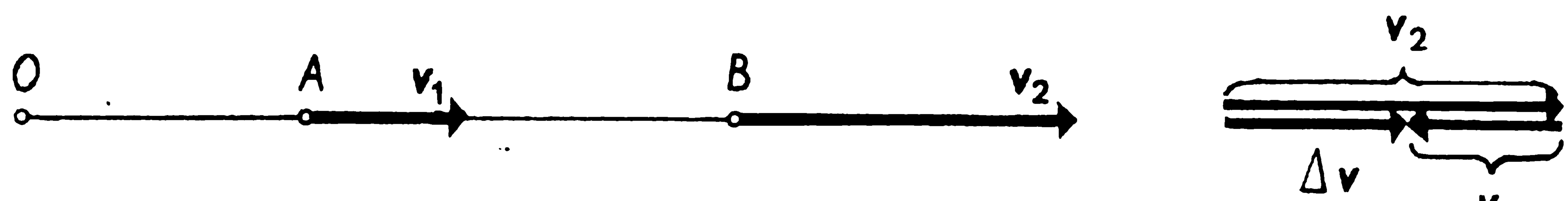
Úlohy

1. S akým veľkým zrýchlením sa na štartovacej dráhe rozbieha lietadlo, ktoré za 20 sekúnd dosiahne rýchlosť 150 $m.s^{-1}$? [7,5 $m.s^{-2}$]
2. Šofér auta na priamom úseku diaľnice stlačí akcelerátor a jednu minútu sa pohybuje so zrýchlením 0,2 $m.s^{-2}$ tak, že dosiahne rýchlosť 108 $km.h^{-1}$. Aká bola rýchlosť auta pred pridaním plynu? [64,8 $km.h^{-1}$]

1.10 Zrýchlenie priamočiareho rovnomerne zrýchleného pohybu

Pri priamočiarom rovnomerne zrýchlenom pohybe sa za dobu $\Delta t = t_2 - t_1$ premiesti hmotný bod z miesta A do miesta B. Okamžitá rýchlosť v mieste A je $\boldsymbol{v}_1$ a v mieste B $\boldsymbol{v}_2$ (obr. 1-29). Zmena okamžitej rýchlosti pri pohybe hmotného bodu z miesta A do miesta B je

$$\boxed{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = \Delta \boldsymbol{v}}$$



Obr. 1-29

Vektor zrýchlenia priamočiareho rovnomerne zrýchleného pohybu je určený podielom

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}}$$

Pre veľkosť zrýchlenia platí $|\boldsymbol{a}| = a = \dfrac{|\Delta \boldsymbol{v}|}{\Delta t}$, kde $|\Delta \boldsymbol{v}|$ je veľkosť zmeny rýchlosti v dobe Δt.

Zrýchlenie priamočiareho rovnomerne zrýchleného alebo spomaleného pohybu je určené podielom zmeny okamžitej rýchlosti a zodpovedajúcej doby, za ktorú zmena nastala. Zrýchlenie má rovnaký smer ako zmena rýchlosti. Pri pohybe priamočiarom rovnomerne zrýchlenom má zrýchlenie aj rovnaký smer ako posunutie a vektor okamžitej rýchlosti.

Pre výslednú okamžitú rýchlosť teda platí

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{a}\,(t_2 - t_1)$$

Keď čas meriame od začiatku pohybu a začiatočnú rýchlosť označíme v_0, pre rýchlosť rovnomerne zrýchleného priamočiareho pohybu za čas t platí vzťah

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}\, t$$

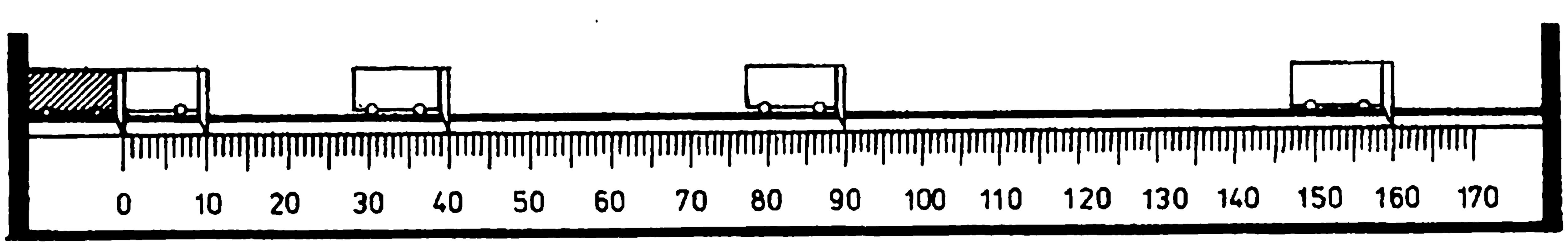
Ak je začiatočná rýchlosť nulová, platí

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\, t$$

1.11 Dráha rovnomerne zrýchleného pohybu

Zopakujme predchádzajúci pokus a zmerajme prejdené dráhy na konci prvej, druhej, tretej a štvrtej sekundy (obr. 1-30). Namerané hodnoty zapíšeme do tabuľky.

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	1	2	3	4
$\frac{s}{\mathrm{cm}}$	0	$10 = 1^2 . 10$	$40 = 2^2 . 10$	$90 = 3^2 . 10$	$160 = 4^2 . 10$



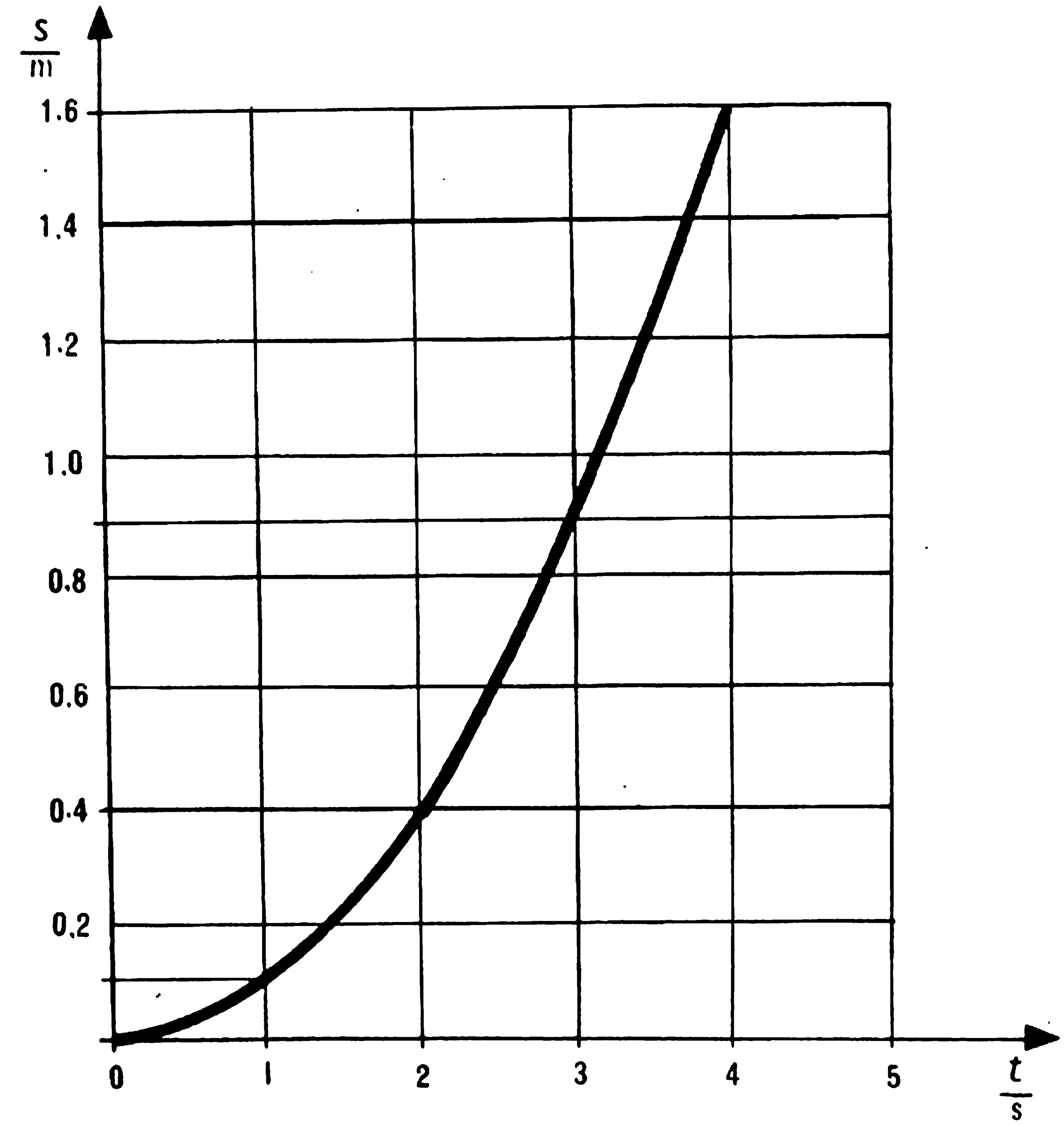
Obr. 1-30

Z tabuľky je zrejmé, že dráha je priamo úmerná druhej mocnine času pohybu

$$s \sim t^2$$

Zostrojme graf závislosti dráhy rovnomerne zrýchleného pohybu od času (obr. 1-31), ak $v_0 = 0$ a $s_0 = 0$. Grafom je časť krivky; táto krivka sa

Obr. 1-31



nazýva parabola. Pretože chceme závislosť dráhy od času zapísať rovnicou, využijeme vlastnosti grafu závislosti rýchlosti rovnomerne zrýchleného pohybu od času. Podobne ako pri rovnomernom pohybe obsah vyšrafovanej plochy v daných jednotkách určuje veľkosť dráhy (pozri obr. 1-28)

$$P = \frac{1}{2} . 3\ \mathrm{s} . 0{,}6\ \mathrm{m} . \mathrm{s}^{-1} = 0{,}9\ \mathrm{m}\ .\ \mathrm{s}$$

Všeobecne

$$s = \frac{1}{2}\, t\, v$$

Pretože platí $v = a\, t$, dostaneme

$$s = \frac{1}{2}\, t\, a\, t = \frac{1}{2}\, a\, t^2$$

Pre dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu platí

$$\boxed{s = \frac{1}{2}\, a\, t^2}$$

Ak uvažujeme o priamočiarom pohybe jedným smerom, dráha sa rovná veľkosti posunutia

$$s = d$$

a pre posunutie hmotného bodu pri rovnomerne zrýchlenom pohybe po priamke môžeme napísať

$$\boxed{\boldsymbol{d} = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{a}\, t^2}$$

Keď na začiatku rovnomerne zrýchleného priamočiareho pohybu mal hmotný bod začiatočnú rýchlosť v_0 a prešiel dráhu s_0, pre dráhu platí

$$\boxed{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\, a\, t^2}$$

Pohyb, ktorého veľkosť rýchlosti je klesajúcou lineárnou funkciou času, nazýva sa **rovnomerne spomalený** pohyb. Zrýchlenie pri priamočiarom pohybe má opačný smer ako okamžitá rýchlosť. Keď má rovnomerne spomalený pohyb začiatočnú rýchlosť v_0, potom až do okamihu zastavenia ($v = 0$) pre veľkosť okamžitej rýchlosti platí

$$\boxed{v = v_0 - a\, t}$$

Pre dráhu rovnomerne spomaleného pohybu platí

$$\boxed{s = v_0 t - \frac{1}{2}\, a\, t^2}$$

Príklad

Rýchlik ide po priamej trati rýchlosťou 90 km.h^{-1}. Pred stanicou začne zmenšovať svoju rýchlosť. Rušňovodič s ohľadom na cestujúcich volí veľkosť opačného zrýchlenia 0,1 m.s^{-2}. Vypočítajte, v akej vzdialenosti od stanice musí začať rýchlik zmenšovať svoju rýchlosť a ako dlho tak pôjde?

$v_0 = 90$ km.h$^{-1} = 25$ m.s^{-1}
$a = 0{,}1$ m.s^{-2}

$s = ?$ $\quad t = ?$

Rýchlik sa pohybuje rovnomerne spomaleným pohybom, pre ktorý platí

$$v = v_0 - a\,t$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

Veľkosť rýchlosti vlaku sa rovnomerne zmenšuje. Na stanici sa vlak zastaví, veľkosť jeho okamžitej rýchlosti je $v_s = 0$, teda platí $0 = v_0 - a\,t_s$. Odtiaľ určíme čas jazdy

$$t = \frac{v_0}{a}$$

Pre dráhu, ktorú rýchlik za tento čas prešiel, platí

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}\,a\,t^2 = v_0\frac{v_0}{a} - \frac{1}{2}\,a\,\frac{v_0^2}{a^2} = \frac{v_0^2}{2a}$$

$$s = \frac{v_0^2}{2a}$$

Rozmerová kontrola (kontrola správnosti rovnice dosadením jednotiek do vzťahov pre veličiny):

$$[t] = \frac{[v_0]}{[a]} = \frac{\mathrm{m.s^{-1}}}{\mathrm{m.s^{-2}}} = \mathrm{s}$$

$$[s] = \frac{[v_0^2]}{[2a]} = \frac{\mathrm{m^2.s^{-2}}}{\mathrm{m.s^{-2}}} = \mathrm{m}$$

Hodnoty: $\quad t = \frac{25}{0{,}1}\,\mathrm{s} = 250\ \mathrm{s}$

$$s = \frac{25^2}{2.0{,}1}\,\mathrm{m} = 3\ 125\ \mathrm{m}$$

Vlak pôjde rovnomerne spomaleným pohybom 4 min 10 s a prejde dráhu 3,1 km.

Poznámka: Vzorové riešenie je návodom na postup pri riešení úloh. V ďalších príkladoch budeme kvôli úspornosti používať skrátený zápis.

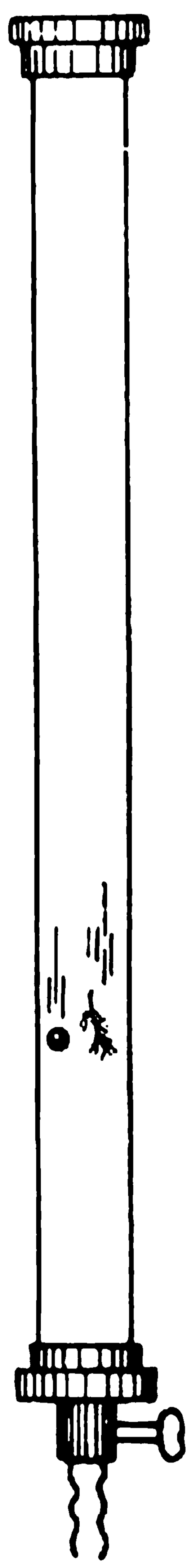
Úlohy

1. Auto sa rozbieha a za dobu 10 s prejde dráhu 50 m. S akým veľkým zrýchlením sa rozbieha? [1 m.s^{-2}] 1 min
2. Vlak sa rozbieha 1 min so zrýchlením 25 cm.s^{-2}. Akú rýchlosť nadobudne za túto dobu a akú dráhu prejde? [15 m.s^{-1}; 450 m]
3. Družica obiehajúca okolo Zeme vo výške 800 km má rýchlosť 7,46 km.s^{-1}. Za akú dobu a s akým veľkým zrýchlením by sa musela pohybovať od štartu až na obežnú dráhu, aby dosiahla túto rýchlosť, keby jej pohyb bol priamočiary rovnomerne zrýchlený? [214 s; 34,8 m.s^{-2}]
4. Lietadlo, ktoré má rýchlosť 1 080 km.h^{-1}, začne sa pohybovať počas 1 minúty so zrýchlením 1 m.s^{-2}. Aká bude jeho výsledná rýchlosť? Akú dráhu prejde počas tejto minúty? [1 510 km.h^{-1}; 21,6 km]
5. Zostrojte graf závislosti dráhy a rýchlosti od času pre rovnomerne spomalený pohyb, ak veľkosť zrýchlenia $a = 4$ m.s^{-2} a pre $t = 0$ s je $s = 0$ m a $v_0 = 10$ m.s^{-1}.
6. Zostrojte graf závislosti dráhy od času pre pohyb, ktorého graf závislosti rýchlosti od času je na obr. 1-28, ak pre $t = 0$ s je $s = 0$ m. Akú celkovú dráhu prejde teleso pri tomto pohybe za 7 s? [4,9 m]

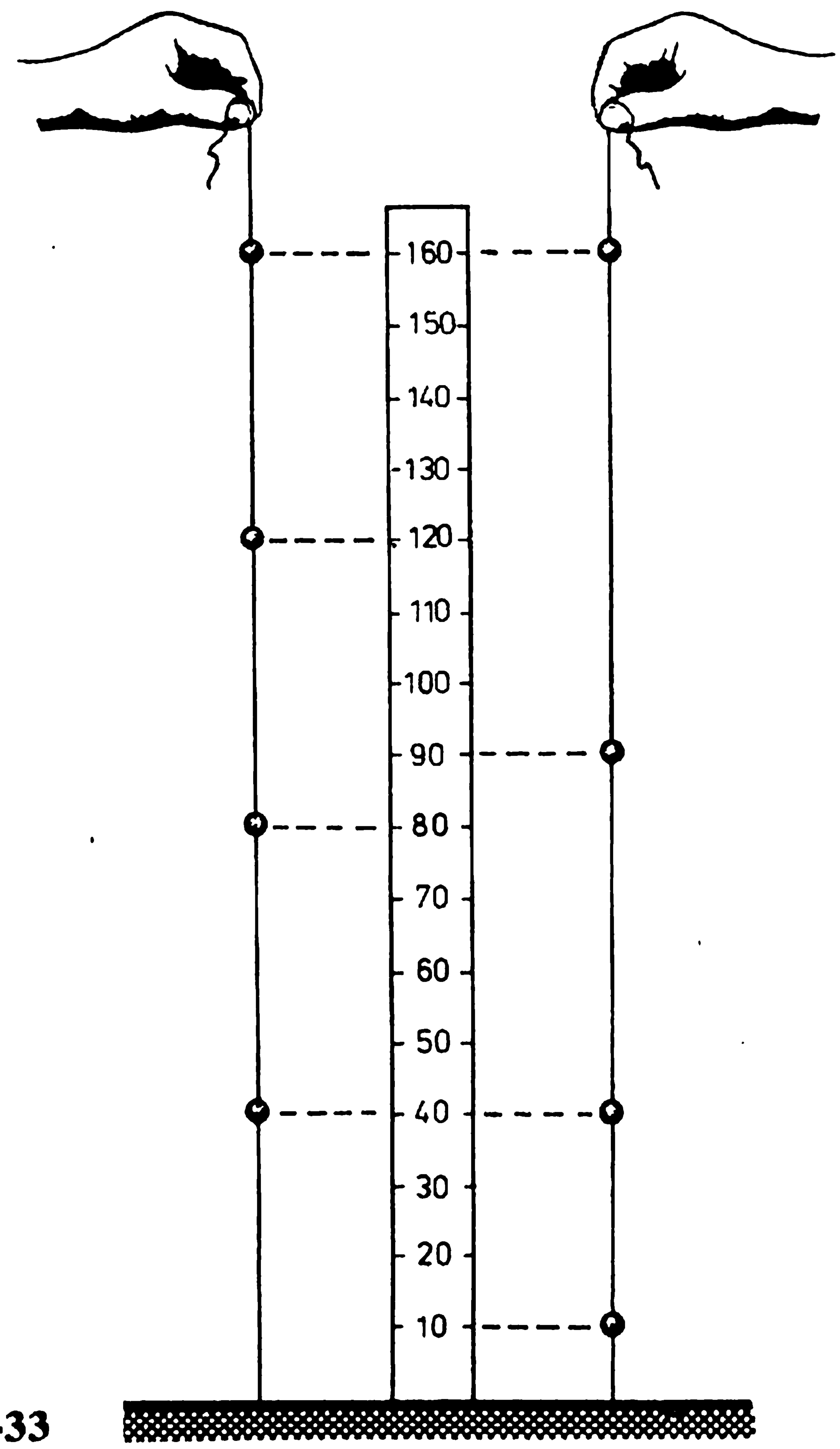
1.12 Voľný pád

Voľný pád sa nazýva pád voľne spustených telies (bez udelenia začiatočnej rýchlosti) na Zem vo vákuu. Pokusmi s Newtonovou trubicou (obr. 1-32) ukážeme, že vo vákuu všetky telesá spustené súčasne padajú spolu (s rovnakou okamžitou rýchlosťou).

Už Galileo Galilei (1564—1642) svojimi pokusmi dokázal a ďalšie merania to potvrdili, že voľný pád je rovnomerne zrýchlený pohyb. Má smer zvislý nadol so stálym zrýchlením. Presvedčíme sa o tom pokusom s guľôčkovým pádostrojom (obr. 1-33). Porovnaním časových intervalov pri dopade guľôčok zistíme, že pri a) sú tieto intervaly rovnaké, kým pri b) nie. Zrýchlenie voľného pádu sa nazýva **tiažové zrýchlenie. Normálne**



Obr. 1-32



Obr. 1-33

tiažové zrýchlenie má veľkosť $g_n = 9{,}806\ 65\ \mathrm{m.s^{-2}}$ (presne). Je to dohodnutá konštanta. Pri riešení fyzikálnych úloh sa kvôli zjednodušeniu numerického výpočtu počíta často s tiažovým zrýchlením $g \doteq 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$ alebo $g \doteq 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$. S touto veličinou ste sa oboznámili už v základnej škole ako s konštantou úmernosti medzi tiažou a hmotnosťou telesa.

Keďže voľný pád je rovnomerne zrýchlený pohyb po priamke zvislo nadol, môžeme určiť vzťahy vyjadrujúce závislosť rýchlosti a posunutia pri voľnom páde od času. Pretože $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$, dostaneme pre rýchlosť voľného pádu

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}\, t$$

a pre posunutie

$$\boldsymbol{d}=\frac{1}{2}\boldsymbol{g}\,t^2$$

Veľkosť zrýchlenia voľného pádu sa rovná g, preto pre dráhu voľného pádu platí (lebo $d=s$)

$$\boxed{s=\frac{1}{2}g\,t^2}$$

a pre veľkosť rýchlosti

$$\boxed{v=g\,t}$$

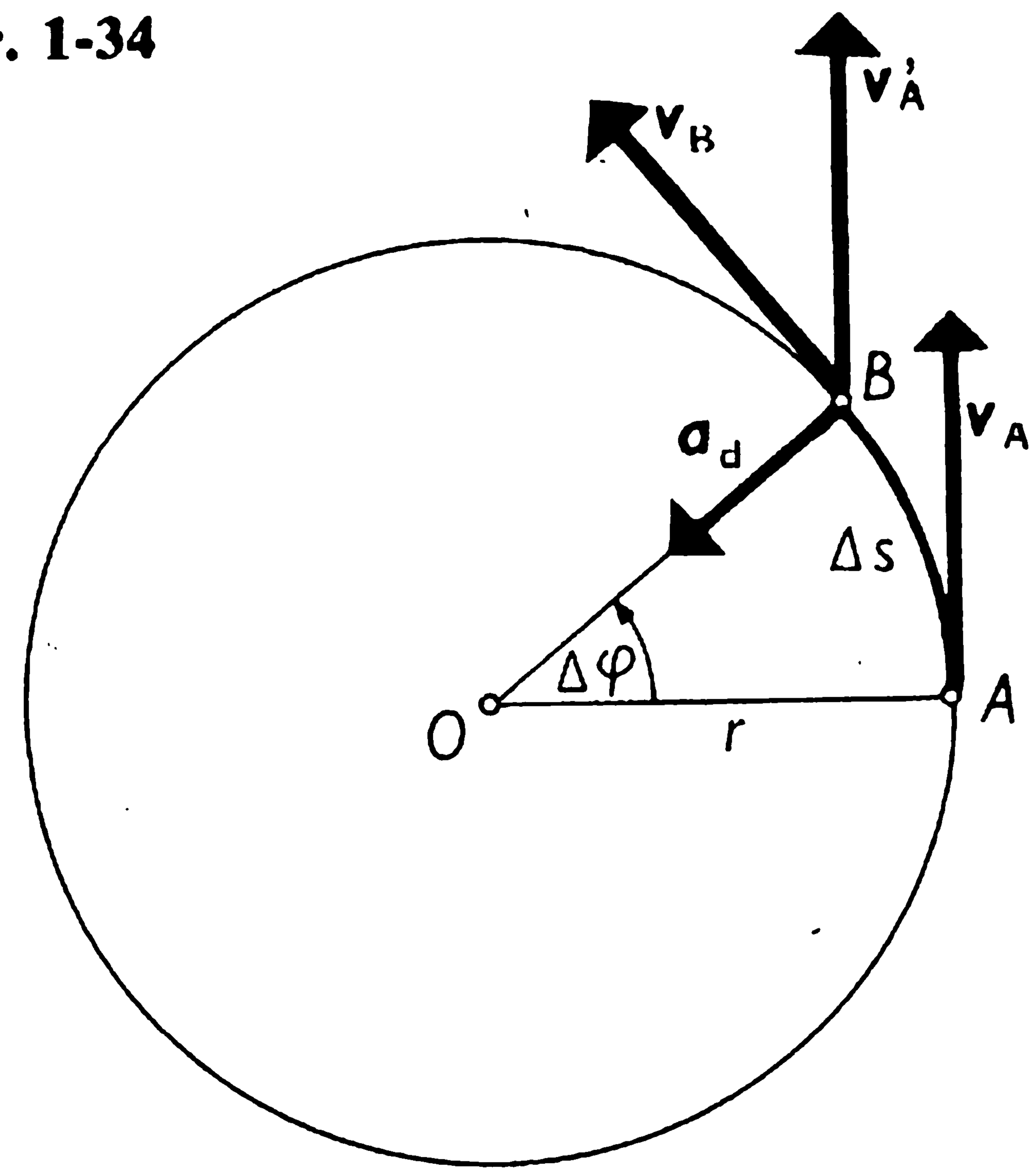
Úlohy

1. Koľko sekúnd musí teleso padať voľným pádom, aby prešlo rovnaký úsek dráhy ako pri rovnomernom pohybe s veľkosťou rýchlosti $10\,\mathrm{m.s^{-1}}$ ($g \doteq 10\,\mathrm{m.s^{-2}}$)? [2 s]
2. Uvážte, z akej výšky by muselo dopadnúť auto voľným pádom ($g \doteq 10\,\mathrm{m.s^{-2}}$) na vozovku, aby jeho rýchlosť bola rovnaká ako rýchlosť auta, ktoré pri rýchlosti $90\,\mathrm{km.h^{-1}}$ narazí na pevnú prekážku. [31 m]
3. Overte si, či jednotku veličiny $g=10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$ (ako ju poznáte zo základnej školy) a jednotku tiažového zrýchlenia g možno vyjadriť v rovnakých základných jednotkách.

1.13 Rovnomerný pohyb hmotného bodu po kružnici

S pohybom po kružnici sa často stretávame v technike i v prírode. Konajú ho napr. časti otáčajúcich sa kolies alebo rotorov elektromotorov. Aj niektoré družice pri obiehaní okolo Zeme a planéty pri obiehaní okolo Slnka konajú približne pohyb po kružnici. Rovnomerný pohyb hmotného bodu po kružnici môžeme znázorniť tak, že necháme vo vodorovnej rovine rovnomerne obiehať guľôčku upevnenú na niti danej dĺžky.

Obr. 1-34



Kruhovému oblúku s dĺžkou Δs medzi bodmi A a B (obr. 1-34), ktorý opíše hmotný bod pri svojom pohybe po kružnici, zodpovedá **orientovaný uhol** veľkosti $\Delta\varphi$, zovretý polpriamkami OA a OB.

Hmotný bod koná rovnomerný pohyb po kružnici, ak za rovnaké ľubovoľne zvolené časové úseky opíše rovnako dlhé oblúky kružnice Δs, ktorým prislúchajú rovnako veľké uhly $\Delta\varphi$.

Pre veľkosť rýchlosti hmotného bodu platí

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Táto veľkosť rýchlosti je pri rovnomernom pohybe po kružnici stála.

Aký je smer okamžitej rýchlosti? Ak pozorujeme odlietajúce častice kovu pri brúsení nástrojov alebo piliny pri rezaní dreva, vidíme, že odlietajú v smere dotyčnice k rotujúcemu kotúču.

Možno dokázať, že okamžitá rýchlosť pohybu hmotného bodu $\boldsymbol{v}$ má smer dotyčnice v danom bode trajektórie, ktorá má tvar kružnice. Okamžitá rýchlosť je teda kolmá na smer polomeru v danom mieste.

Pri rovnomernom pohybe hmotného bodu po kružnici má okamžitá rýchlosť stálu veľkosť, ale mení sa jej smer.

Sledujme pohyb guľôčky obiehajúcej rovnomerne v jednej rovine na motúze okolo pevného stredu. Po istom čase bude guľôčka vždy na tom istom mieste a bude mať tú istú rýchlosť.

Javy, ktoré sa periodicky opakujú, nazývame **periodické javy.** Rovnomerný pohyb hmotného bodu po kružnici v danej rovine je periodický pohyb.

Doba T, za ktorú sa rovnomerný pohyb hmotného bodu po kružnici opakuje, nazýva sa **perióda pohybu alebo obežná doba.** Prevrátená hodnota periódy určuje počet obehov za 1 sekundu a nazýva sa **frekvencia** f

$$f = \frac{1}{T}$$

Jednotkou frekvencie je hertz (Hz): $\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$.

Pri rovnomernom pohybe po kružnici s polomerom r opíše hmotný bod dráhu $2\pi r$ za dobu T. Pre veľkosť rýchlosti teda platí

$$\boxed{v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f}$$

Veľkosť uhla je určená pomerom oblúka s kružnice a polomeru r tejto kružnice

$$\varphi = \frac{s}{r}$$

Veľkosť uhla, ktorému prislúcha oblúk kružnice s rovnakou dĺžkou, ako je polomer kružnice, má číselnú hodnotu 1. Nazýva sa radián (rad) a je jednotkou na meranie veľkosti uhlov v oblúkovej miere. Platí: 1 radián $\doteq 57°20'$. Plný uhol má veľkosť $\varphi = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\,\mathrm{rad}$.

Na opis pohybu hmotného bodu po kružnici zavedieme veličinu **uhlová rýchlosť** ω (čítaj omega). Uhlová rýchlosť rovnomerného pohybu hmotného bodu po kružnici je určená pomerom uhla a doby, za ktorú hmotný bod tento uhol opísal

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

Keď poznáme periódu daného rovnomerného pohybu po kružnici, pre uhlovú rýchlosť platí

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

Medzi uhlovou rýchlosťou a veľkosťou okamžitej rýchlosti rovnomerného pohybu hmotného bodu po kružnici platí vzťah

$$\boxed{v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r}$$

Príklad

Rýchlosť rovnomerného pohybu družice po kružnici okolo Zeme je 7,46 km.s^{-1}. Dŕužica sa pohybuje vo výške 800 km nad povrchom Zeme (polomer Zeme $R = 6\,400$ km). Určte obežnú dobu (periódu) družice okolo Zeme.

$v = 7{,}46 \,.\, 10^3$ m.s^{-1}, $h = 8 \,.\, 10^5$ m, $R = 64 \,.\, 10^5$ m
$r = R + h$, $T = ?$

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 72 \,.\, 10^5 \text{ m}}{7{,}46 \,.\, 10^3 \text{ m.s}^{-1}} \doteq 6\,060 \text{ s}$$

Obežná doba družice okolo Zeme je približne 6 060 s (101 minút).

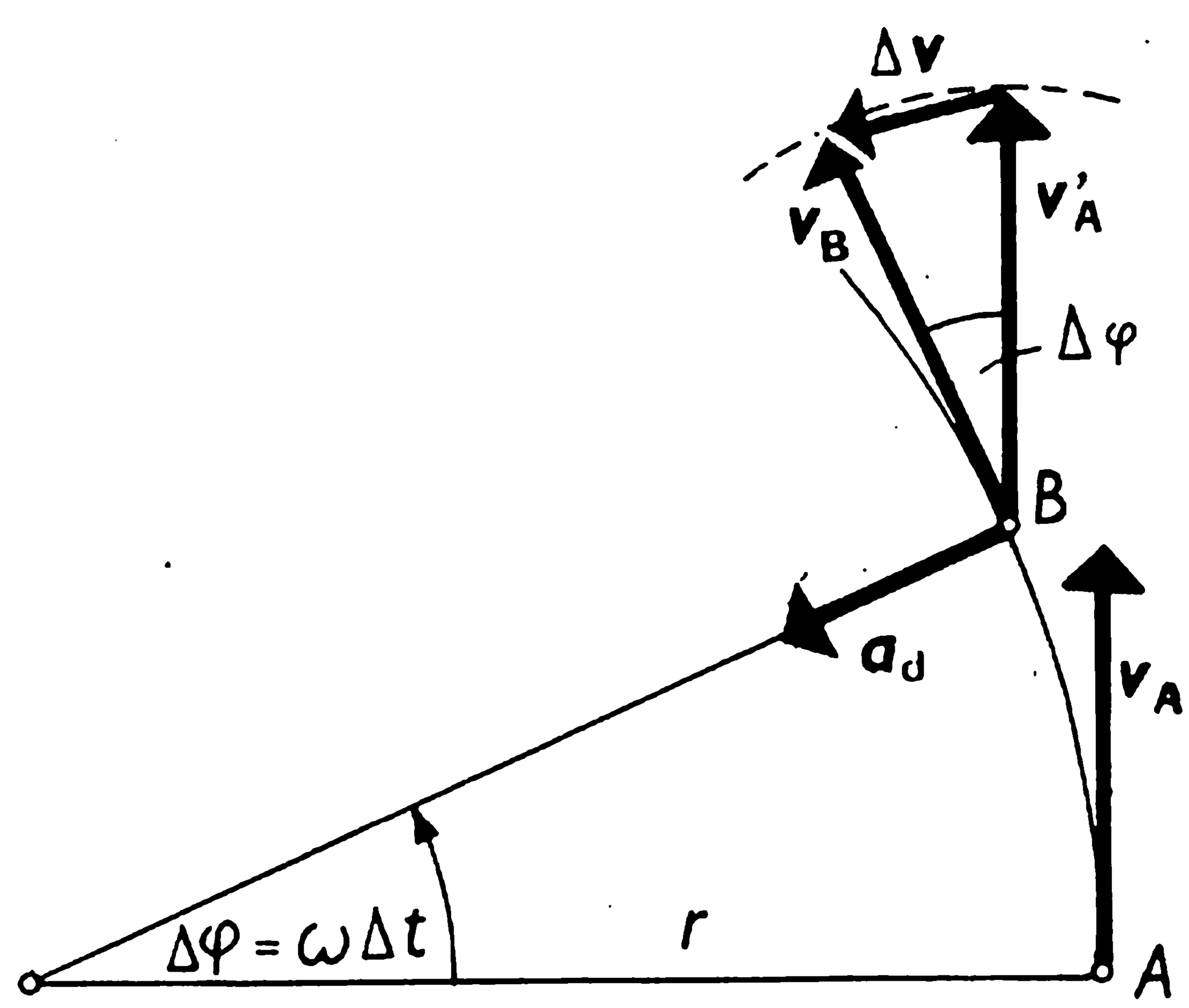
Úlohy

1. Určte veľkosť okamžitej rýchlosti telesa na rovníku vzhľadom na stred Zeme. Polomer Zeme na rovníku je 6 378 km. Zem sa otočí rovnomerne okolo vlastnej osi presne za 23 h 56 min 4 s. [464,8 m.s^{-1}]
2. Určte veľkosť uhlovej rýchlosti ω a veľkosť postupnej rýchlosti sedačky kolotoča, pohybujúcej sa rovnomerným pohybom po kružnici s polomerom 3,5 m, s obežnou dobou 0,2 min. [0,52 s^{-1}; 1,8 m.s^{-1}]

1.14 Dostredivé zrýchlenie

Rovnomerný pohyb hmotného bodu po kružnici je príkladom pohybu, pri ktorom veľkosť okamžitej rýchlosti je stála, ale mení sa jej smer. Zmenu rýchlosti $\Delta \boldsymbol{v}$ v tomto prípade spôsobuje zmena smeru vektora rýchlosti. Ide teda o pohyb so zrýchlením. Zaujíma nás, aká je veľkosť a smer tohto zrýchlenia.

Vyjdeme zo známeho vzťahu pre zrýchlenie $\boldsymbol{a} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$ a budeme predpokladať, že doba Δt je veľmi malá. Ak sa hmotný bod pohybuje rovnomerne po kružnici s polomerom r uhlovou rýchlosťou ω, prejde za dobu Δt z bodu A do bodu B (obr. 1-35). Smer jeho okamžitej rýchlosti sa zmení



Obr. 1-35

o uhol $\Delta \varphi = \omega \, \Delta t$. Pre zmenu okamžitej rýchlosti v dôsledku zmeny jej smeru platí $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A$. Z obrázka je zrejmé, že veľkosť zmeny rýchlosti $(\Delta \boldsymbol{v})$ sa pre malé uhly $\Delta \varphi$ málo líši od oblúka kružnice opísaného okolo bodu B polomerom v. Môžeme teda napísať

$$|\Delta \boldsymbol{v}| = v \, \Delta \varphi = v \, \omega \, \Delta t = v \frac{v}{r} \, \Delta t = \frac{v^2}{r} \Delta t$$

odtiaľ

$$\frac{|\boldsymbol{v}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} = a_d$$

Tento vzťah platí všeobecne pre veľkosť **dostredivého zrýchlenia** hmotného bodu pohybujúceho sa po kružnici. Použitím známych vzťahov ho môžeme prepísať do tvarov

$$\boxed{a_d = \frac{v^2}{r} = v\,\omega = \omega^2 r = 4\pi^2 f^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r}$$

Vektor Δ **v** zviera s okamžitou rýchlosťou **v** uhol α. Z obrázka je zrejmé, že pre malé uhly $\Delta\varphi$ sa uhol α blíži k pravému uhlu. Všeobecne platí:

Pri rovnomernom pohybe po kružnici je vektor dostredivého zrýchlenia kolmý na vektor okamžitej rýchlosti; má smer do stredu trajektórie tvaru kružnice.

Úlohy

1. Určte veľkosť dostredivého zrýchlenia stacionárnej družice Zeme (družice, ktorá zostáva stále nad tým istým miestom Zeme a jej vzdialenosť od stredu Zeme je 42 180 km — pozri úlohu 1, stať 1.13). [0,224 m.s^{-2}]
2. Určte veľkosť dostredivého zrýchlenia sedačky kolotoča v úlohe 2, stať 1.13. [0,96 m.s^{-2}]

ZHRNUTIE — KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU

Pohyb hmotného bodu opisujeme vzhľadom na zvolenú vzťažnú sústavu (pohyb je relatívny). Polohu hmotného bodu určujeme jeho súradnicami, zmeny polohy vektorovou veličinou posunutie; bod sa pohybuje po trajektórii, skalárna veličina dráha určuje dĺžku trajektórie. Základné charakteristiky pohybu hmotného bodu sú jeho rýchlosť a zrýchlenie. Rýchlosť poznáme ako skalárnu veličinu (priemerná rýchlosť) a ako vektorovú veličinu (okamžitá rýchlosť).

Pohyby môžeme rozdeliť:
— podľa trajektórie na priamočiare a krivočiare (osobitným prípadom krivočiareho pohybu je pohyb po kružnici);
— podľa závislosti veľkosti rýchlosti od času na pohyby rovnomerné (veľkosť rýchlosti je stála) a nerovnomerné. Ak sa rýchlosť zväčšuje (zmenšuje) priamo úmerne s časom, ide o pohyb rovnomerne zrýchlený (spomalený);
— podľa zrýchlenia na pohyb priamočiary rovnomerne zrýchlený (spomalený; vektor zrýchlenia je konštantný — má stály smer a veľkosť a je rovnobežný s vektorom okamžitej rýchlosti) a na rovnomerný pohyb po kružnici (veľkosť zrýchlenia je stála, ale smer pohybu sa mení tak, že vektor zrýchlenia je kolmý na vektor okamžitej rýchlosti). Keď sa mení smer a veľkosť zrýchlenia, ide všeobecne o pohyby nerovnomerné krivočiare.

Veličiny	Jednotky	Vzťahy
dráha s	m	
posunutie $\boldsymbol{d}$	m	
priemerná rýchlosť v_p	$\mathrm{m.s^{-1}}$	$v_p = \frac{s}{t}$
okamžitá rýchlosť $\boldsymbol{v}$ rovnomerného priamočiareho pohybu	$\mathrm{m.s^{-1}}$	$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{d}}{\Delta t}$
zrýchlenie $\boldsymbol{a}$ rovnomerne zrýchleného a spomaleného pohybu	$\mathrm{m.s^{-2}}$	$\boldsymbol{a} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$

Veličiny	Jednotky	Vzťahy
tiažové zrýchlenie $\boldsymbol{g}$	$m.s^{-2}$	$g \doteq 9{,}81\ m.s^{-2}$
veľkosť uhla φ	rad	
perióda, obežná doba T	s	
frekvencia f	Hz	$f = \frac{1}{T}$
uhlová rýchlosť ω	$Hz = s^{-1}$ $rad.s^{-1}$	pre rovnomerný pohyb po kružnici $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$
dostredivé zrýchlenie $\boldsymbol{a}_d$	$m.s^{-2}$	$a_d = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$

Prehľad vzťahov pre pohyby

rovnomerný $s = v\, t,\ v = \frac{s}{t}$

$(t_1 = 0,\ s_1 = 0)$

rovnomerný priamočiary $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{v}\, t,\ \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{d}}{t}$

$(t_1 = 0)$

rovnomerne zrýchlený $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a\, t^2,\ v = v_0 + a\, t$

rovnomerne spomalený $s = v_0 t - \frac{1}{2} a\, t^2,\ v = v_0 - a\, t$

priamočiary rovnomerne zrýchlený $\boldsymbol{d} = \frac{1}{2} \boldsymbol{a}\, t^2,\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\, t$

voľný pád $s = \frac{1}{2} g\, t^2,\ v = g\, t$

rovnomerný po kružnici $\varphi = \omega t,\ \omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$

2. Dynamika priamočiarych a krivočiarych pohybov hmotného bodu a sústav hmotných bodov

V kinematike sme sa zaoberali pokojom a pohybom telies, o ktorých sme kvôli zjednodušeniu uvažovali ako o hmotných bodoch. Pri skúmaní rozličných druhov pohybov sme sa však nepýtali, prečo sa teleso pohybuje práve tak, a nie inak. Nezaoberali sme sa tým, prečo napr. kameň voľne spustený z ruky pohybuje sa zvislo nadol a rovnomerne zrýchlene, alebo prečo sa brzdiaci automobil pohybuje spomalene. Štúdiom týchto otázok sa zaoberá časť mechaniky — **dynamika** (z gréckeho *dynamis* — sila). V tomto ročníku sa oboznámime s klasickou dynamikou, ktorej zákony platia len pre telesá pohybujúce sa rýchlosťami oveľa menšími, ako je rýchlosť svetla vo vákuu (rýchlosť svetla vo vákuu je približne 300 000 $km.s^{-1} = 3.10^8\ m.s^{-1}$).

2.1 Vzájomné pôsobenie telies

Z vyučovania fyziky v základnej škole viete, že telesá na seba navzájom pôsobia. **Vzájomné pôsobenie** telies (interakcia) sa môže uskutočniť napr. pri vzájomnom styku telies, alebo prostredníctvom fyzikálnych polí. Veľkosť vzájomného pôsobenia telies alebo telies a polí (gravitačného, elektrického, magnetického) sme opisovali pomocou **fyzikálnej veličiny sila.**

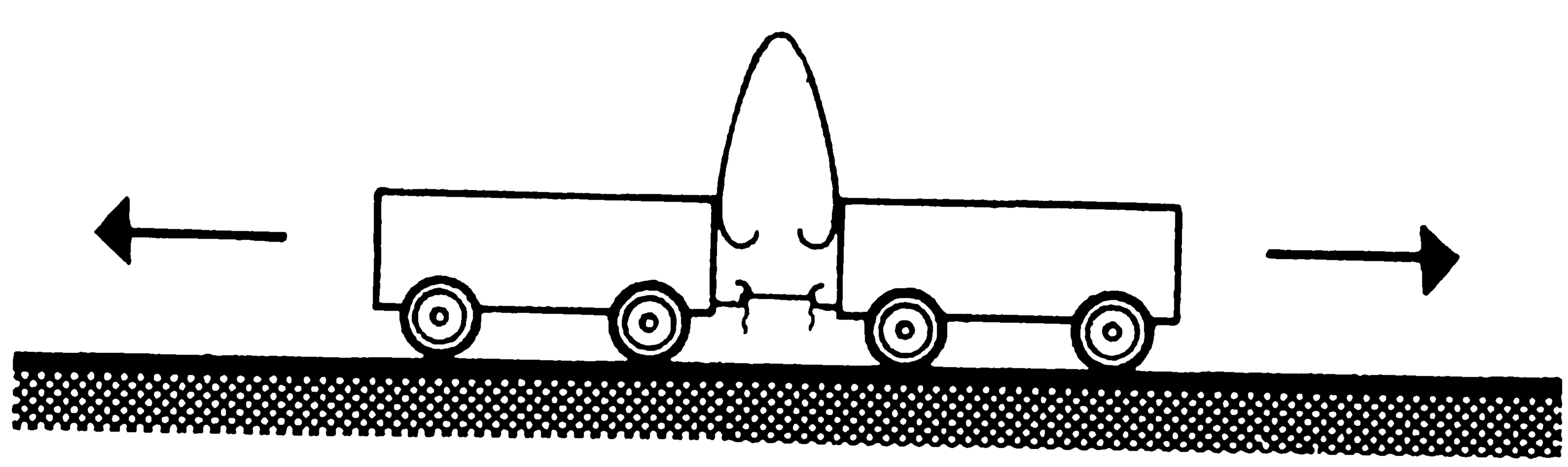
Viete už, že výsledkom vzájomného silového pôsobenia telies môže byť **alebo deformácia týchto telies,** alebo **zmena** ich **pohybového stavu.** Na základe poznatku, že predĺženie oceľovej pružiny je v istom rozsahu priamo úmerné veľkosti pôsobiacej sily, ste sa oboznámili so statickým meraním síl a s prístrojom na meranie veľkosti síl založenom na tomto poznatku — silomerom.

Viete, že jednotka sily sa nazýva newton (N) a naučili ste sa zobrazovať sily pomocou orientovaných úsečiek. Sila je vektorová fyzikálna veličina, a preto platia pre ňu všetky pravidlá pri počítaní s vektormi, ktoré poznáte z predchádzajúcich statí.

V nižších ročníkoch ste sa oboznámili s pojmom **hmotnosť telies.** Naučili ste sa merať hmotnosť telies na váhach a vyjadrovať ju v jednotke kilogram (kg) a jej násobkoch a dieloch.

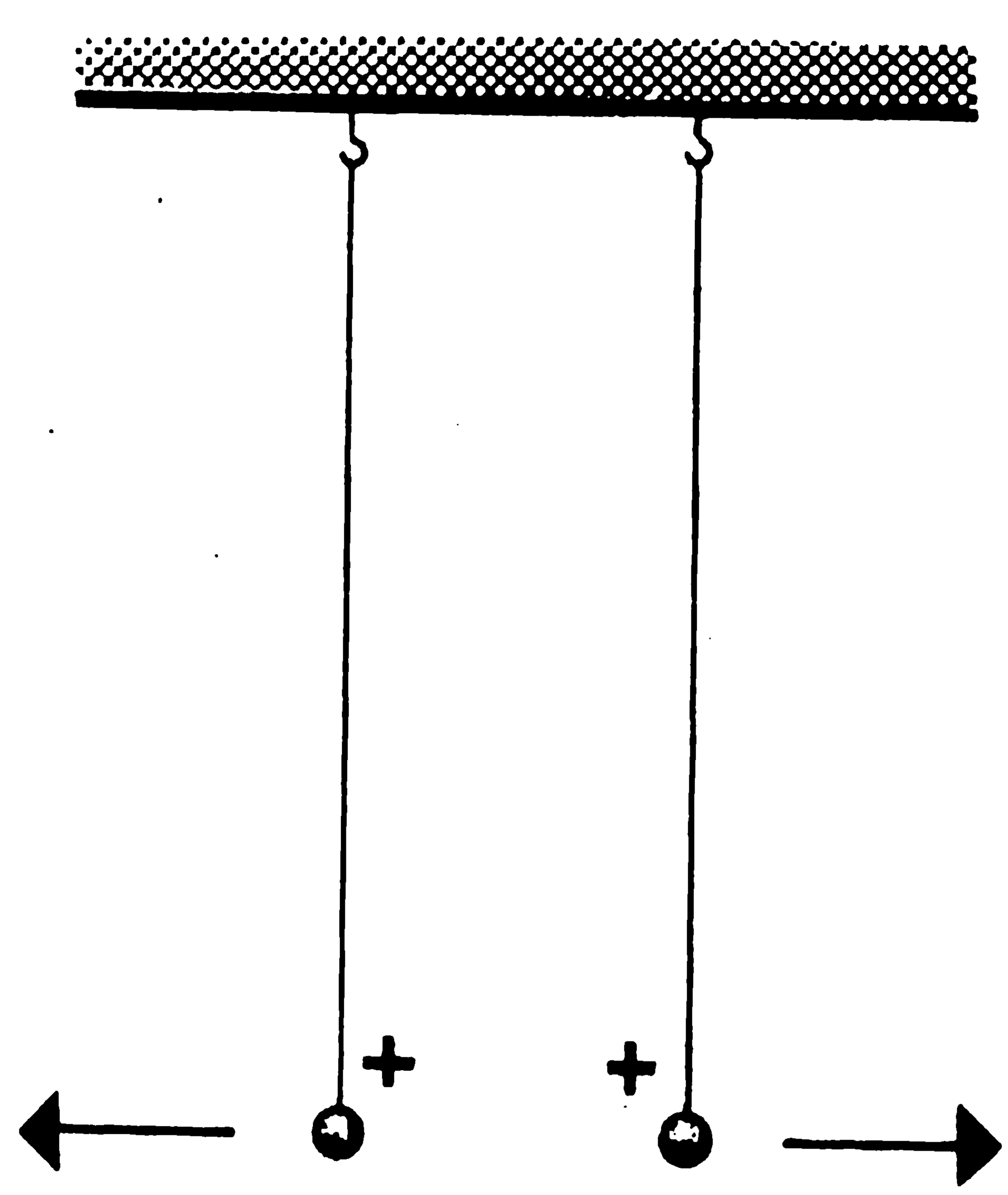
Pozorujme na niekoľkých pokusoch dôsledok vzájomného pôsobenia dvoch telies vo vzťažnej sústave spojenej s triedou.

Dva vozíčky sú spojené niťou a medzi nimi je stlačená pružina (obr. 2-1). Vozíčky sú vzhľadom na našu sústavu v pokoji. Po prestrihnutí nite sa obidva vozíčky začnú pohybovať opačným smerom.



Obr. 2-1

Zavesená zelektrizovaná guľôčka je v našej vzťažnej sústave v pokoji. Ak sa k nej priblížime inou súhlasne zelektrizovanou guľôčkou na závese, dajú sa guľôčky do pohybu v opačnom smere (obr. 2-2).



Obr. 2-2

Z pokusov vidíme, že vzájomné pôsobenie telies, ktoré sa môžu pohybovať, prejaví sa zmenou ich pohybového stavu, v našom prípade zmenou rýchlosti týchto telies. Slovo vzájomné zdôrazňuje, že pôsobenie nie je jednostranné. Ak teleso A pôsobí na teleso B, potom aj teleso B pôsobí na teleso A. V prvom pokuse sa telesá bezprostredne stýkali, v druhom prípade nastalo vzájomné pôsobenie prostredníctvom elektrického poľa.

Keď sú zelektrizované guľôčky dosť ďaleko od seba, ich vzájomné pôsobenie nepozorujeme. Teleso, ktoré je od všetkých ostatných telies v dostatočnej vzdialenosti a nepôsobí naň žiadne pole (nie je teda v žiadnom vzájomnom pôsobení s niektorým iným fyzikálnym objektom), nazýva sa **izolované teleso**. Keď neprihliadame na rozmery telesa, hovoríme o **izolovanom hmotnom bode.**

Všetky telesá na Zemi podliehajú jej gravitačnému pôsobeniu. Je teda vôbec možné v pozemských podmienkach získať nejakým spôsobom izolované teleso? Ak spustíme napríklad kovovú guľu, začne padať voľným pádom. Ak ju položíme na sklenú vodorovnú platňu, zostane v pokoji (guľu považujeme za hmotný bod).

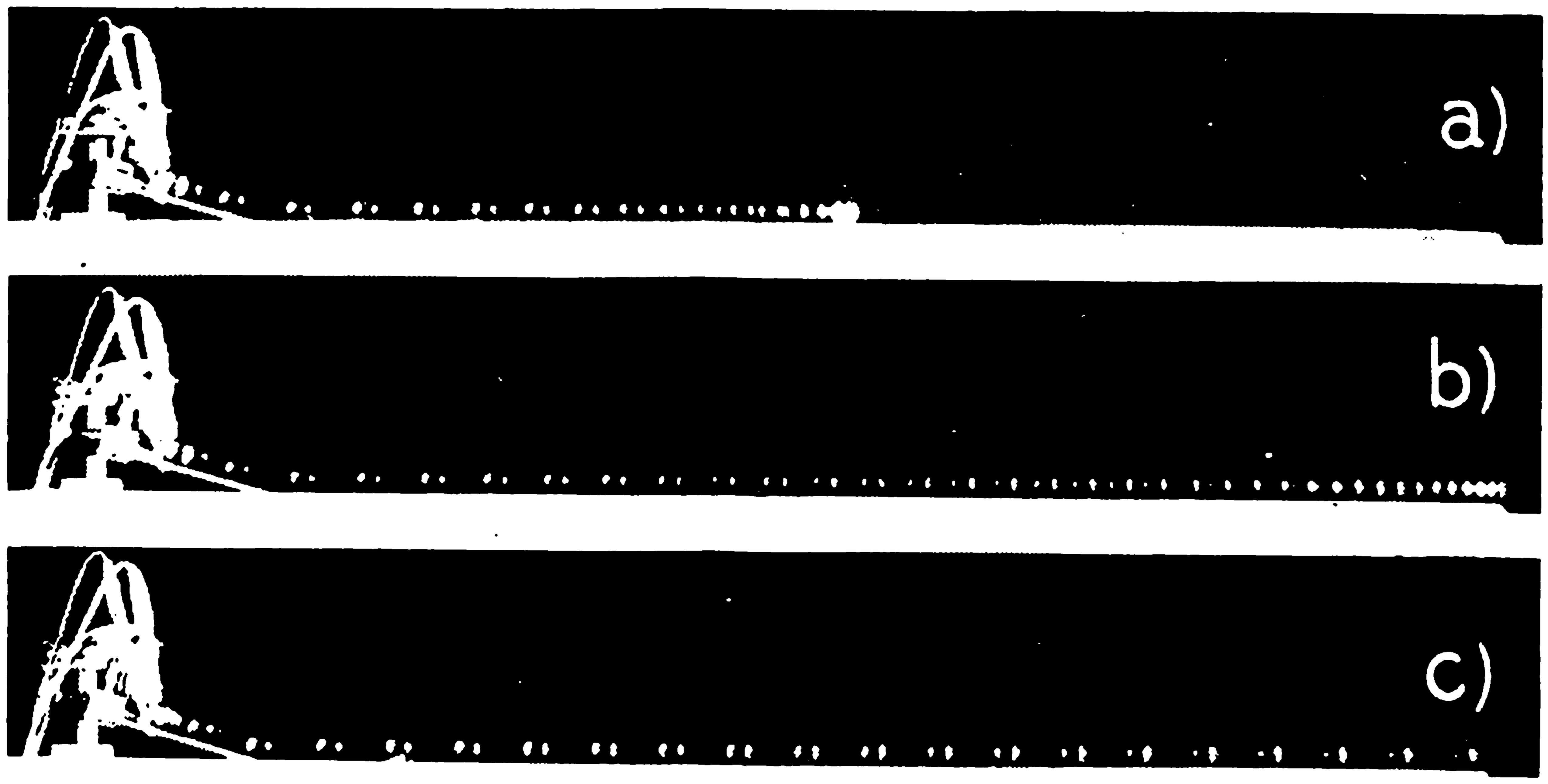
Silové pôsobenie Zeme sa vyrovnáva (kompenzuje) silovým pôsobením platne na guľu. Guľa sa sama nedá do posuvného pohybu vodorovným smerom, správa sa ako izolované teleso. Podobne sa správa aj vozíček na vodorovnej platni, na vodorovných koľajničkách, na vzduchovom vankúši a pod.

Ako izolované telesá sa správajú všetky telesá, pri ktorých je silové pôsobenie ostatných telies vykompenzované.

2.2 Inerciálne a neinerciálne vzťažné sústavy

Kovová guľôčka leží na vodorovnej platni vzhľadom na našu vzťažnú sústavu v pokoji. Kým na ňu nebude pôsobiť nejaké teleso, zostane v tomto stave.

Položme guľôčku na stôl prikrytý textilným obrusom a postrčme ju. Guľôčka sa začne pohybovať a po chvíli sa zastaví. Položme guľôčku na hladkú vodorovnú sklenú platňu. Po náraze sa guľôčka začne pohybovať



Obr. 2-3

Fotografia pohybu oceľovej guľôčky zhotovená pomocou zábleskov nasledujúcich po 0,1 s. Tým je pohyb guľôčky rozfázovaný a jej polohy sú zachytené vždy po 0,1 s. Pretože záblesky nasledujú za sebou po rovnakom, veľmi krátkom čase, možno zo vzdialenosti medzi jednotlivými polohami guľôčky usúdiť, aká je veľkosť rýchlosti pohybu guľôčky. Ak sú vzájomné vzdialenosti polôh guľôčky na obrázku stále rovnaké, veľkosť rýchlosti guľôčky je stála, ak sú rôzne, veľkosť rýchlosti guľôčky sa mení.

Guľôčka je špeciálnym zariadením (na obr. vľavo) uvedená vždy s rovnakou začiatočnou rýchlosťou do pohybu po naklonenej rovine a ďalej sa pohybuje po vodorovnej podložke, ktorá má v prípadoch a), b), c) rôzne drsný povrch. (O otáčavom pohybe guľôčky neuvažujeme.)

a) Guľôčka sa pohybuje po vodorovnej podložke zakrytej textilnou látkou (drsný povrch) a zastavuje sa uprostred podložky. Vidíme, že rýchlosť guľôčky sa rýchlo zmenšuje.
b) Guľôčka sa pohybuje po podložke zakrytej papierom (menej drsný povrch) a zastavuje sa až na konci podložky. Zmena rýchlosti je menšia ako v prípade a).
c) Guľôčka sa pohybuje po vodorovnej podložke zakrytej hladkým sklom. Vidíme, že rýchlosť guľôčky sa takmer nemení (guľôčka sa pohybuje rovnomerne priamočiaro).

vzhľadom na našu vzťažnú sústavu priamočiarym pohybom, pričom nepozorujeme významné zmeny jej rýchlosti (pozri obr. 2-3).

Predstavme si, že by sa vyrábali stále dokonalejšie gule a dokonalejšie hladké vodorovné platne, že by sa odstránil vplyv trenia, odporu vzduchu a pod. V takomto prípade by sa guľa pohybovala vzhľadom na našu vzťažnú sústavu rovnomerne priamočiaro a v ideálnom prípade by jej rovnomerný priamočiary pohyb trval stále.

Keď sme vo vagóne vlaku alebo električky, zvyčajne volíme za vzťažné teleso na naše pozorovanie vagón. Ak je vagón v pokoji, alebo sa pohybuje rovnomerne po priamej trati, zostávame voči vagónu v pokoji, môžeme v ňom chodiť a pod. Pri prudkom rozbiehaní, brzdení alebo zatáčaní vagóna však v pokoji nezostaneme. Keby sme sa pevne nedržali, začali by sme vo vagóne narážať na jeho steny. V takejto vzťažnej sústave nastáva zmena pohybového stavu bez vzájomného pôsobenia telies.

Prichádzame k záveru, že existujú vzťažné sústavy, v ktorých izolované hmotné body nezostávajú v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe.

Vzťažné sústavy, v ktorých izolované hmotné body zostávajú v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, nazývajú sa inerciálne vzťažné sústavy. Zmenu pohybového stavu hmotných bodov môže v nich spôsobiť len ich vzájomné pôsobenie s inými objektmi.

V inerciálnych vzťažných sústavách izolované hmotné body, ktoré sú v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, majú vlastnosť zotrvávať v tomto stave. Táto vlastnosť všetkých hmotných bodov sa nazýva **zotrvačnosť.**

Vzťažné sústavy, v ktorých zmena pohybového stavu hmotného bodu môže nastať bez vzájomného pôsobenia s inými objektmi, nazývajú sa **neinerciálne vzťažné sústavy.** Izolované hmotné body v nich nezostávajú v pokoji alebo v pohybe rovnomernom priamočiarom.

Existujú vôbec inerciálne sústavy? Podľa našich predpokladov boli by to sústavy veľmi vzdialené od všetkých fyzikálnych objektov a izolované hmotné body by v nich zostávali v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe.

V mnohých prípadoch však môžeme za inerciálnu považovať vzťažnú sústavu spojenú s povrchom Zeme, kde sa nachádzame. Odchýlky od vlastností inerciálnej sústavy, spôsobené v tejto sústave vlastnou rotáciou Zeme, pôsobením Slnka, Mesiaca a pod., môžeme pozorovať iba pri niektorých dlhotrvajúcich dejoch.

K inerciálnej vzťažnej sústave sa bude viac približovať vzťažná sústava, ktorá má začiatok v strede Zeme a osi má orientované k vhodným hviezdam, a ešte viac vzťažná sústava spojená so stredom Slnka (heliocentrická sústava). No aj tu sa prejavujú nepatrné odchýlky od inerciálnej sústavy, ktoré majú pôvod v pôsobení Galaxie. Vždy však možno nájsť reálnu vzťažnú sústavu, ktorá bude pre istú úlohu s dostatočnou presnosťou spĺňať vlastnosti inerciálnej sústavy. Voľba vhodnej inerciálnej sústavy umožní čo najjednoduchší opis a vysvetlenie fyzikálnych dejov.

2.3 Prvý pohybový zákon

Predchádzajúce závery zhŕňa prvý Newtonov* pohybový zákon (zo základnej školy známy ako zákon zotrvačnosti):

Každý hmotný bod v inerciálnej sústave zotrváva v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, kým nie je nútený vonkajšími silami tento svoj stav zmeniť.

Čo je obsahom tohto zákona?

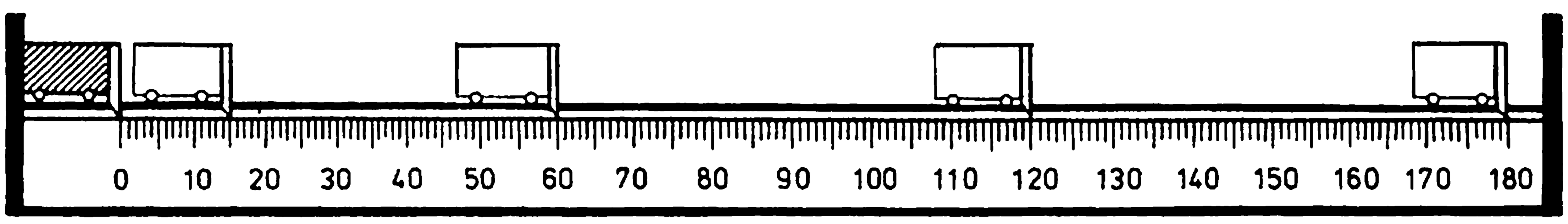
1. Zákon hovorí, že existujú inerciálne vzťažné sústavy.
2. Zákon charakterizuje zotrvačnosť ako základnú vlastnosť každého izolovaného hmotného bodu zotrvávať v inerciálnej sústave v pokoji alebo rovnomernom priamočiarom pohybe.
3. Zákon hovorí, že na zmenu pohybového stavu hmotného bodu v inerciálnej vzťažnej sústave je potrebné jeho vzájomné pôsobenie s inými objektmi, ktoré nazýva vonkajšie sily pôsobiace na hmotný bod.

* V roku 1687 vyšla kniha vynikajúceho anglického fyzika a matematika Newtona Matematické základy prírodných vied. Isaac Newton (1643—1727) v nej zhrnul a novým spôsobom formuloval poznatky, ktoré tvoria základ tzv. klasickej mechaniky. Význačné miesto v nej majú tri pohybové zákony (pretože sú všeobecné, nazývame ich aj princípy). Obsah prvého pohybového zákona sformuloval však asi 50 rokov pred Newtonom taliansky fyzik Galileo Galilei (1564—1642).

V staroveku a stredoveku sa podľa Aristotela (384—322 pred n. l.) tvrdilo, že bez vonkajšieho pôsobenia sa môže teleso nachádzať len v stave pokoja. V rovnomernom pohybe sa malo teleso nachádzať pri pôsobení stálej sily. Galilei prvý dokázal abstrahovať od síl trenia, vyvrátiť Aristotelovu predstavu o pôsobení stálej sily na rovnomerne sa pohybujúce teleso a dôjsť k **najvšeobecnejšiemu zákonu** — princípu zotrvačnosti.

2.4 Hybnosť hmotného bodu. Hybnosť telesa

Sledujme napr. na vozíčkovej súprave (obr. 2-4), ako sa zmení pohybový stav vozíčka pôsobením istej stálej vonkajšej sily ($F = 0{,}6$ N). Vozíček spojíme niťou cez kladku so závažíčkom. Závažíčko necháme na vozíček silovo pôsobiť 2 sekundy, potom ho odoberieme. Ďalší pohyb vozíčka bude rovnomerný a rýchlosť tohto rovnomerného pohybu určí okamžitú rýchlosť vozíčka na konci druhej sekundy silového pôsobenia.



Obr. 2-4

Hmotnosť vozíčka zväčšíme na dvojnásobok, potom na trojnásobok a určíme veľkosť okamžitej rýchlosti vždy na konci druhej sekundy. Výsledky merania zapíšeme do tabuľky. Do posledného riadku zapíšeme súčin hodnôt hmotnosti a príslušnej veľkosti rýchlosti vozíčka.

$\frac{m}{\text{kg}}$	0,2	0,4	0,6
$\frac{v}{\text{m}\,.\,\text{s}^{-1}}$	0,6	0,3	0,2
$\frac{mv}{\text{kg}\,.\,\text{m}\,.\,\text{s}^{-1}}$	0,12	0,12	0,12

Z pokusu je zrejmé, že pri pôsobení rovnakej vonkajšej sily za rovnaký čas sa rýchlosť menila v závislosti od hmotnosti vozíčka, ale súčin hmotnosti a veľkosti okamžitej rýchlosti vozíčka počas dvoch sekúnd zostával stály. Súčin hmotnosti a veľkosti okamžitej rýchlosti hmotného bodu sa vo fyzike nazýva veľkosť hybnosti hmotného bodu, značka p.

Pretože okamžitá rýchlosť je vektorová veličina, je vektorová veličina aj hybnosť hmotného bodu

$$\boxed{\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}}$$

Hybnosť sústavy hmotných bodov sa definuje ako vektorový súčet hybností jednotlivých bodov. Smer hybnosti je určený smerom okamžitej rýchlosti. Ak sa teleso pohybuje posuvným pohybom, všetky jeho časti, o ktorých uvažujeme ako o hmotných bodoch, sa pohybujú okamžitou rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ a uvedený vzťah určuje aj hybnosť telesa s hmotnosťou m a s okamžitou rýchlosťou $\boldsymbol{v}$. Pre hmotný bod alebo teleso v pokoji $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$.

Jednotku hybnosti v SI určíme zo vzťahu pre veľkosť hybnosti $p = m\,v$, do ktorého dosadíme jednotky

$$[p] = \mathrm{kg.m.s^{-1}}$$

Jednotkou hybnosti je hybnosť, ktorú má teleso s hmotnosťou 1 kg pri rýchlosti 1 $\mathrm{m.s^{-1}}$. Nazýva sa **kilogram meter za sekundu.**

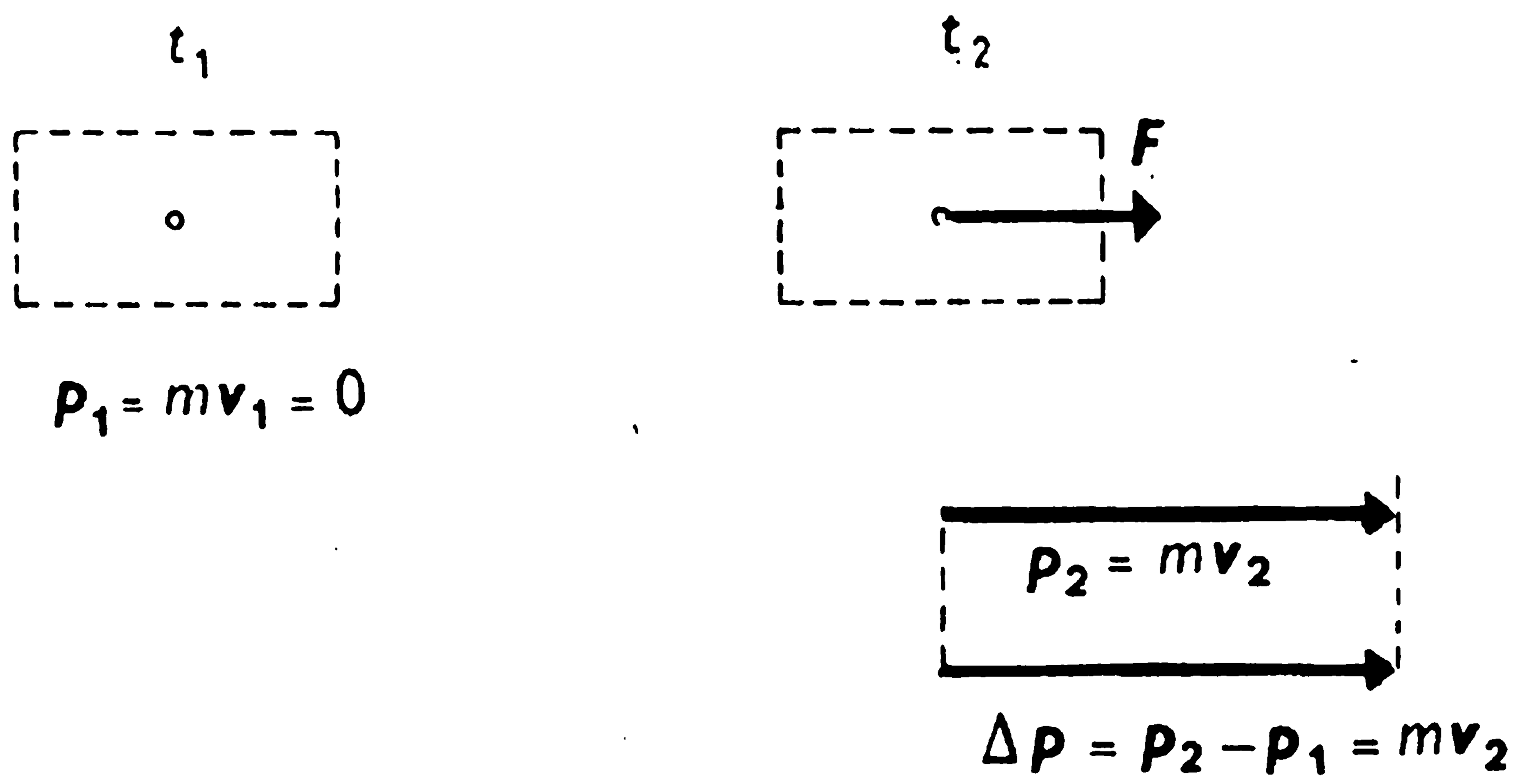
Keďže rýchlosť závisí od voľby vzťažnej sústavy, závisí od vzťažnej sústavy, vzhľadom na ktorú ju meriame, aj hybnosť.

Úlohy

1. Určte veľkosť hybnosti vozíčka s hmotnosťou 0,3 kg, ktorý sa pohybuje rýchlosťou s veľkosťou 0,2 $\mathrm{m.s^{-1}}$. [0,06 $\mathrm{kg.m.s^{-1}}$]
2. Akú veľkú hybnosť má automobil, ktorý sa pohybuje rýchlosťou so stálou veľkosťou 40 $\mathrm{km.h^{-1}}$ a má hmotnosť 500 kg? [5 560 $\mathrm{kg.m.s^{-1}}$]
3. Veľkosť hybnosti letiaceho elektrónu bola 59.10^{-27} $\mathrm{kg.m.s^{-1}}$ a veľkosť rýchlosti $6{,}5.10^{4}$ $\mathrm{m.s^{-1}}$. Určte hmotnosť elektrónu. [$9{,}1.10^{-31}$]

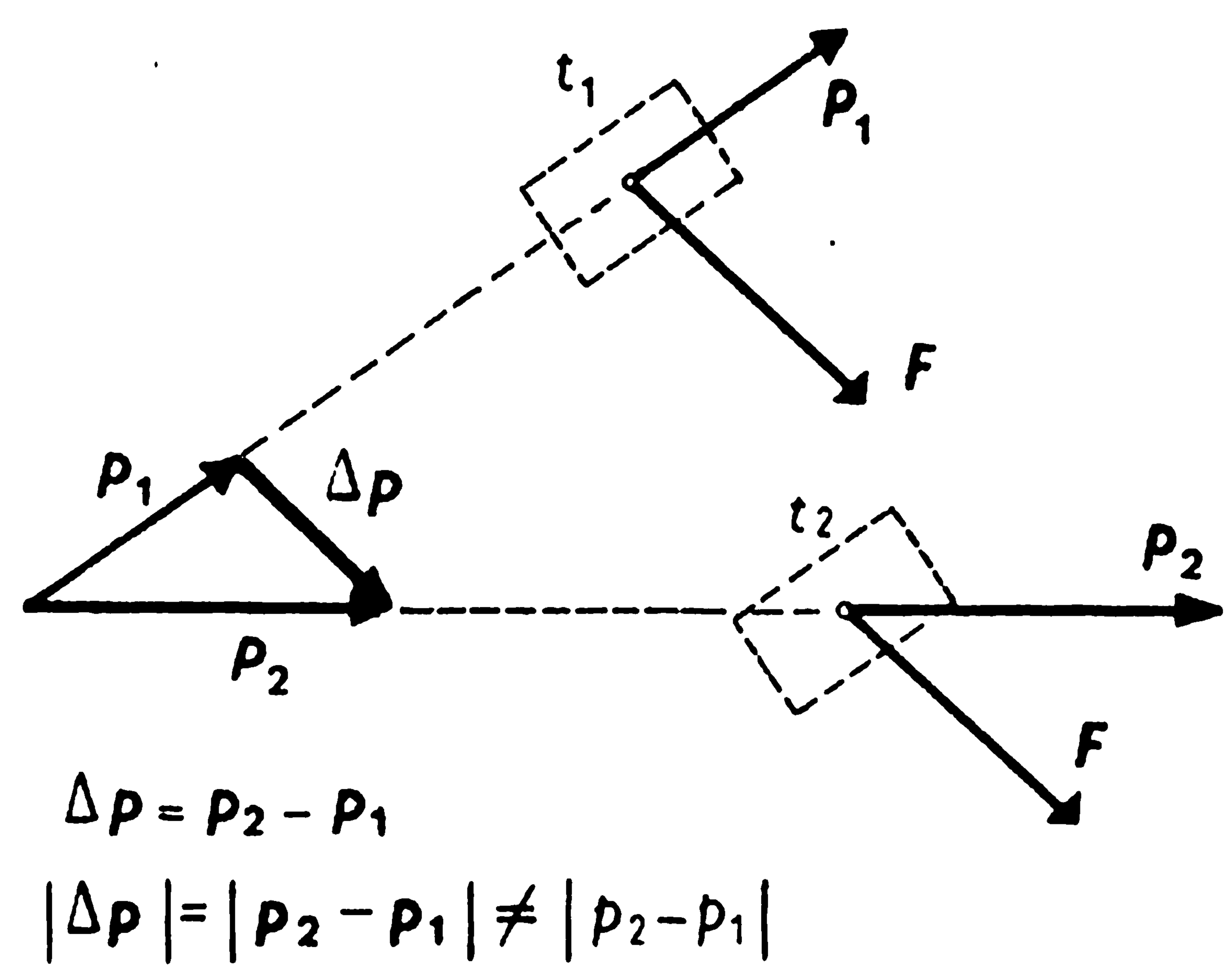
2.5 Druhý pohybový zákon

V pokuse zo state 2.4 bola na začiatku každého merania v čase t_1 ($t_1 = 0$ s) pri rýchlosti $\boldsymbol{v}_1$ hybnosť vozíčka $\boldsymbol{p}_1 = m\,\boldsymbol{v}_1$; na konci merania v čase t_2 ($t_2 = 2$ s) pri rýchlosti $\boldsymbol{v}_2$ bola hybnosť $\boldsymbol{p}_2 = m\,\boldsymbol{v}_2$. V dobe $t_2 - t_1 = \Delta t$ nastala teda zmena hybnosti $\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \Delta\boldsymbol{p} = \Delta(m\,\boldsymbol{v})$. Veľkosť tejto zmeny hybnosti bola $|\Delta\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1|$ (pozri obr. 2-5 a 2-6). Kým v pokuse pri danom meraní v dobe Δt nemeníme hmotnosť vozíčka, t. j. $m =$ konšt., možno pre zmenu hybnosti písať $\Delta\boldsymbol{p} = m(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) = m\,\Delta\boldsymbol{v}$ a pre veľkosť tejto zmeny $|\Delta\boldsymbol{p}| = m|\Delta\boldsymbol{v}|$. Zmena rýchlosti má potom



Obr. 2-5

Prípad zmeny hybnosti telesa $\Delta\boldsymbol{p}$ z nášho pokusu v dobe $\Delta t = t_2 - t_1$. Zmena hybnosti telesa nastala len ako dôsledok zmeny veľkosti hybnosti; smer hybnosti sa v dobe Δt nemení. Pre veľkosť zmeny hybnosti ($|\Delta\boldsymbol{p}|$) v tomto (a len v tomto) prípade platí: $|\Delta\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1| = |p_2 - p_1| = |\Delta p|$. Keď je okrem toho, tak ako v našom prípade $p_2 > p_1$, tak $|\Delta\boldsymbol{p}| = \Delta p$. (Indexy 1 a 2 pri značke hybnosti označujú hybnosti daného telesa v čase t_1 a t_2.) Keď ešte predpokladáme $m =$ konšt., tak $\Delta\boldsymbol{p} = m\,\Delta\boldsymbol{v}$ a $|\Delta\boldsymbol{p}| = m\,|\Delta\boldsymbol{v}| = m\,|\Delta v|$



Obr. 2-6

Všeobecný prípad zmeny hybnosti telesa. Zmena hybnosti $\Delta\boldsymbol{p}$ nastáva nielen v dôsledku zmeny veľkosti hybnosti, ale aj smeru hybnosti. Z obrázka je zrejmé, že v tomto všeobecnom prípade už nemusí platiť, že $|\Delta\boldsymbol{p}| = |\Delta p|$

rovnaký smer ako zmena hybnosti. Jednotkou zmeny hybnosti je kg.m.s^{-1}.

Z pokusu ďalej vidíme, že pri zvolenom silovom pôsobení (v našom prípade $F = 0{,}6$ N) na telesá s rozličnými hmotnosťami vzniká v danom časovom úseku vždy rovnako veľká zmena hybnosti. Z nášho príkladu vychádza, že veľkosť tejto zmeny $|\Delta \boldsymbol{p}| = \Delta p = m\, \Delta v = m(v_2 - v_1) =$ $= m\, v_2 = 0{,}12\ \mathrm{kg.m.s^{-1}}$ (pri $\Delta t = 2$ s). Na veľkosť tejto zmeny by nemali vplyv ani rozličné začiatočné rýchlosti vozíčkov.

Keď zvolíme napr. $\Delta t = 3$ s pri nezmenenej sile (0,6 N), bude veľkosť zmeny hybnosti iná ako v predchádzajúcom meraní, ale pre dané Δt zostane opäť stála bez ohľadu na hmotnosti a začiatočné rýchlosti vozíčkov

$$|\Delta \boldsymbol{p}| = m\, v_2 = 0{,}18\ \mathrm{kg.m.s^{-1}} \qquad (\text{pri } \Delta t = 3\ \mathrm{s})$$

Keby sme pri danej sile postupne menili dobu, za ktorú táto sila pôsobí na teleso, zistili by sme, že veľkosť zmeny hybnosti $|\Delta \boldsymbol{p}|$ je toľkokrát väčšia, koľkokrát dlhšia je doba pôsobenia, alebo, že $|\Delta \boldsymbol{p}|$ je priamo úmerná Δt, teda

$$\frac{|\Delta \boldsymbol{p}|}{\Delta t} = \text{konšt.} \qquad (\text{pri stálej veľkosti sily})$$

Kým zostáva veľkosť sily pri všetkých meraniach stála, je stály aj pomer $\frac{|\Delta \boldsymbol{p}|}{\Delta t}$, hoci doba pôsobenia sily, a tým aj veľkosť zmeny hybnosti, budú sa meniť. Pre predchádzajúci pokus bude napr. pri $t = 2$ s pomer $\frac{|\Delta \boldsymbol{p}|}{\Delta t} = \frac{m\, v_2}{\Delta t} = \frac{0{,}12\ \mathrm{kg\,.\,m\,.\,s^{-1}}}{2\ \mathrm{s}} = 0{,}6\ \mathrm{kg\,.\,m\,.\,s^{-2}}$. Pre $t = 3$ s bude $\frac{|\Delta \boldsymbol{p}|}{\Delta t} = \frac{0{,}18\ \mathrm{kg\,.\,m\,.\,s^{-2}}}{3\ \mathrm{s}} = 0{,}6\ \mathrm{kg\,.\,m\,.\,s^{-2}}$.

Keď v ďalších meraniach zvolíme inú veľkosť sily (napr. 0,12 N), zmení sa aj pomer $\frac{|\Delta \boldsymbol{p}|}{\Delta t}$. Keď veľkosť sily v týchto meraniach zachováme (0,12 N), zostane tento pomer opäť stály ($0{,}12\ \mathrm{kg.m.s^{-2}}$), bez ohľadu na dobu, za ktorú sila pôsobí.

Z toho, čo sme povedali, je zrejmé, že veľkosť pôsobiacej sily jednoznačne určuje pomer veľkosti zmeny hybnosti a príslušnej doby, v ktorej táto zmena nastala. Koľkokrát väčšia bude pôsobiaca sila, toľkokrát väčší bude aj pomer $\frac{|\Delta \boldsymbol{p}|}{\Delta t}$. Vidíme, že tento pomer sa číselne rovná veľkosti pôsobiacej sily.

Z pokusov ďalej vyplynulo, že smer zmeny rýchlosti telies, a teda aj smer zmeny ich hybnosti, bol vždy rovnaký ako pri pôsobiacej sile. Môžeme stručne povedať, že sila $\boldsymbol{F}$ určuje jednoznačne pomer $\dfrac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta t}$.

Naše závery, ktoré sme odvodili pre priamočiary pohyb, majú pre inerciálne sústavy všeobecnú platnosť a vyjadruje ich druhý Newtonov pohybový zákon:

> Pomer zmeny hybnosti hmotného bodu a doby, za ktorú táto zmena nastala, je priamo úmerný výslednej pôsobiacej sile.

Matematicky môžeme tento záver vyjadriť vzťahom $\dfrac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta t} = \boldsymbol{F}$.

Úlohy

1. Automobil pri brzdení znížil veľkosť svojej rýchlosti zo 70 km.h^{-1} na 60 km.h^{-1}. Pohyb automobilu bol priamočiary rovnomerne spomalený. Určte a) zmenu veľkosti hybnosti automobilu pri brzdení; b) veľkosť zmeny hybnosti automobilu pri brzdení; c) veľkosť brzdiacej sily. Hmotnosť automobilu bola 1 000 kg a doba brzdenia 6 s. [a) $-2\,780$ kg.m.s^{-1}; b) 2 780 kg.m.s^{-1}; c) [redacted] 463,3 N] 450N
2. Teleso narazilo na prekážku rýchlosťou veľkosti 6 m.s^{-1}. Po zrážke sa teleso ďalej pohybovalo rýchlosťou veľkosti 6 m.s^{-1}, pričom smer tejto rýchlosti bol kolmý na smer rýchlosti pred zrážkou. Určte a) zmenu veľkosti rýchlosti a hybnosti telesa; b) veľkosť zmeny rýchlosti a hybnosti telesa. Hmotnosť telesa bola 4 kg. [a) -4 m.s^{-1}; -16 kg.m.s^{-1}; b) 11,66 m.s^{-1}, 46,65 kg.m.s^{-1}]
3. Raketa mala v istom okamihu rýchlosť 120 m.s^{-1} a hmotnosť 16 000 kg. Po istom čase sa veľkosť rýchlosti rakety zväčšila na 140 m.s^{-1} a hmotnosť rakety bola 12 000 kg. Určte a) zmenu veľkosti hybnosti rakety v danom čase; b) veľkosť zmeny hybnosti rakety. Predpokladáme, že pohyb rakety je priamočiary. [a) -240.10^3 kg.m.s^{-1}; b) 240.10^3 kg.m.s^{-1}]

2.6 Sila a jej jednotka

Druhý Newtonov pohybový zákon umožňuje určiť veličinu sila (z jej dynamických účinkov) vzťahom

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta t}}$$

Sila je určená pomerom zmeny hybnosti hmotného bodu alebo telesa a doby, v ktorej túto zmenu spôsobila.

Pre veľkosť sily platí $F = \frac{|\Delta \boldsymbol{p}|}{\Delta t} = \frac{|\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1|}{\Delta t}$. Keď je hmotnosť m počas doby Δt konštantná, uvedený vzťah pre silu môžeme napísať v tvare

$$F = m \frac{|\Delta \boldsymbol{v}|}{\Delta t}$$

Keďže silu v dobe Δt považujeme za stálu (má stálu veľkosť i smer) a uvažujeme, že hmotnosť telesa sa pri pohybe nemení, tak $\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$ určuje zrýchlenie $\boldsymbol{a}$, ktoré je čo do veľkosti a smeru tiež stále

$$\boldsymbol{F} = m \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = m \boldsymbol{a}$$

(Keď začiatočná rýchlosť $\boldsymbol{v}$ neleží v jednej priamke s pôsobiacou silou, môže byť takýto pohyb aj krivočiary.)

Pre silu tak dostávame vzťah, ktorý má v klasickej fyzike všeobecnú platnosť

$$\boxed{\boldsymbol{F} = m \boldsymbol{a}}$$

Aby mal hmotný bod s hmotnosťou m v inerciálnej vzťažnej sústave zrýchlenie $\boldsymbol{a}$, musia naň okolné objekty pôsobiť výslednou silou $\boldsymbol{F} = m \boldsymbol{a}$.

Smer sily a smer zrýchlenia sú súhlasné. Pre veľkosť sily potom platí $F = m\ a$. Z tohto vzťahu určíme jednotku sily

$$[F] = \mathrm{kg} \,.\, \mathrm{m} \,.\, \mathrm{s}^{-2}$$

Nazýva sa **newton** (N).

Newton je sila, ktorá telesu s hmotnosťou 1 kilogram udeľuje zrýchlenie 1 m za sekundu na druhú.

Poznámka: Zo základnej školy poznáte definíciu newtona pomocou tiaže. Bola to len približná definícia, lebo ste ešte nepoznali veličinu zrýchlenie.

V základnej škole ste sa oboznámili s meraním síl na základe ich deformačných účinkov (pomocou silomeru). Takéto meranie síl sa nazýva statické.

Určovanie sily na základe zmeny hybnosti alebo na základe zrýchlenia hmotného bodu, ktoré mu táto sila udeľuje, nazýva sa dynamické meranie síl. Dynamické meranie síl umožňuje merať napr. sily pôsobiace na pohybujúcu sa planétu alebo na pohybujúci sa elektrón.

Pretože sila je vektorová veličina, môžeme ju znázorňovať orientovanou úsečkou. Podľa toho, aký druh pôsobenia telies na dané teleso sila charakterizuje, alebo akým spôsobom sa táto sila realizuje, hovoríme vo fyzike napr. o magnetickej sile — na teleso pôsobí magnetické pole; o gravitačnej sile — na teleso pôsobí gravitačné pole; o trecej sile, ak vzniká vzájomné pôsobenie pohybom telesa po povrchu iného telesa.

Podľa záverov modernej fyziky existujú štyri základné druhy silového pôsobenia — fyzikálnej interakcie. Je to gravitačná, elektromagnetická, slabá a silná interakcia. Slabá a silná interakcia sa týkajú len oblasti mikrosveta. Existujú napríklad v jadrách atómov. Sily, ktoré majú pôvod v elektromagnetickej a gravitačnej interakcii, vyskytujú sa všade, prejavujú sa univerzálne v celom vesmíre.

Jednou zo síl, s ktorými sa v každodennom živote najčastejšie stretávame, je tiaž telesa $\boldsymbol{G}$. Pre jej veľkosť platí vzťah známy už zo základnej školy

$$G = m\ g$$

Viete, že tiažové zrýchlenie g sa mení so zemepisnou šírkou. Ako sa dozviete v stati 6.3, súvisí tento jav s otáčaním Zeme. Na telesá vo vzťažnej sústave spojenej s povrchom otáčajúcej sa Zeme pôsobí okrem gravitačnej sily $\boldsymbol{F}_g$ ešte ďalšia sila. Výsledná sila, ktorá vznikne zložením týchto dvoch síl, nazýva sa tiažová sila $\boldsymbol{F}_G$. Má zvislý smer a veľkosťou sa takmer nelíši od gravitačnej sily v danom mieste na povrchu Zeme (preto sme v základnej škole tieto sily nerozlišovali).

Pretože tiažová sila spôsobuje voľný pád telies so zrýchlením $\boldsymbol{g}$, platí pre ňu

$$\boxed{\boldsymbol{F}_G = m\,\boldsymbol{g}}$$

Príklady

1. Plne obsadené osobné auto s hmotnosťou 1 t išlo rýchlosťou 72 km.h^{-1}. Touto rýchlosťou narazilo kolmo na pevnú stenu. Náraz trval 0,1 s. Aká veľká priemerná sila pôsobila na auto počas zrážky? (Priemerná sila je stála sila, ktorá v danom časovom úseku spôsobí rovnakú zmenu hybnosti ako premenná sila.)

$m = 1\,000$ kg, $v = 20$ m.s^{-1}, $t = 0{,}1$ s, $F = ?$

Pre veľkosť sily platí

$$F = \frac{|\Delta \boldsymbol{p}|}{\Delta t} = m\,\frac{|\Delta \boldsymbol{v}|}{\Delta t} = m\,\frac{|\Delta v|}{\Delta t}$$

$|\Delta v| = 20$ m.s^{-1}

$$F = 1\,000\,\frac{20}{0{,}1}\ \mathrm{N} = 200\,000\ \mathrm{N} \doteq 0{,}2\ \mathrm{MN}$$

Pri zrážke pôsobila na auto priemerná sila 0,2 MN.

2. Na elektrón v elektrickom poli vo vákuu pôsobila stála sila s veľkosťou 18,2.10^{-20} N. Akú veľkú rýchlosť získal elektrón z pokoja po prebehnutí dráhy 1 cm? ($m_e = 9{,}1 \,.\, 10^{-31}$ kg)

$F = 18{,}2 \,.\, 10^{-20}$ N, $s = 0{,}01$ m, $v = ?$

$$v = a\,t,\quad a = \frac{F}{m},\quad s = \frac{1}{2}\,a\,t^2,\quad t = \sqrt{\frac{2\,s}{a}} = \sqrt{\frac{2\,s\,m}{F}}$$

$$v = \frac{F}{m}\sqrt{\frac{2\,s\,m}{F}} = \sqrt{\frac{2\,s\,F}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\,.\,0{,}01\,.\,18{,}2\,.\,10^{-20}}{9{,}1\,.\,10^{-31}}}\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}} = 6{,}3\,.\,10^{4}\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$$

Elektrón získal rýchlosť $6{,}3\,.\,10^{4}\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$.

Úlohy

V úlohách predpokladáme, že všetky údaje sa vzťahujú na Zem (teda prakticky na inerciálnu vzťažnú sústavu). Pri riešení zanedbávame trenie a všetky odpory proti pohybu.

1. Na guľu s hmotnosťou 100 g, ktorá leží na vodorovnej doske, pôsobí vo vodorovnom smere sila, ktorá jej udeľuje zrýchlenie $20\ \mathrm{cm\,.\,s^{-2}}$. Určte veľkosť sily. [0,02 N]
2. S akým veľkým zrýchlením sa rozbieha vlak s hmotnosťou 800 t, ak ťažná sila lokomotívy je $2\,.\,10^{5}$ N? [$0{,}25\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}$]
3. Auto s hmotnosťou 800 kg sa rozbieha po vodorovnej vozovke. Motor auta pôsobí silou 960 N. Aké veľké ~~zrýchlenie~~ rýchlosť dosiahne auto za 0,2 minúty? [$14{,}4\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$]
4. Vlak s hmotnosťou 200 t sa rozbieha rovnomerne zrýchlene po vodorovných koľajniciach po dráhe 400 m a dosiahne rýchlosť $72\ \mathrm{km\,.\,h^{-1}}$. Určte veľkosť sily, ktorá uvádza vlak do pohybu. [100 kN]
5. Hokejista udrel do puku s hmotnosťou 200 g ležiaceho v pokoji na ľade silou 420 N vo vodorovnom smere. Akou rýchlosťou puk letel, ak náraz hokejky trval 0,01 s? [$21\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$]

2.7 Meranie hmotnosti telies

V základnej škole ste určovali hmotnosť telies pomocou váh (vážením). Hmotnosť telesa pri vážení sa určuje porovnávaním tiaže telesa a tiaže závažia. Pretože tiaž telesa i tiaž závažia majú pôvod v gravitačnom pôsobení Zeme, hmotnosť telesa určená ich porovnávaním sa nazýva **gravitačná hmotnosť**.

Ak na voľne pohyblivé teleso začne pôsobiť istá sila, uvedie ho do zrýchleného pohybu. No veľkosť zrýchlenia rozličných telies pri rovnakej pôsobiacej sile je rôzna a závisí od hmotnosti týchto telies

$$a = \frac{F}{m}$$

Čím má teleso väčšiu hmotnosť, tým viac sa pri ňom prejaví vlastnosť zotrvávať v pôvodnom pohybovom stave — zotrvačnosť. Hmotnosť telesa je teda pre posuvné pohyby mierou zotrvačnosti telesa. Aj na základe tohto poznatku môžeme merať hmotnosť telesa. Ak poznáme veľkosť pôsobiacej sily a ak zmeriame veľkosť zrýchlenia, ktoré sila danému telesu udeľuje, môžeme vypočítať hmotnosť telesa

$$m = \frac{F}{a}$$

Pritom predpokladáme, že pri pohybe sa hmotnosť telesa nemení. Takto určená hmotnosť sa nazýva **zotrvačná hmotnosť.**

Pri určovaní hmotnosti obidvoma spôsobmi dostaneme rovnaké výsledky. Zotrvačná a gravitačná hmotnosť daného telesa sa rovnajú.

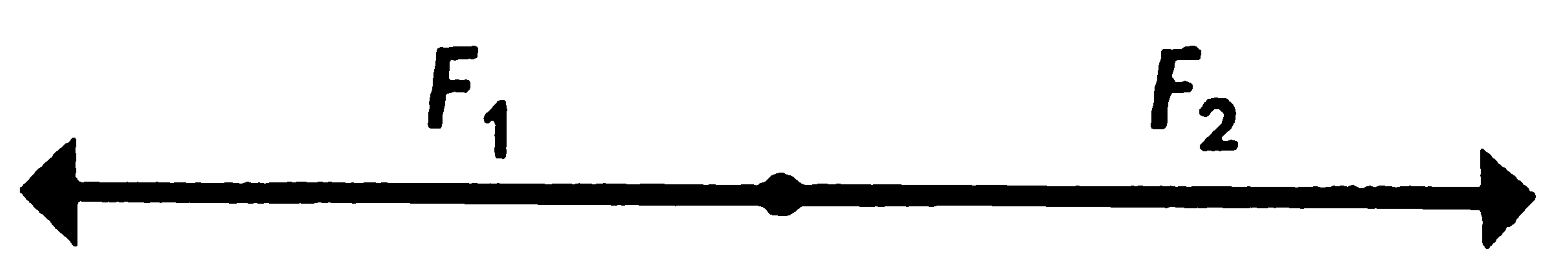
2.8 Skladanie síl pôsobiacich na hmotný bod

Zo základnej školy viete, že ak na hmotný bod pôsobí súčasne viac síl, môžeme ich pôsobenie nahradiť jednou silou, ktorú nazývame výslednica síl. Pretože sila je vektorová fyzikálna veličina, určíme **výslednicu** $\boldsymbol{F}$ ako vektorový súčet jednotlivých síl pôsobiacich na daný hmotný bod

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \ldots + \boldsymbol{F}_n$$

Keď na hmotný bod pôsobia dve rovnako veľké sily, ale opačného smeru (obr. 2-7), výslednica sa rovná nulovému vektoru

$$\boldsymbol{F}_1 + (-\boldsymbol{F}_2) = \boldsymbol{0}$$



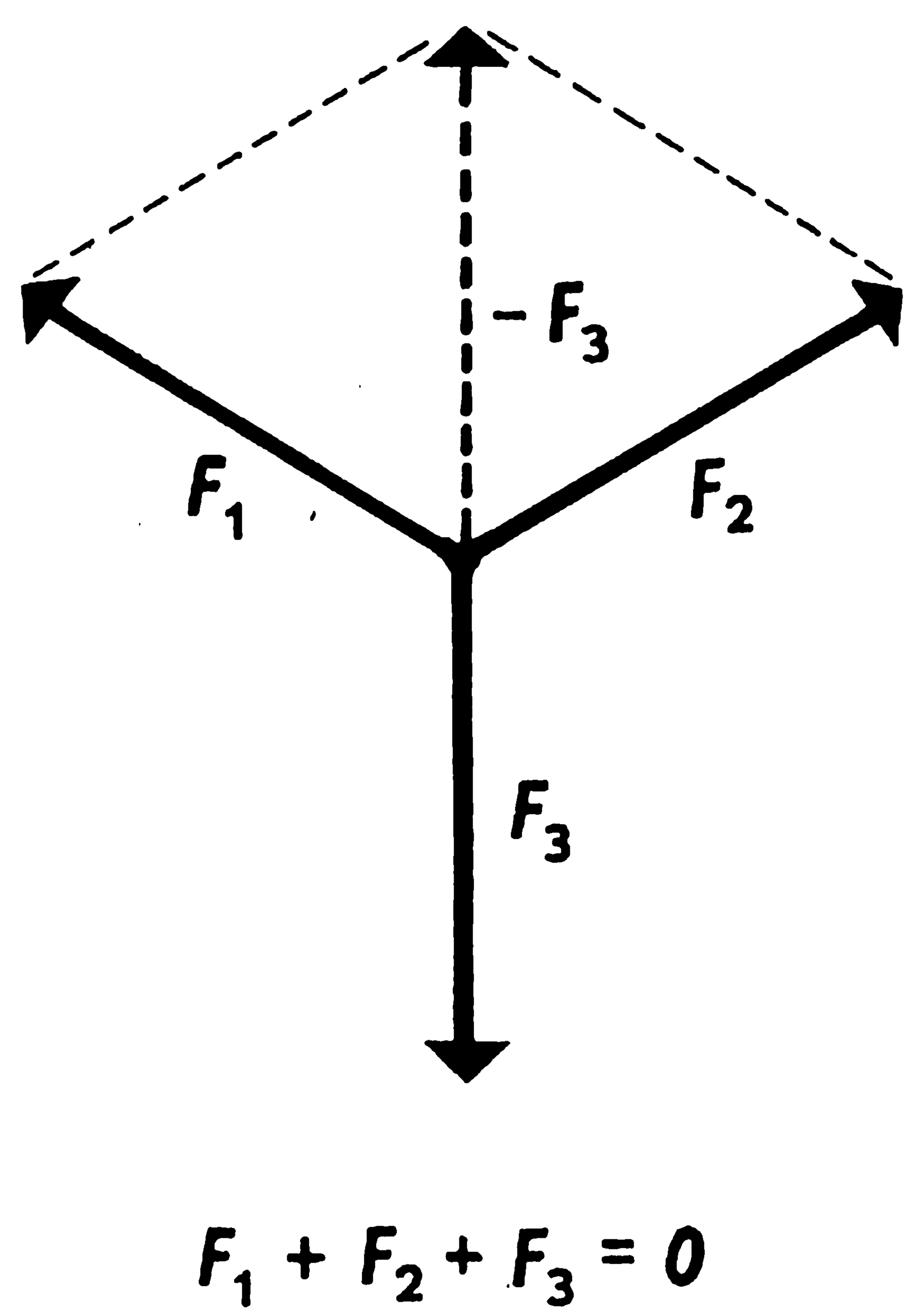
Obr. 2-7

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0}$$

Poznámka: Správnejšie je, keď povieme, že výslednica sa rovná nulovému vektoru sily

$$\boldsymbol{F}_1 + (-\boldsymbol{F}_2) = \boldsymbol{0}_F$$

Aby fyzikálna rovnica mala zmysel, musia byť členy rovnice fyzikálne rovnakého druhu. Pri vektorovom zápise musí byť teda aj pravá strana rovnice nulovým vektorom sily. Ak je to však z textu zrejmé, netreba túto skutočnosť zdôrazňovať; píšeme často iba **0** (podobne aj v iných prípadoch).



Obr. 2-8

Na obr. 2-8 sú zložené tri sily $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$; ich výslednica sa rovná nule. Platí

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{F}; \quad \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}_3$$

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = -\boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_3 = \mathbf{0}$$

Keď sa výslednica síl pôsobiacich súčasne na hmotný bod rovná nule, $\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$, potom v inerciálnej sústave

$$m\,\boldsymbol{a} = \mathbf{0} \quad \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$$

Zrýchlenie hmotného bodu sa tiež rovná nule, hmotný bod si zachováva rýchlosť i hybnosť

$$\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v} = \mathbf{konšt.}$$

Keď sa výslednica síl v inerciálnej vzťažnej sústave rovná nule a hmotný bod je v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, sily pôsobiace na teleso sú vykompenzované.

Silu ako fyzikálnu vektorovú veličinu môžeme aj rozložiť na dve alebo viac síl (podobne ako posunutie). Tieto sily sa nazývajú **zložky** danej sily.

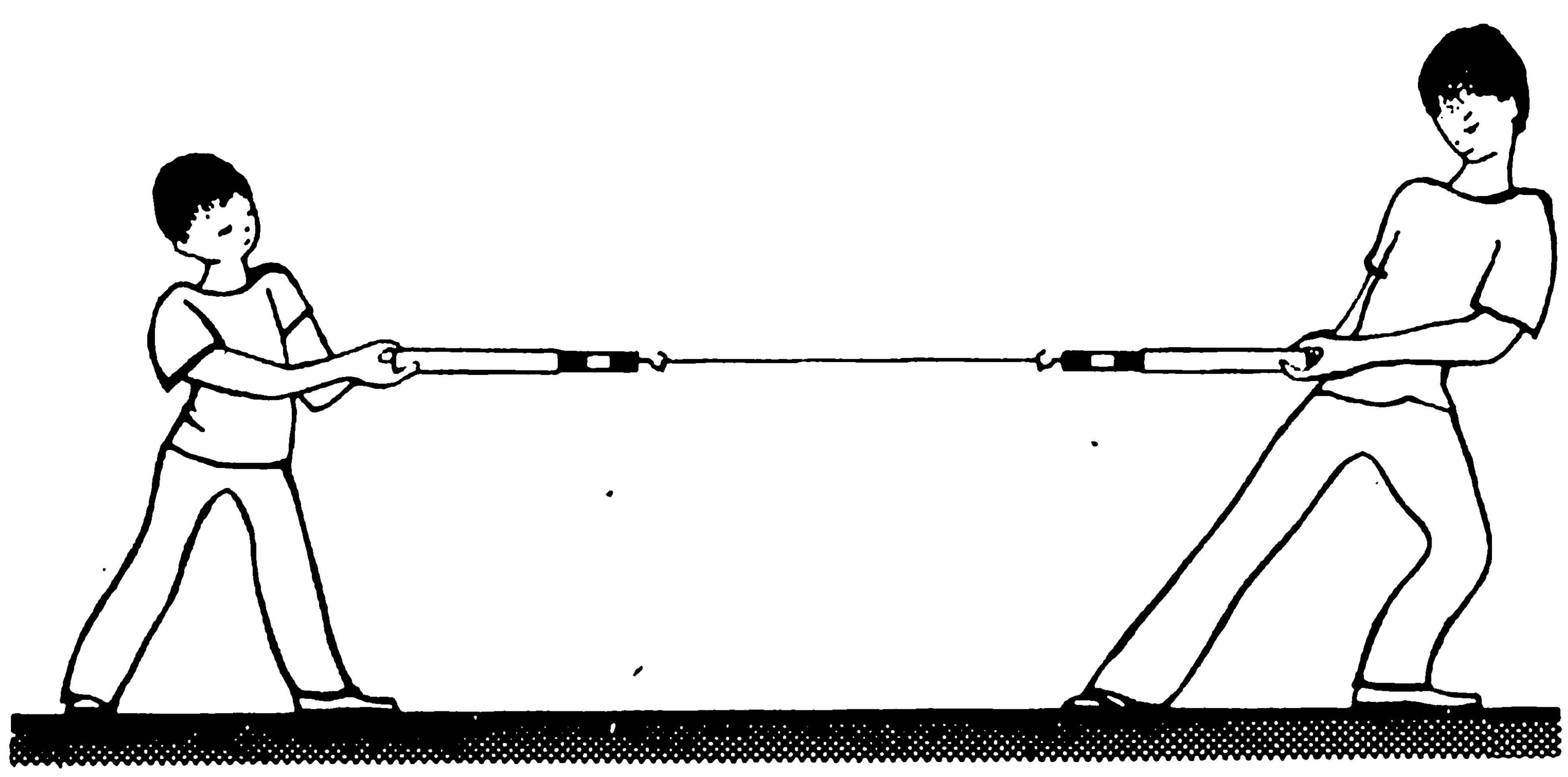
Úlohy

1. V bode O pôsobia tri sily s veľkosťami $F_1 = 3$ N, $F_2 = 4$ N a $F_3 = 5$ N. Sila $\boldsymbol{F}_1$ má smer vodorovne vľavo od bodu O, sila $\boldsymbol{F}_2$ zviera so silou $\boldsymbol{F}_1$ uhol 120° v kladnom zmysle (t. j. proti smeru pohybu hodinových ručičiek), sila $\boldsymbol{F}_3$ zviera so silou $\boldsymbol{F}_1$ uhol 120° v zápornom zmysle (t. j. v smere pohybu hodinových ručičiek). Určte výslednicu týchto síl a jej veľkosť. [1,7 N]
2. Začiatočný bod orientovanej úsečky, ktorá znázorňuje silu $\boldsymbol{F}$ s veľkosťou 5 N, je v bode $O = [0 \text{ cm}, 0 \text{ cm}]$, koncový bod v bode $B = [3 \text{ cm}, 4 \text{ cm}]$. Určte súradnice koncového bodu úsečky zobrazujúcej silu — $\boldsymbol{F}$. Určte zložky obidvoch síl v súradnicových osiach.
3. Na hmotný bod s hmotnosťou 2 kg pôsobia dve navzájom kolmé sily $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$. Veľkosť sily $F_1 = 3$ N, veľkosť sily $F_2 = 4$ N. Určte výsledné zrýchlenie bodu spôsobené obidvoma súčasne pôsobiacimi silami. [2,5 m.s^{-2}]

2.9 Tretí pohybový zákon

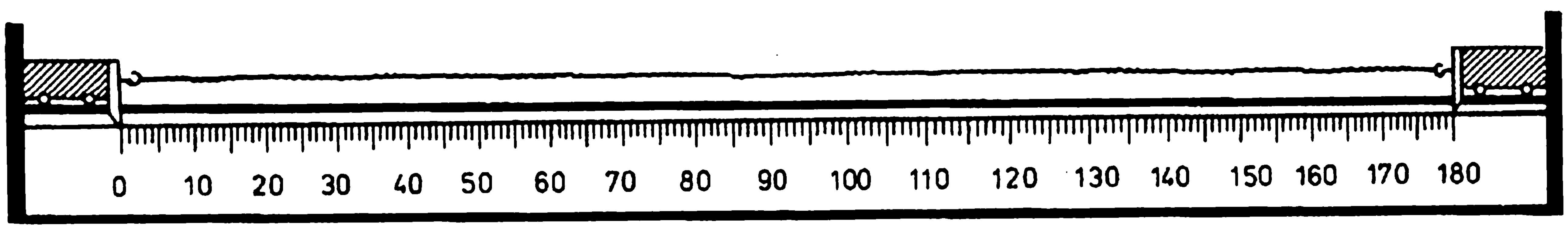
Vieme už, že silové pôsobenie dvoch telies je vždy vzájomné. Chceme teraz zistiť, v akom vzťahu sú veľkosti a smery síl, ktorými pôsobí teleso A na teleso B a naopak.

Dvaja približne rovnako silní žiaci držia silomery spojené napnutým motúzom (obr. 2-9). Najprv ťahá len jeden žiak, potom druhý a nakoniec ťahajú od seba obidvaja naraz. Pokus zopakujeme, ale silomery budú držať žiaci, z ktorých jeden je silný, druhý slabý. Ak žiaci ťahajú viac, silomery ukazujú väčšiu silu, ak ťahajú menej, údaj na silomeroch je menší. V každom jednotlivom prípade je však údaj sily na obidvoch silomeroch rovnaký. Predĺženia pružín obidvoch silomerov ležia v jednej



Obr. 2-9

priamke, ale majú opačný smer. Pri vzájomnom pôsobení telies majú teda sily, ktorými tieto telesá navzájom na seba pôsobia, rovnakú veľkosť a opačný smer.



Obr. 2-10

Všimnime si ešte vzájomné pôsobenie pri dynamických účinkoch. Spojme dva upevnené vozíky s rovnakou hmotnosťou napnutým gumovým vláknom, prostredníctvom ktorého vozíky na seba vzájomne pôsobia (obr. 2-10). Po uvoľnení sa oba vozíky začnú pohybovať k sebe. Po odpadnutí vlákna sa pohybujú rovnomerne priamočiaro. Zistíme, že sa stretnú práve uprostred pôvodnej vzdialenosti medzi nimi. Obidva vozíky sa teda pohybovali rovnakými rýchlosťami a pretože majú rovnakú hmotnosť, majú v okamihu stretnutia aj rovnakú hybnosť. Prostredníctvom napnutého vlákna pôsobili vozíky na seba rovnakú dobu Δt, pričom nastala pri oboch rovnaká zmena veľkosti hybnosti Δp, ale opačného smeru: $\Delta \boldsymbol{p}_1 = -\Delta \boldsymbol{p}_2$. Na obidva vozíky teda pôsobili sily rovnakej veľkosti, ale opačného smeru

$$\boxed{\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2}$$

Tento poznatok je obsahom tretieho Newtonovho pohybového zákona:

> Dva hmotné body na seba navzájom pôsobia rovnako veľkými silami opačného smeru.

Jednu z týchto síl zvyčajne nazývame **akcia**, druhú **reakcia**. V inerciálnych sústavách vznik každej sily — akcie sprevádza pri vzájomnom pôsobení telies vznik rovnako veľkej sily opačného smeru — reakcie.

Akcia a reakcia súčasne vznikajú a súčasne zanikajú. Každá z týchto síl však pôsobí na iné teleso, preto sa vo svojich účinkoch navzájom nerušia. Pôsobenie akcie a reakcie sa teda odlišuje od prípadu, keď dve rovnako veľké sily opačného smeru pôsobia súčasne na ten istý hmotný bod.

Úlohy

1. Dvaja žiaci ťahajú niť za opačné konce, každý silou 50 N. Pretrhne sa niť, ak vydrží ešte ťah silou 80 N?
2. Podľa tretieho pohybového zákona pôsobí padajúce teleso na Zem rovnako veľkou silou ako Zem na teleso. Prečo nepozorujeme aj zrýchlený pohyb Zeme smerom k padajúcemu telesu? (Hmotnosť Zeme je približne $6 \cdot 10^{24}$ kg.)
3. Dvaja chlapci s hmotnosťami 40 kg a 50 kg stoja na korčuliach na ľade. Prvý chlapec sa odstrkuje od druhého stálou silou 50 N vo vodorovnom smere. Aké veľké zrýchlenie získa prvý a aké druhý chlapec? [1,25 $m \cdot s^{-2}$, 1 $m \cdot s^{-2}$]
4. V člne stojí muž a priťahuje sa k brehu pomocou lana silou veľkosti F. a) Lano je priviazané druhým koncom k pevnému kolíku na brehu. b) Lano drží na brehu druhý muž a pôsobí naň silou veľkosti F, ale opačného smeru. Bude sa pohyb loďky v prípadoch a) a b) odlišovať?
   Zdôvodnite! [nie]

2.10 Zákon zachovania hybnosti

Zo state 2.9 vieme, že pri vzájomnom silovom pôsobení dvoch vozíkov s rovnakými hmotnosťami nastali pri obidvoch rovnako veľké zmeny hybnosti. Pozorujme pomocou pokusu zostaveného ako v stati 2.9, ako sa zmenia hybnosti, ak sa budú odlišovať hmotnosti jednotlivých vozíkov. Keďže vozíky sa pohybujú rovnomerne priamočiaro (okrem krátkodobého silového pôsobenia, kým je gumové vlákno medzi nimi napnuté), pre prejdené dráhy platí

$$s_1 = v_1 t \qquad s_2 = v_2 t$$

Rýchlosti vozíkov sú teda v rovnakom pomere ako prejdené dráhy. Výsledky pokusu zapíšeme do tabuľky:

	$\frac{m_1}{\text{kg}}$	$\frac{m_2}{\text{kg}}$	$\frac{s_2}{s_1}$	
1.	0,2	0,2	1	$v_2 = v_1$
2.	0,2	0,4	$\frac{1}{2}$	$v_2 = \frac{1}{2} v_1$
3.	0,2	0,6	$\frac{1}{3}$	$v_2 = \frac{1}{3} v_1$
4.	0,4	0,6	$\frac{2}{3}$	$v_2 = \frac{2}{3} v_1$

Určme veľkosti zmien hybnosti oboch vozíkov v jednotlivých prípadoch:

1. $\Delta p_1 = 0{,}2\ \text{kg}.v_1$ $\quad \Delta p_2 = 0{,}2\ \text{kg}.v_2 = 0{,}2\ \text{kg}.v_1$

2. $\Delta p_1 = 0{,}2\ \text{kg}.v_1$ $\quad \Delta p_2 = 0{,}4\ \text{kg}.v_2 = 0{,}4\ \text{kg}\cdot\frac{1}{2} v_1 = 0{,}2\ \text{kg}.v_1$

3. $\Delta p_1 = 0{,}2\ \text{kg}.v_1$ $\quad \Delta p_2 = 0{,}6\ \text{kg}.v_2 = 0{,}6\ \text{kg}.\frac{1}{3} v_1 = 0{,}2\ \text{kg}.v_1$

4. $\Delta p_1 = 0{,}4\ \text{kg}.v_1$ $\quad \Delta p_2 = 0{,}6\ \text{kg}.v_2 = 0{,}6\ \text{kg}.\frac{2}{3} v_1 = 0{,}4\ \text{kg}.v_1$

Z pokusov vyplýva, že v sústave dvoch telies, kde zmena hybnosti môže nastať iba vzájomným pôsobením telies sústavy silami akcie a reakcie, zmeny hybnosti sú rovnako veľké, ale majú opačný smer

$$\Delta \boldsymbol{p}_1 = -\Delta \boldsymbol{p}_2$$

alebo

$$\Delta \boldsymbol{p}_1 + \Delta \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{0}$$

Sústava telies, v ktorej zmena hybnosti nastáva iba vzájomným pôsobením telies, nazýva sa **izolovaná sústava**.

Na začiatku pokusu boli obidva vozíčky v pokoji, celková hybnosť sústavy bola nulová. Pri pohybe vozíčkov proti sebe nastala zmena hybnosti obidvoch vozíčkov tak, že celková hybnosť bola opäť nulová. Na konci pokusu po zrážke, keď sa obidva vozíčky zastavili, celková hybnosť sústavy bola tiež nulová. Počas pokusu sa teda celková hybnosť sústavy nemenila.

Predchádzajúci vzťah napíšeme tak, že dosadíme

$$\Delta \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_{10}$$
$$\Delta \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_{20}$$

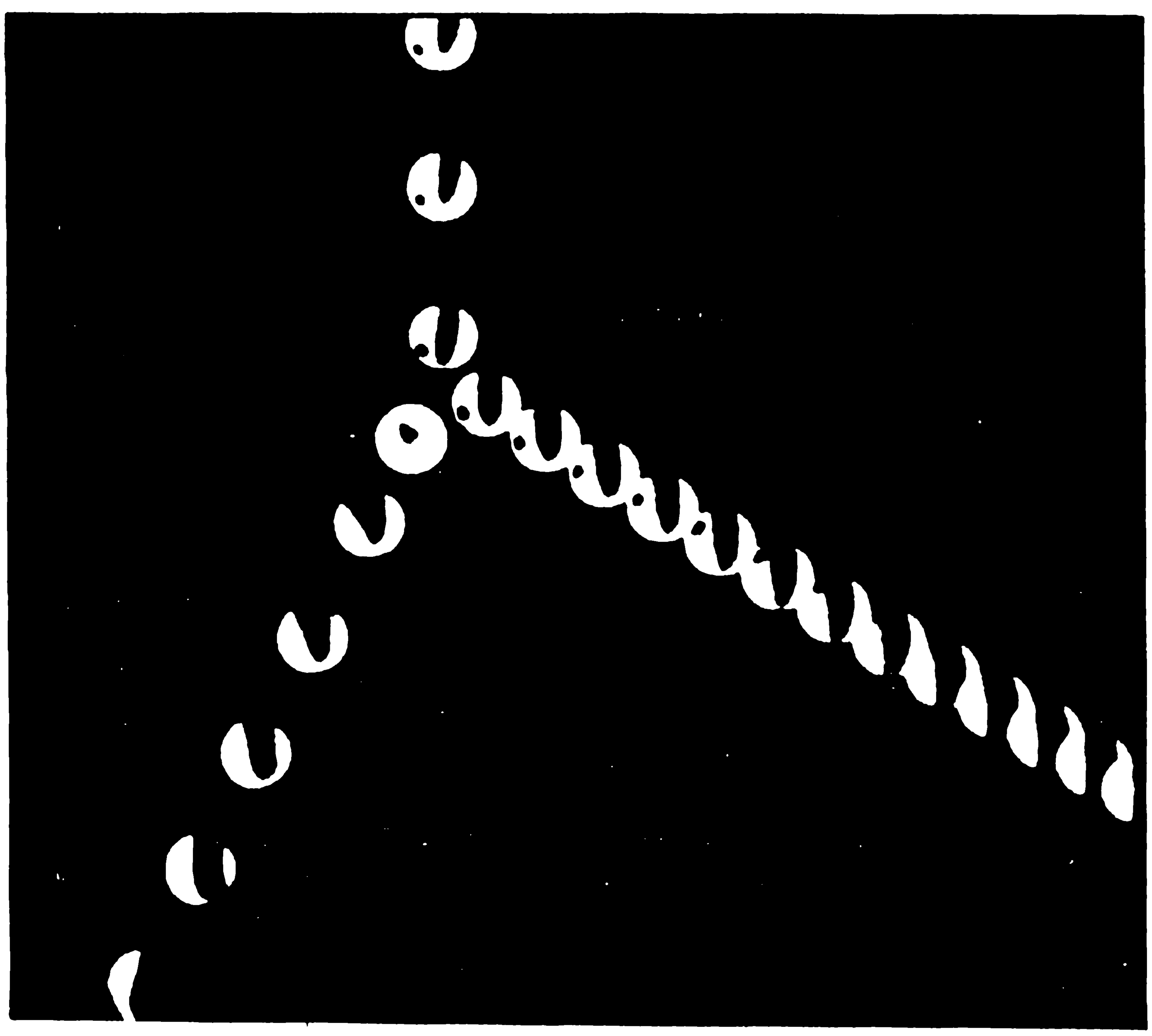
kde indexom nula označujeme začiatočné hybnosti telies. Potom

$$\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_{10} = -(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_{20})$$

a po úprave

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_{10} + \boldsymbol{p}_{20}$$

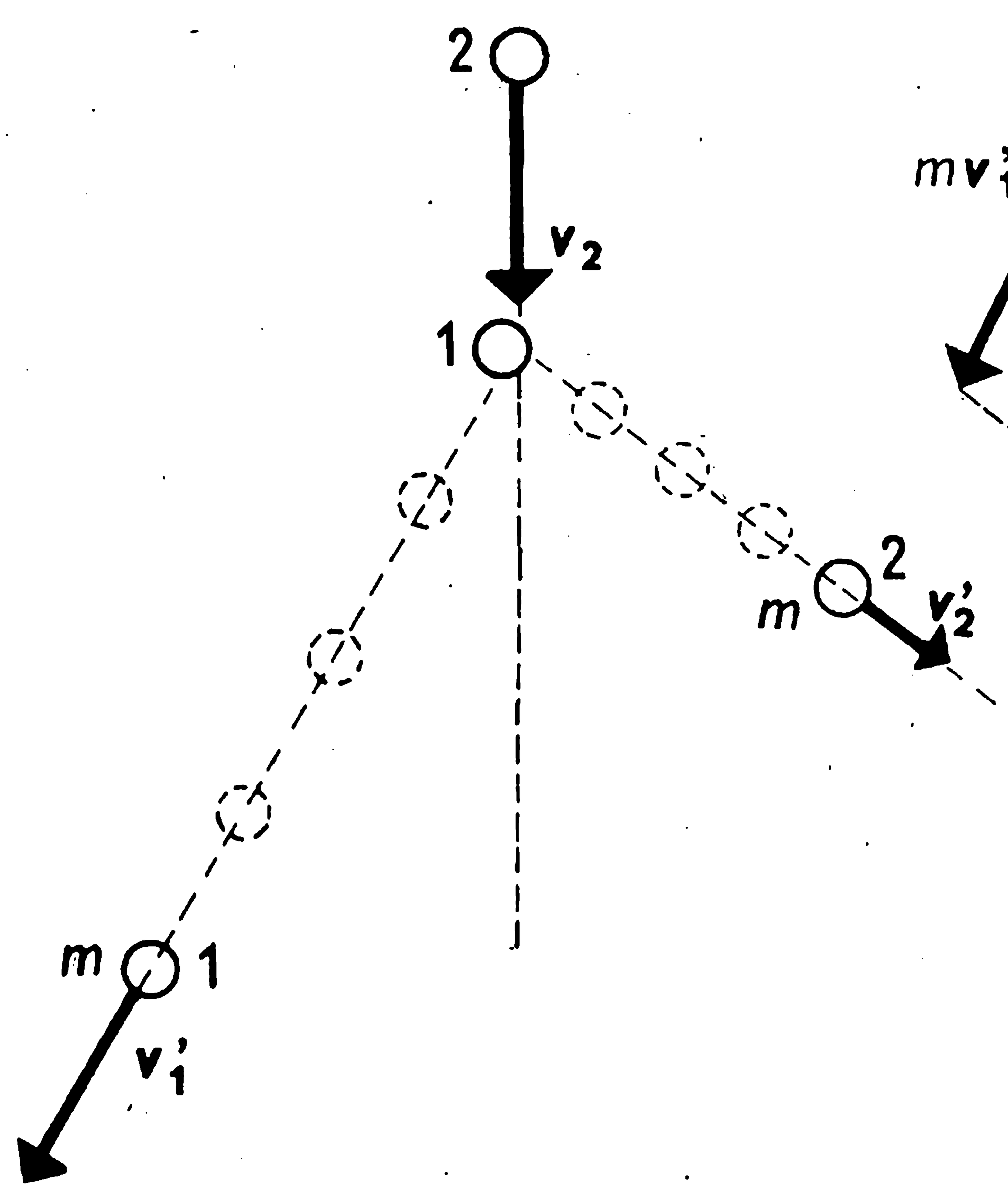
Môžeme teda zhrnúť, že hybnosti jednotlivých telies izolovanej sústavy sa nemôžu meniť, ale celková hybnosť sústavy daná vektorovým súčtom hybností jednotlivých telies je stála (ďalšie príklady pozri na obr. 2-11; 2-12 a 2-13).



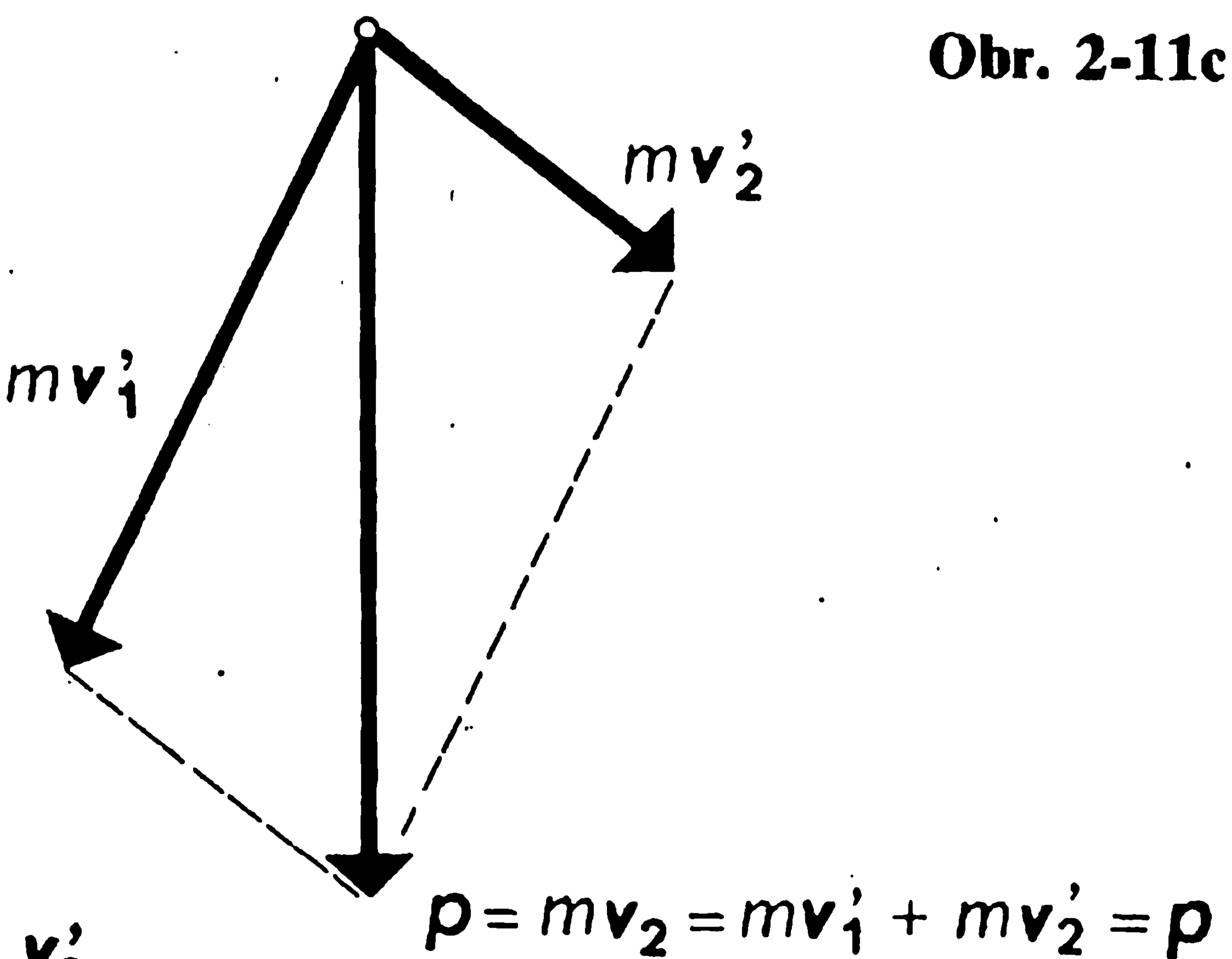
Obr. 2-11a

Príklad zachovania hybnosti izolovanej sústavy telies. Fotografia zrážky dvoch biliardových gúľ pomocou zábleskov nasledujúcich vždy po $\frac{1}{30}$ s. Hmotnosti gúľ sú rovnaké. O otáčavom pohybe gúľ neuvažujeme

Obr. 2-11b



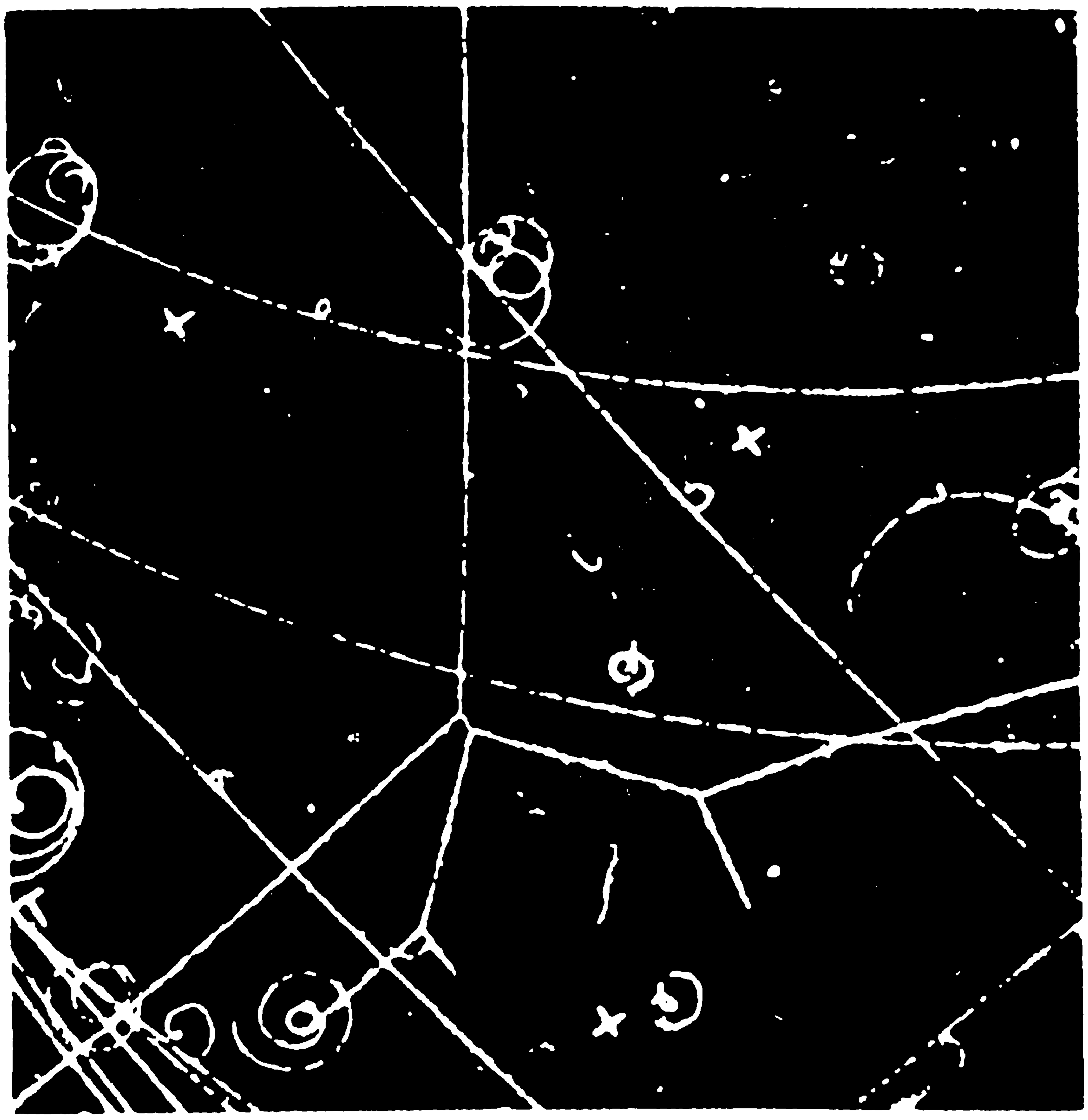
Obr. 2-11c



Obr. 2-11b
Schematické znázornenie zrážky gúľ z fotografie 2-11a). Guľa 1 bola pred zrážkou v pokoji. Guľa 2 sa po zrážke odchyľuje od pôvodného smeru vpravo. Z obrázka možno určiť, že veľkosti rýchlostí v_2, v'_1, v'_2 sú v pomere $v_2 : v'_1 : v'_2 = 11$ mm : 9 mm : 5 mm, kde v_2 je veľkosť rýchlosti gule 2 pred zrážkou, v'_1 a v'_2 sú veľkosti rýchlostí gúľ 1 a 2 po zrážke. Pomery veľkostí rýchlostí sme určili zo vzdialeností medzi polohami gule pred zrážkou a vzdialenosti polôh gule 1 a 2 po zrážke. Tento pomer je 11 mm : 9 mm : 5 mm. Pretože plochy sú fotografované vždy po rovnakom čase, je aj pomer $v_2 : v'_1 : v'_2 =$ $= 11$ mm : 9 mm : 5 mm. Keďže hmotnosti gúľ sú rovnaké, budú v rovnakom pomere aj veľkosti hybností $p_2 = m\, v_2$, $p'_1 = m\, v'_1$, $p'_2 = m\, v'_2$. Smery rýchlostí (a tým i smery hybností) gúľ pred zrážkou a po nej sú zrejmé z obrázka

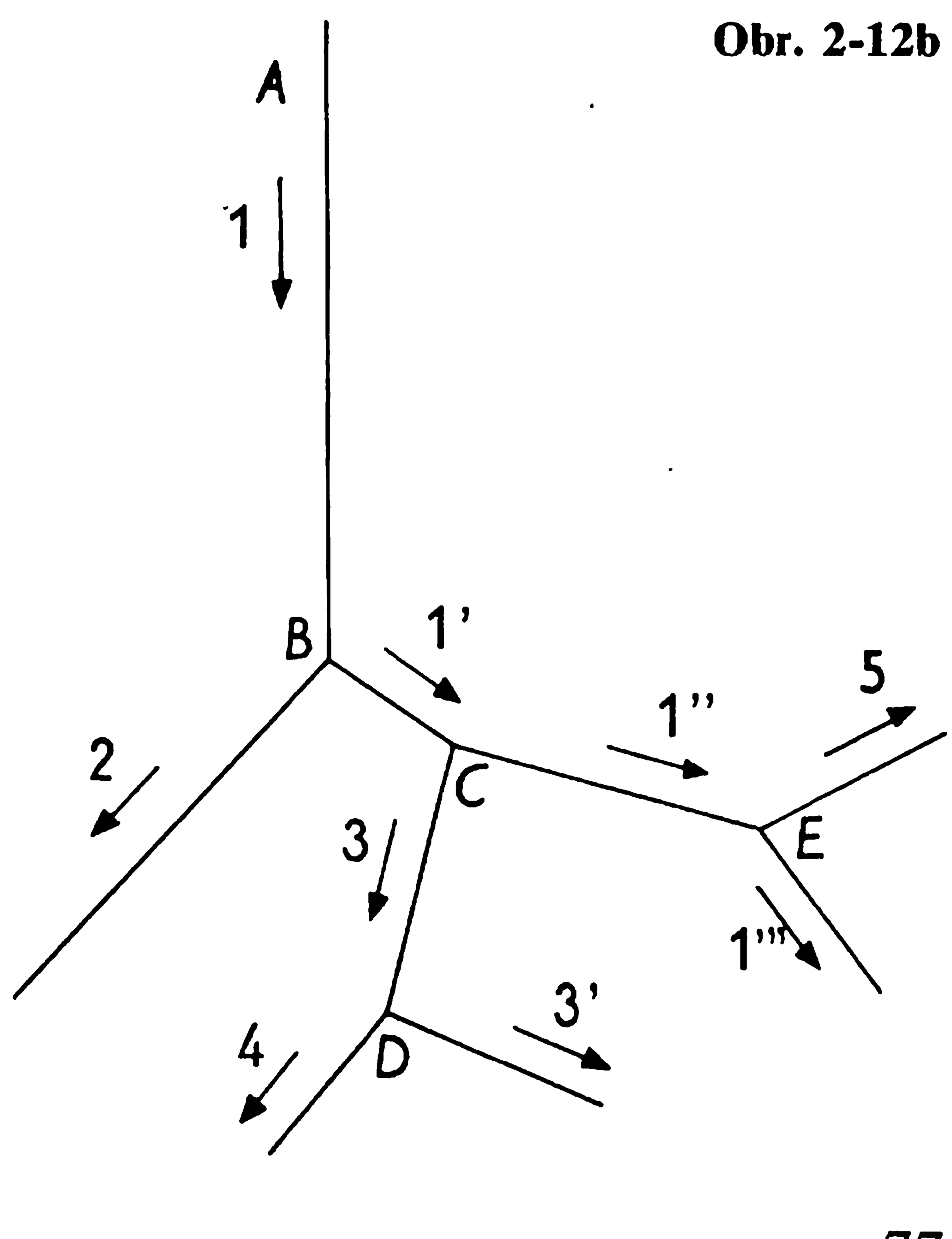
Obr. 2-11c
Grafické znázornenie zákona zachovania hybnosti sústavy dvoch gúľ ukazuje, že celková hybnosť obidvoch gúľ pred zrážkou $\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}_1 + m\,\boldsymbol{v}_2 = m\,\boldsymbol{v}_2$ sa rovná celkovej hybnosti gúľ po zrážke $\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}'_1 + m\,\boldsymbol{v}'_2$, alebo $m\,\boldsymbol{v}_2 = m\,\boldsymbol{v}'_1 + m\,\boldsymbol{v}'_2 =$ **konšt.** Vidíme tiež, že celková hybnosť sa rovná vektorovému súčtu jednotlivých hybností

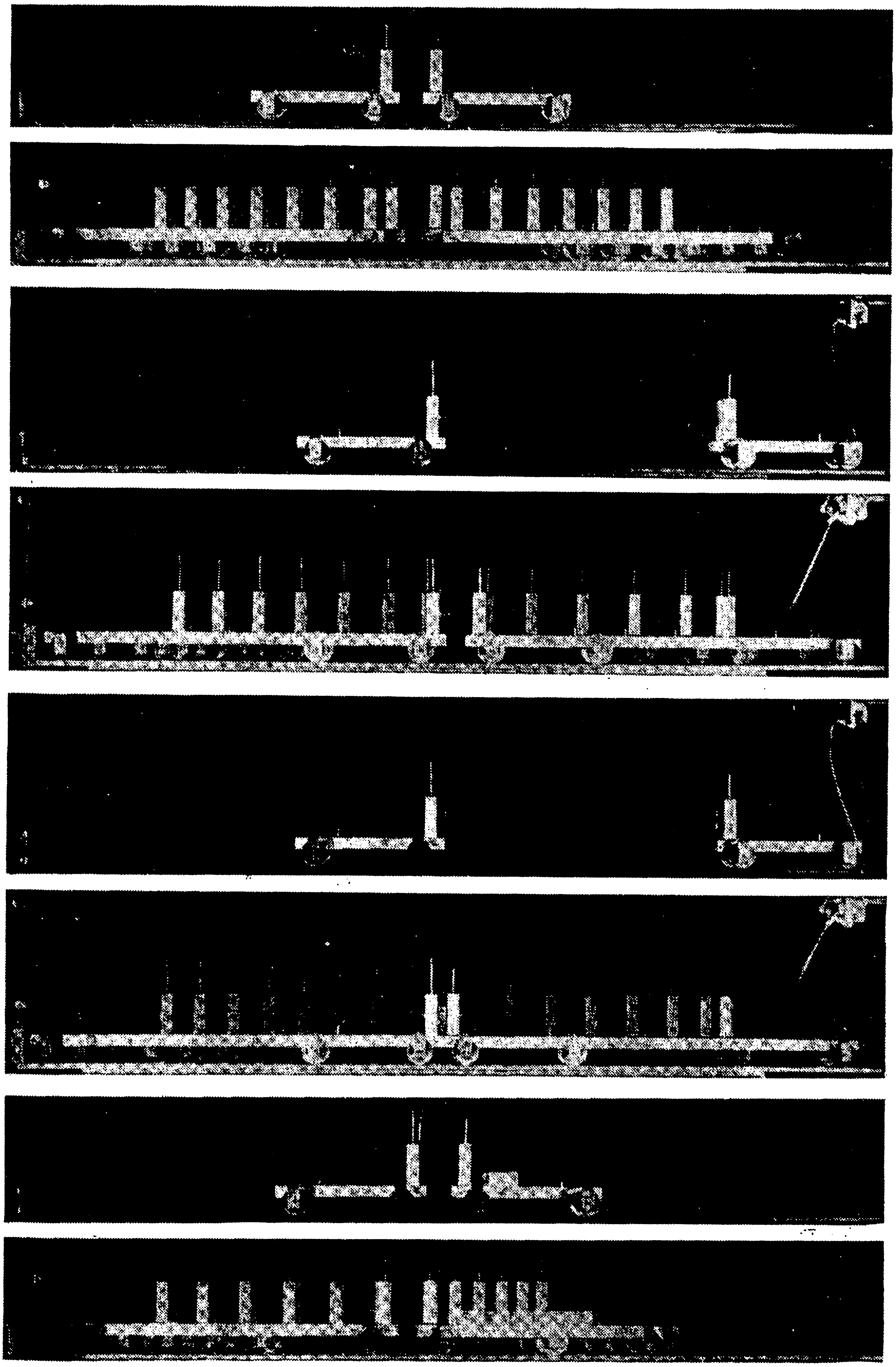
Obr. 2-12a



Fotografia ukazuje sled zrážok protónu s inými protónmi. Protón A letí „zhora" a zrazí sa najprv s protónom B (pozri obr. 2-12b). Protóny B, C, D, E boli pred zrážkou v pokoji ako vodíkové jadrá v tekutom vodíku. Protón A sa zrážkou vychýlil z pôvodného smeru 1′. Protón B sa po zrážke s A začne pohybovať v smere 2. Protón A sa ďalej zrazí s protónom C v pokoji, ktorý sa po zrážke pohybuje v smere 3 a protón A v smere 1′, pričom sa zrazí s protónom E v pokoji. Protón E sa po zrážke pohybuje v smere 5 a protón A v smere 1‴. Protón C sa zrazí s protónom D v pokoji, ktorý sa začne pohybovať v smere 4 a protón C v smere 3′. Výpočet ukazuje, že i v tomto prípade sa celková hybnosť sústavy častíc pred zrážkou (čo je hybnosť protónu A, pretože častice B, C, D, E boli pred zrážkou v pokoji) rovná celkovej hybnosti častíc po zrážkach

Obr. 2-12b





a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)
h)

Obr. 2-13

Fotografia vzájomného pôsobenia dvoch vozíčkov, zhotovená pomocou zábleskov nasledujúcich po 0,1 s. Vozíčky sa pohybujú po vodorovnej doske po priamych koľajničkách, trenie je zanedbateľné; vozíčky môžeme považovať za izolovanú sústavu. („Tyčinky" na čelách vozíčkov sú preto, aby sa dala ľahko určovať vzdialenosť susedných polôh vozíčkov.)

a) Medzi vozíčkami 1 (vľavo) a 2 (vpravo) s rovnakými hmotnosťami ($m_1 = m_2 = m$) je pružina. Vozíčky sú spojené niťou, sú v pokoji. Celková hybnosť vozíčkov je nulová $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \mathbf{0}$.

b) Po prepálení nite sa vozíčky dajú pôsobením pružiny do pohybu. Rýchlosti vozíčkov sú rovnaké, ale majú opačný smer: $\boldsymbol{v}'_2 = -\boldsymbol{v}'_1$. Celková hybnosť vozíčkov po interakcii je $\boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2 = m_1 \boldsymbol{v}'_1 + m_2 \boldsymbol{v}'_2 = m\,\boldsymbol{v}'_1 + (-m\,\boldsymbol{v}'_1) = \mathbf{0}$. Celková hybnosť vozíčka sa teda nezmenila: $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2 = \mathbf{0}$. (Hmotnosť pružiny je zanedbateľná vzhľadom na hmotnosť vozíčka 1, takže možno predpokladať, že hmotnosť tohto vozíčka i s pružinou, ktorá je k nemu pripevnená, je rovnaká ako hmotnosť vozíčka 2.)

c) Oproti vozíčku 1 (vľavo), ktorý je v pokoji, sa pohybuje vozíček 2 rýchlosťou $\boldsymbol{v}_2$. (Vozíček 2 uviedla do pohybu pružina vpravo.) Hmotnosti vozíčkov sú rovnaké. (Hmotnosť pružiny pri vozíčku 1 je vzhľadom na hmotnosť vozíčka zanedbateľná.)

d) Vozíček 2 sa po zrážke zastavil a vozíček 1 sa teraz pohybuje rýchlosťou $\boldsymbol{v}'_1 = \boldsymbol{v}'_2$ (t. j. pohybuje sa rýchlosťou s rovnakou veľkosťou i smerom ako vozíček 2 pred zrážkou). Celková hybnosť vozíčkov pred zrážkou bola $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = m\,\boldsymbol{v}_2$ a po zrážke $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2 = m\,\boldsymbol{v}'_1 = m\,\boldsymbol{v}'_2$. Celková hybnosť sústavy zostáva zachovaná ($\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2 = m\,\boldsymbol{v}_2$).

e), f) Vzájomné pôsobenie vozíčkov nastalo prostredníctvom magnetických polí magnetov umiestených na čelách vozíčkov. (Vozíček vľavo bol pred vzájomným pôsobením v pokoji.) Hmotnosti vozíčkov s magnetmi sú rovnaké. Z obrázka f) vyplýva, že celková hybnosť sústavy sa opäť zachováva.

g) Hmotnosť m_2 vozíčka s oceľovým kvádrom (vpravo) je dvakrát taká veľká ako hmotnosť m_1 vozíčka vľavo ($m_2 = 2m_1$). Vozíčky sú v pokoji, celková hybnosť sústavy je $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \mathbf{0}$.

h) Po vzájomnom pôsobení (pomocou pružiny tak ako v prípade b)) sa rýchlosť vozíčka vľavo rovná $\boldsymbol{v}'_1$, vozíčka s kvádrom je polovičná a má opačný smer ako $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}'_2 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{v}'_1$ $\left(v'_2 = \frac{1}{2}v'_1\right)$. Celková hybnosť sústavy teda bude $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2 = m_1\boldsymbol{v}'_1 + m_2\,\boldsymbol{v}'_2 = m_1\,\boldsymbol{v}'_1 - 2\,m_1\frac{\boldsymbol{v}'_1}{2} = \mathbf{0}$. Celková hybnosť sústavy ostala zachovaná: $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2 = \mathbf{0}$

Tento záver platí všeobecne v inerciálnych vzťažných sústavách pre izolované sústavy, v ktorých je ľubovoľný počet telies. Hovoríme o zákone zachovania hybnosti:

Súčet hybností všetkých telies izolovanej sústavy je stály $$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \ldots + \boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p} = \textbf{konšt.}$$

Veličiny $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, ..., $\boldsymbol{p}_n$ v poslednej rovnici označujú hybnosti hmotných bodov (telies) 1, 2, ..., n izolovanej sústavy. Veličina $\boldsymbol{p}$ je celková hybnosť tejto sústavy v nejakom časovom okamihu. Symboly $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, ..., $\boldsymbol{p}_n$ tu teda neoznačujú, ako v stati 2.4, hybnosti daného telesa v rozličných časových okamihoch t_1, t_2, ..., t_n, ale označujú hybnosti rôznych telies 1, 2, ..., n v danom čase.

Skratka konšt. v poslednej rovnici znamená, že ak sa v danom okamihu celková hybnosť izolovanej sústavy rovná $\boldsymbol{p}$, celková hybnosť sústavy v ľubovoľnom inom okamihu sa bude opäť rovnať $\boldsymbol{p}$. Celková hybnosť izolovanej sústavy telies sa teda s časom v danej inerciálnej sústave nemení, zostáva konštantná čo do veľkosti i smeru. Hybnosti jednotlivých telies izolovanej sústavy sa však s časom meniť môžu.

2.11 Použitie tretieho pohybového zákona a zákona zachovania hybnosti

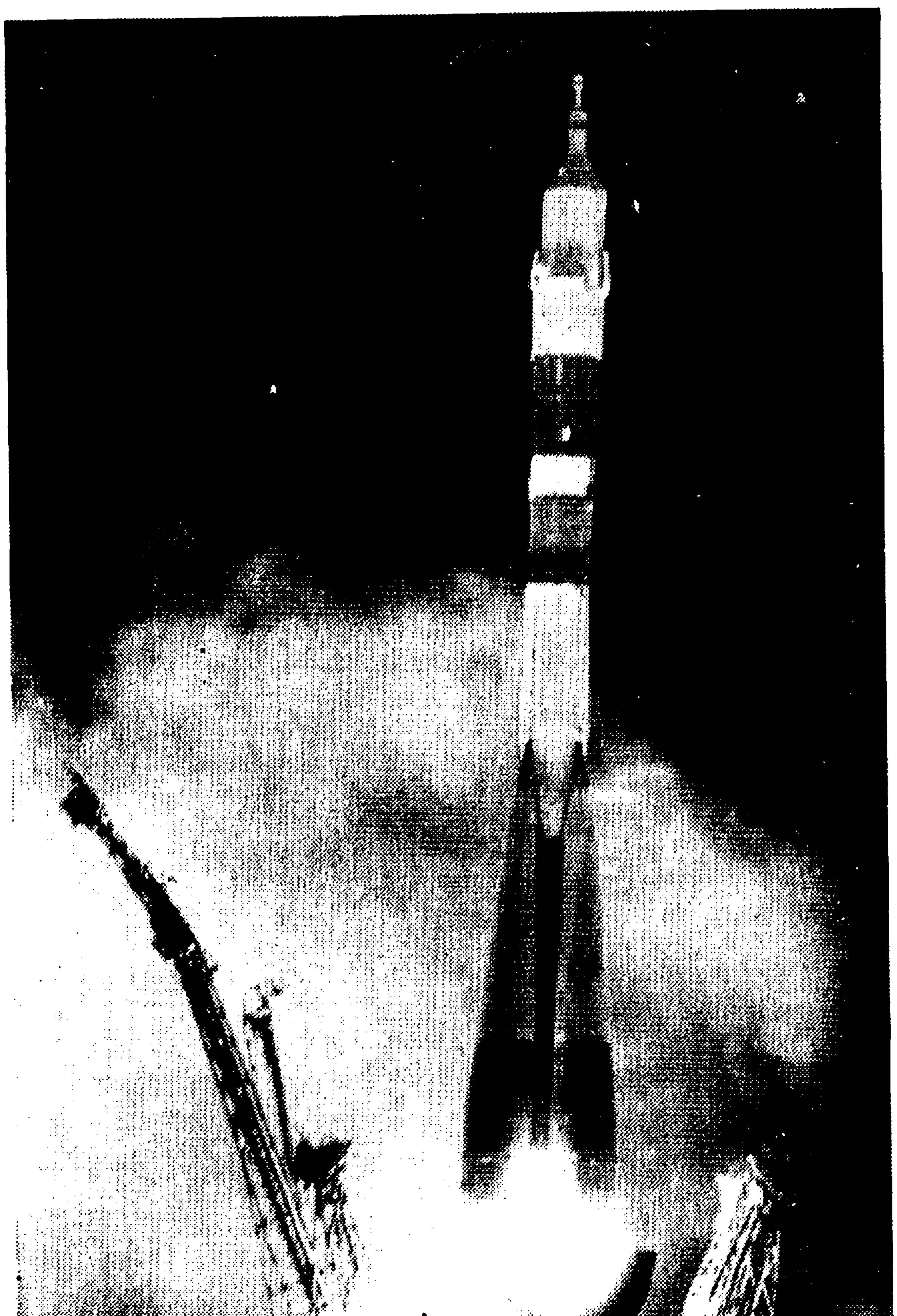
Strelu a zbraň môžeme považovať za izolovanú sústavu, ktorá má pred výstrelom celkovú hybnosť nulovú. Pri výstrele zo zbrane plyny, ktoré vzniknú zhorením strelného prachu, pôsobia opačnými rovnako veľkými tlakovými silami na strelu i stenu uzáveru. V dôsledku toho sa strela i zbraň uvedú silami akcie a reakcie do pohybu tak, že pre ich výslednú rýchlosť platí $m\,\boldsymbol{v}_1 + M\,\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$, čiže

$$m\,\boldsymbol{v}_1 = -M\,\boldsymbol{v}_2$$

kde m je hmotnosť strely a $\boldsymbol{v}_1$ jej rýchlosť pri opustení hlavne, M je hmotnosť zbrane a $\boldsymbol{v}_2$ rýchlosť pohybu zbrane. Vzhľadom na malú hmotnosť strely v porovnaní s hmotnosťou zbrane je jej rýchlosť mnohonásobne väčšia.

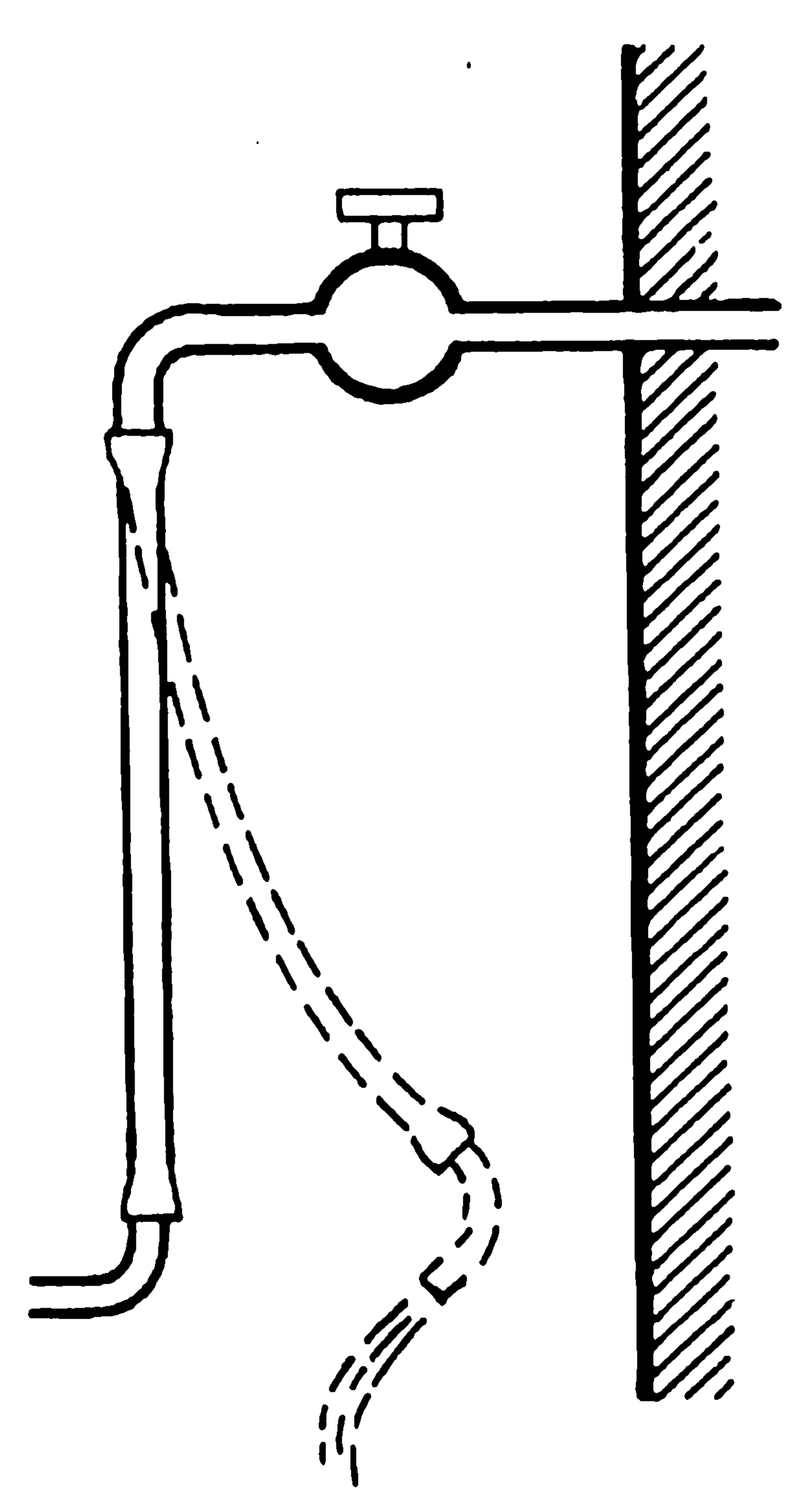
Na platnosti zákona zachovania hybnosti sa zakladá aj pohon rakiet. Z dýz rakiet unikajú veľkou rýchlosťou plyny, ktoré vznikajú horením paliva (obr. 2-14). Ak zo štartujúcej rakety vytryskne celkovo plyn s hmotnosťou m rýchlosťou $\boldsymbol{v}_1$, raketa s hmotnosťou M (zmenu jej hmotnosti spôsobenú horením paliva zanedbáme) získa konečnú okamžitú rýchlosť $\boldsymbol{v}_2$ opäť podľa vzťahu

$$m\,\boldsymbol{v}_1 \doteq -M\,\boldsymbol{v}_2$$



Obr. 2-14

Obr. 2-15



Základy teórie raketového pohonu vypracoval ruský vedec K. E. Ciolkovskij*.

Na reaktívnom pohone sú založené lety reaktívnych lietadiel. Aj reaktívne turbíny (vodné, parné, plynové) sú založené na treťom Newtonovom pohybovom zákone. Reaktívnu silu môžeme demonštrovať napr. spätným pohybom hadice, z ktorej vyteká voda (obr. 2-15).

Na princípe akcie a reakcie možno vysvetliť aj pohyb vozidiel alebo našu chôdzu po zemi. Pri chôdzi pôsobíme silou chodidla na zem smerom dozadu. Zem pôsobí na naše telo rovnako veľkou silou opačného smeru, ktorá umožňuje pohyb nášho tela.

Príklad

Strela s hmotnosťou 20 g vyletí z hlavne pušky rýchlosťou 760 m.s^{-1}. Akú hmotnosť má puška, ak spätným nárazom získala v opačnom smere rýchlosť 2,7 m.s^{-1}?

$m = 0{,}02$ kg, $v_1 = 760$ m.s^{-1}, $v_2 = 2{,}7$ m.s^{-1}, $M = ?$

Strelu s puškou môžeme považovať za izolovanú sústavu telies. Platí teda

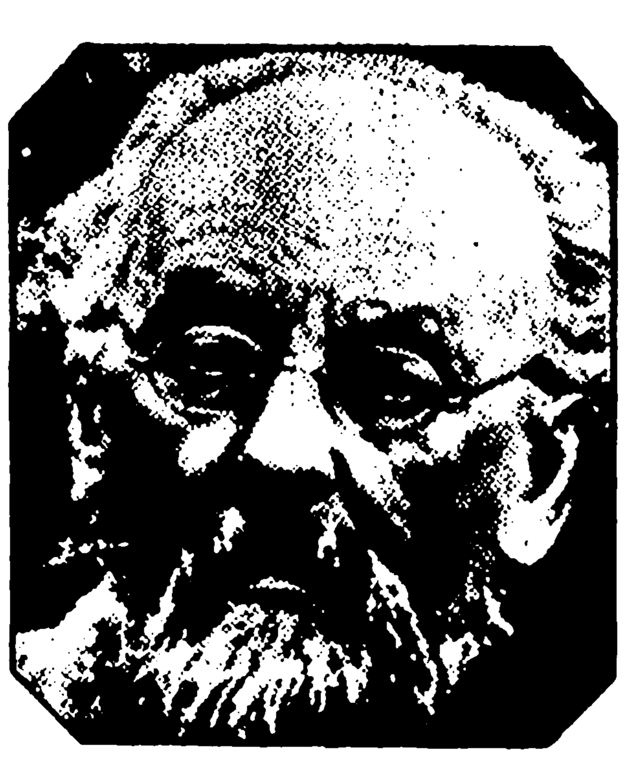
$$m\,\boldsymbol{v}_1 = -M\,\boldsymbol{v}_2$$

Strela i puška sa pohybujú v opačných smeroch, teda v tej istej priamke. Namiesto vektorov rýchlosti môžeme teda písať veľkosti zložiek vektorov rýchlosti do tej istej priamky

$$m\,v_1 = M\,v_2$$

a odtiaľ

$$M = \frac{m\,v_1}{v_2}$$



* KONŠTANTIN EDUARDOVIČ CIOLKOVSKIJ (1857—1935) svojimi prácami o teórii raketového pohonu a letu v medziplanetárnom priestore sa stal zakladateľom významného vedeckého a technického odvetvia v ZSSR. Preto ho nazývajú otcom kozmonautiky. Jeho význam sa oceňuje v celom svete.

$$M = \frac{0{,}02 \,.\, 760}{2{,}7}\ \mathrm{kg} \doteq 5{,}6\ \mathrm{kg}$$

Hmotnosť pušky je približne 5,6 kg.

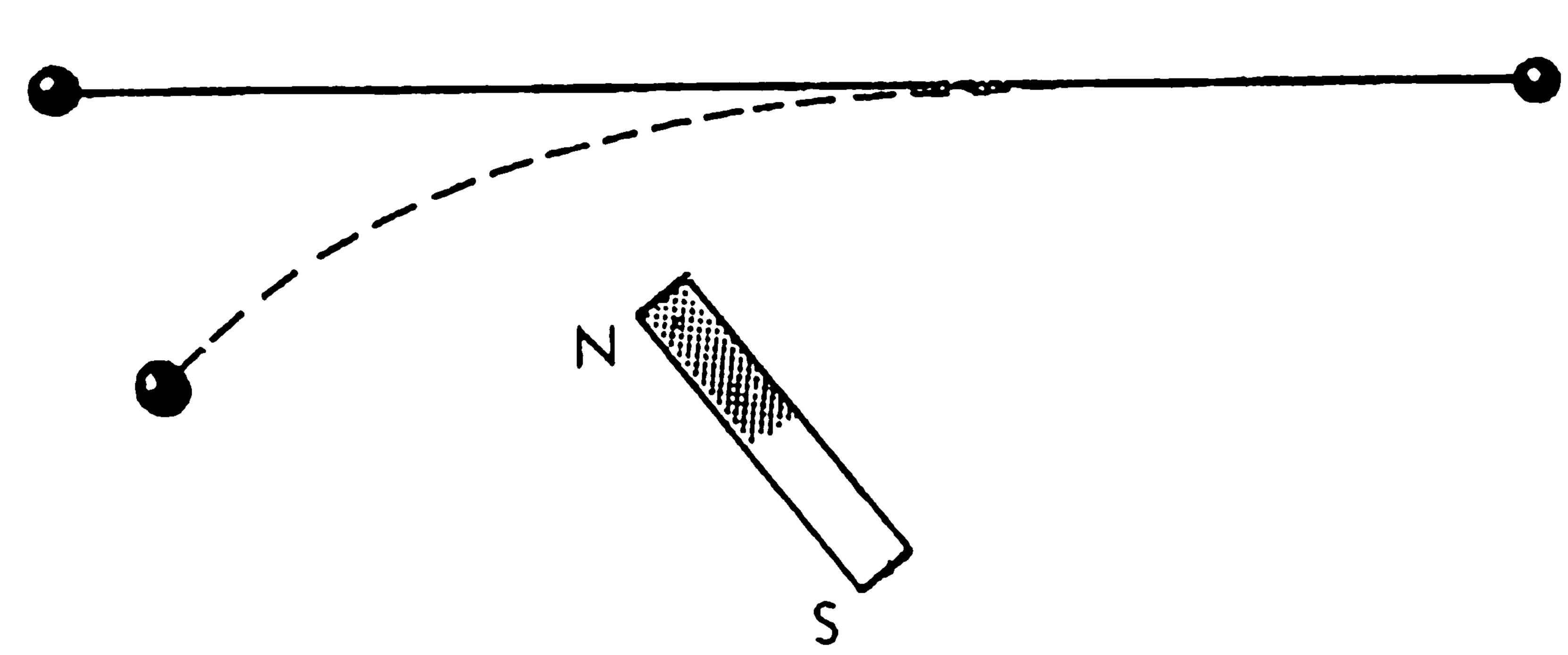
Úlohy

1. Z dela s hmotnosťou 500 kg bol vo vodorovnom smere vystrelený projektil s hmotnosťou 2 kg rýchlosťou 600 $\mathrm{m.s^{-1}}$. Vypočítajte rýchlosť dela pri spätnom náraze. [2,4 $\mathrm{m.s^{-1}}$]
2. Aká veľká sila pôsobila na strelu s hmotnosťou 20 g, ktorá preletela hlavňou za 0,01 s a získala rýchlosť 800 $\mathrm{m.s^{-1}}$? Akú veľkú rýchlosť získala puška pri spätnom náraze, ak mala hmotnosť 5 kg? [1 600 N; 3,2 $\mathrm{m.s^{-1}}$]
3. Signalizačná raketa s hmotnosťou 50 g vystrelí 5 g plynov v jednom smere a získa tým rýchlosť 30 $\mathrm{m.s^{-1}}$. Aká je rýchlosť vystrelených plynov (zmenu hmotnosti rakety zanedbáme)? [270 $\mathrm{m.s^{-1}}$]

2.12 Dostredivá sila

Pozorujme pohyb oceľovej guľôčky na vodorovnej podložke (stole), na ktorej je položený tyčový magnet (obr. 2-16). Po uvedení do pohybu postrčením sa guľôčka pohybuje po stole najprv rovnomerne priamočiaro, ale v blízkosti magnetu sa smer jej pohybu zmení (zmení sa smer jej okamžitej rýchlosti).

Obr. 2-16



Z predchádzajúcich statí vieme, že pôsobením sily nastáva zmena rýchlosti telesa; teleso sa pohybuje so zrýchlením. Ak sila nemá smer okamžitej rýchlosti pohybujúceho sa hmotného bodu, spôsobuje zakrivenie trajektórie bodu.

V kinematike sme odvodili, že pri rovnomernom pohybe hmotného bodu po kružnici sa bod v danej vzťažnej sústave pohybuje so stálym dostredivým zrýchlením s veľkosťou

$$a_d = \frac{v^2}{r}$$

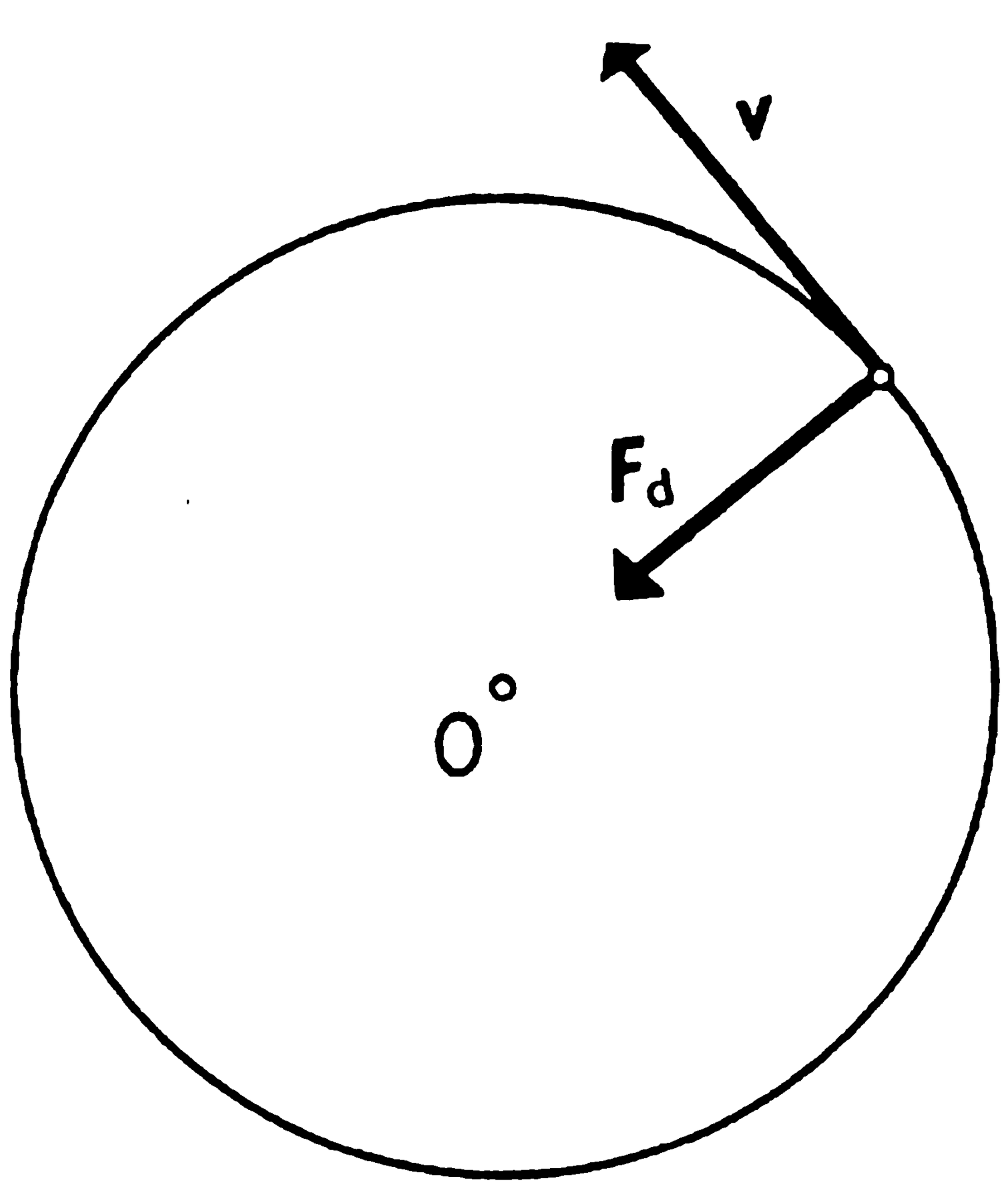
Aby sa hmotný bod v inerciálnej vzťažnej sústave pohyboval rovnomerne po kružnici (obr. 2-17), musí naň pôsobiť sila

$$\boxed{\boldsymbol{F}_d = m\,\boldsymbol{a}_d}$$

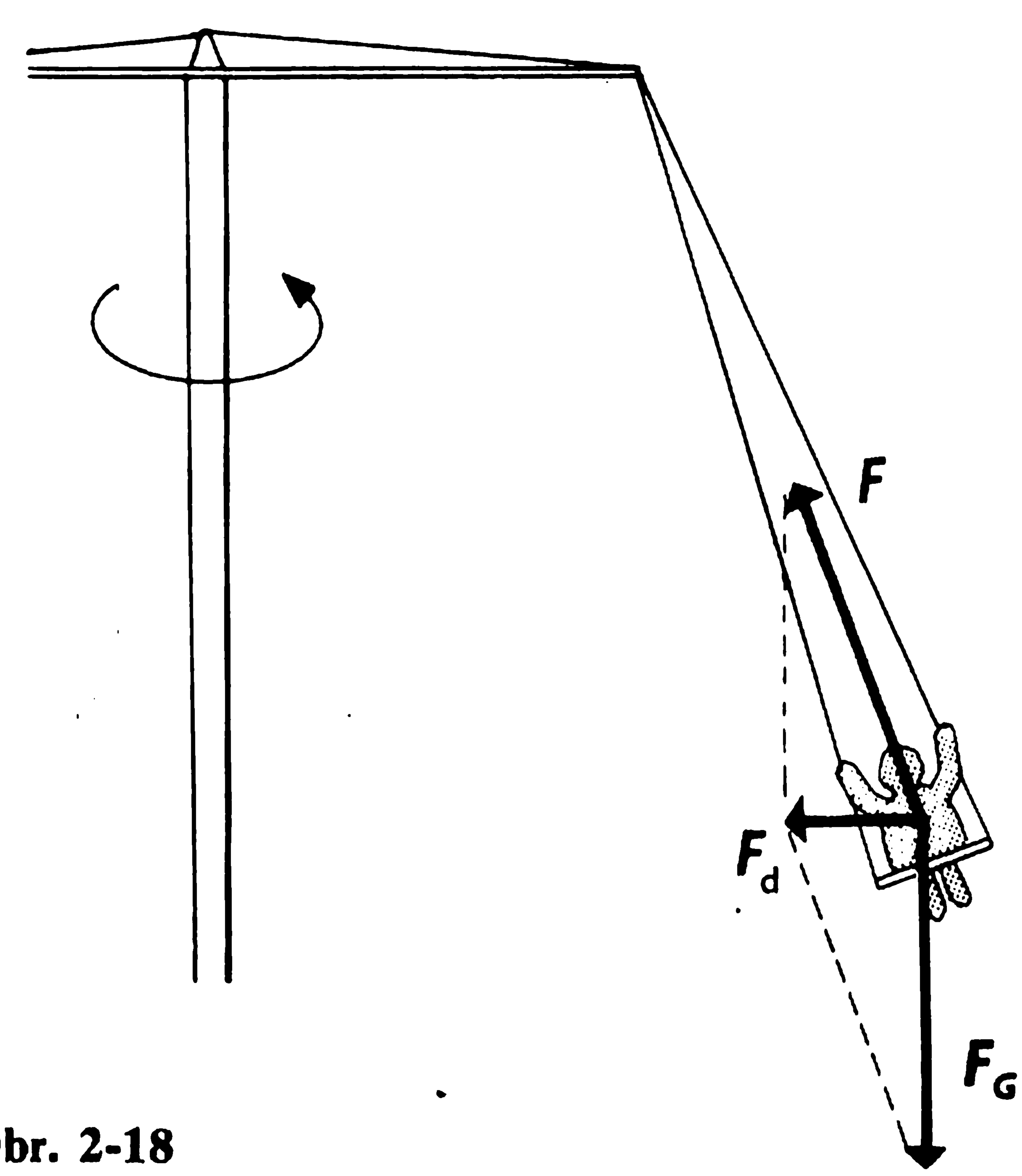
Táto sila smeruje do stredu kružnicovej trajektórie. Preto je kolmá na okamžitú rýchlosť hmotného bodu, ktorá je dotyčnicou k trajektórii hmotného bodu. Aby sa teda hmotný bod pohyboval po kružnici, musí naň pôsobiť **dostredivá sila** $\boldsymbol{F}_d$.

Ak použijeme všetky doteraz známe vzťahy, môžeme pre veľkosť dostredivej sily písať

$$F_d = m\,a_d = \frac{m\,v^2}{r} = m\,v\,\omega = m\,\omega^2\,r = m\,4\pi^2 f^2 = m\frac{4\pi^2}{T^2}\,r$$



Obr. 2-17



Obr. 2-18

Dostredivá sila môže mať pôvod v akomkoľvek vzájomnom silovom pôsobení. V úvodnom pokuse to bola magnetická sila. Ak roztočíme guľôčku na pevnej niti, dostredivou silou je sila našej ruky pôsobiaca na guľôčku prostredníctvom nite. Pri obiehaní Mesiaca alebo družice okolo Zeme je dostredivou silou gravitačná sila, ktorou pôsobí Zem na Mesiac i na družicu. Podobne pri obiehaní Zeme okolo Slnka je dostredivou silou gravitačná sila, ktorou pôsobí Slnko na Zem. Dostredivou silou môže byť aj výsledná sila, ktorá vzniká pôsobením viacerých síl. Napríklad na človeka na sedačke reťazového kolotoča pôsobí pri jej rovnomernom pohybe po kružnicovej trajektórii dostredivá sila $\boldsymbol{F}_d$, ktorá je výslednicou tiažovej sily $\boldsymbol{F}_G$ a ťahovej sily reťaze $\boldsymbol{F}$ (obr. 2-18).

Úlohy

1. Aká veľká dostredivá sila pôsobí na guľôčku s hmotnosťou 0,2 kg upevnenú na niti, ak guľôčka koná rovnomerný pohyb po kružnici vo vodorovnej rovine? Polomer kružnice je 0,6 m, veľkosť okamžitej rýchlosti guľôčky je 6 m.s^{-1}. [12 N]
2. Určte veľkosť dostredivej sily, ktorá z hľadiska inerciálneho pozorovateľa spôsobuje pohyb človeka po kružnici na sedačke kolotoča. Uhlová rýchlosť otáčajúceho sa kolotoča je 0,52 rad.s^{-1}, polomer dráhy sedačky je 3,5 m. Hmotnosť človeka na sedačke je 70 kg. [66 N]
3. Rýchlosť družice, ktorá by sa pohybovala po kružnici tesne nad povrchom Zeme (polomer Zeme je 6 380 km, $g = 9{,}81$ m.s^{-2}, všetky odporové sily zanedbáme), je 7,91 km.s^{-1}. Aká veľká dostredivá sila z hľadiska inerciálnej vzťažnej sústavy pôsobí na družicu s hmotnosťou 100 kg? Čo je touto dostredivou silou? [981 N]

2.13 Galileiho princíp relativity

V predchádzajúcich statiach sme sa oboznámili s pohybovými zákonmi a s ich využitím vzhľadom na istú inerciálnu vzťažnú sústavu. Vieme, že na svoje pokusy by sme mohli vybrať sústavu spojenú s ktorýmkoľvek miestom na Zemi. Zo skúsenosti vieme, že vo vagóne vlaku, v kabíne lietadla, v kajute lode, ktoré sa pohybujú rovnomerne priamočiaro voči vzťažnej sústave spojenej so Zemou, prebiehajú javy rovnako ako na pevnej zemi. Napríklad spustené teleso padá v týchto dopravných prostriedkoch voľným pádom tak ako na pevnej zemi.

Všetky inerciálne vzťažné sústavy sú vzhľadom na seba v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe.

Cestujúci v uzavretej kabíne alebo kajute pohybujúcej sa rovnomerne priamočiaro, ktorý nemôže sledovať okolie, nezistí, či a akým smerom sa pohybuje, alebo či je v pokoji. Rovnomerný priamočiary pohyb kabíny alebo kajuty vzhľadom na Zem pozorovateľ, ktorý je v nej uzavretý, nerozozná od prípadu, keď je kabína (kajuta) v pokoji.

Pokoj a rovnomerný priamočiary pohyb rozozná pozorovateľ v kabíne (kajute), len keď môže vidieť okolie, inými slovami, rozozná ho iba vo vzťahu, t. j. relatívne k okoliu.

Dostávame sa tak k všeobecne platnému záveru, ktorý sa nazýva Galileiho princíp relativity:

Zákony mechaniky sú rovnaké vo všetkých inerciálnych vzťažných sústavách.

Skutočnosť, že Newtonove pohybové zákony platia vo všetkých inerciálnych sústavách, však neznamená, že aj hodnoty všetkých veličín, ktoré sa vyskytujú v týchto zákonoch, musia byť vo všetkých inerciálnych vzťažných sústavách rovnaké.

Uvažujme napr. o autách, ktoré idú rovnomerne tým istým smerom po priamej diaľnici rozličnými rýchlosťami vzhľadom na pozorovateľa, ktorý stojí na kraji diaľnice. Jazdec v istom aute bude v pokoji voči inému autu, ktoré ide rovnakou rýchlosťou ako jeho auto. Autá, ktoré idú pomalšie, bude doháňať, za autami idúcimi rýchlejšie sa bude oneskorovať. Relatívna rýchlosť auta bude vzhľadom na pozorovateľa na diaľnici a ostatné autá všeobecne rozličná. Kým však autá pôjdu rovnomerne, nebude sa táto relatívna rýchlosť meniť, vzájomné pohyby áut budú bez zrýchlenia.

Zákony dynamiky budú vo všetkých autách pohybujúcich sa rovnomerne priamočiaro vzhľadom na pozorovateľa na diaľnici platiť rovnako, či už si zvolíme za vzťažné teleso ktorékoľvek z týchto áut, alebo pozorovateľa na diaľnici.

2.14 Zotrvačné sily

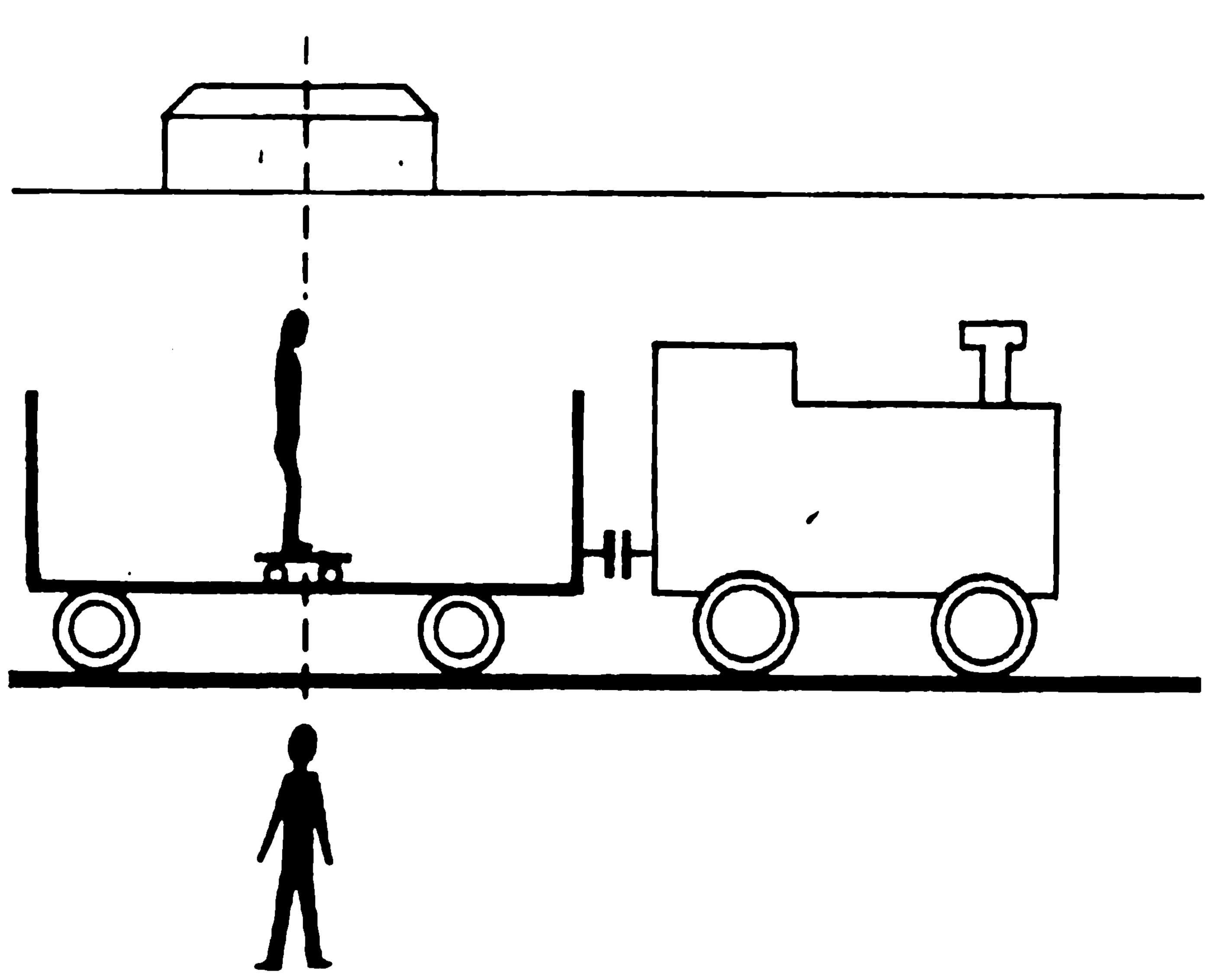
Vzťažné sústavy, ktoré sa vzhľadom na niektorú inerciálnu vzťažnú sústavu pohybujú so zrýchlením, nazývame neinerciálne. Vzniká otázka, ako sa zrýchlený pohyb neinerciálnej vzťažnej sústavy vzhľadom na inerciálnu prejaví na mechanických dejoch prebiehajúcich vnútri tejto neinerciálnej sústavy. Ďalej je otázka, ako to bude s platnosťou mechanických pohybových zákonov, o ktorých sme hovorili v predchádzajúcich statiach.

Všimneme si najprv vzťažnú sústavu, ktorá sa vzhľadom na inerciálnu vzťažnú sústavu pohybuje priamočiaro rovnomerne zrýchlene.

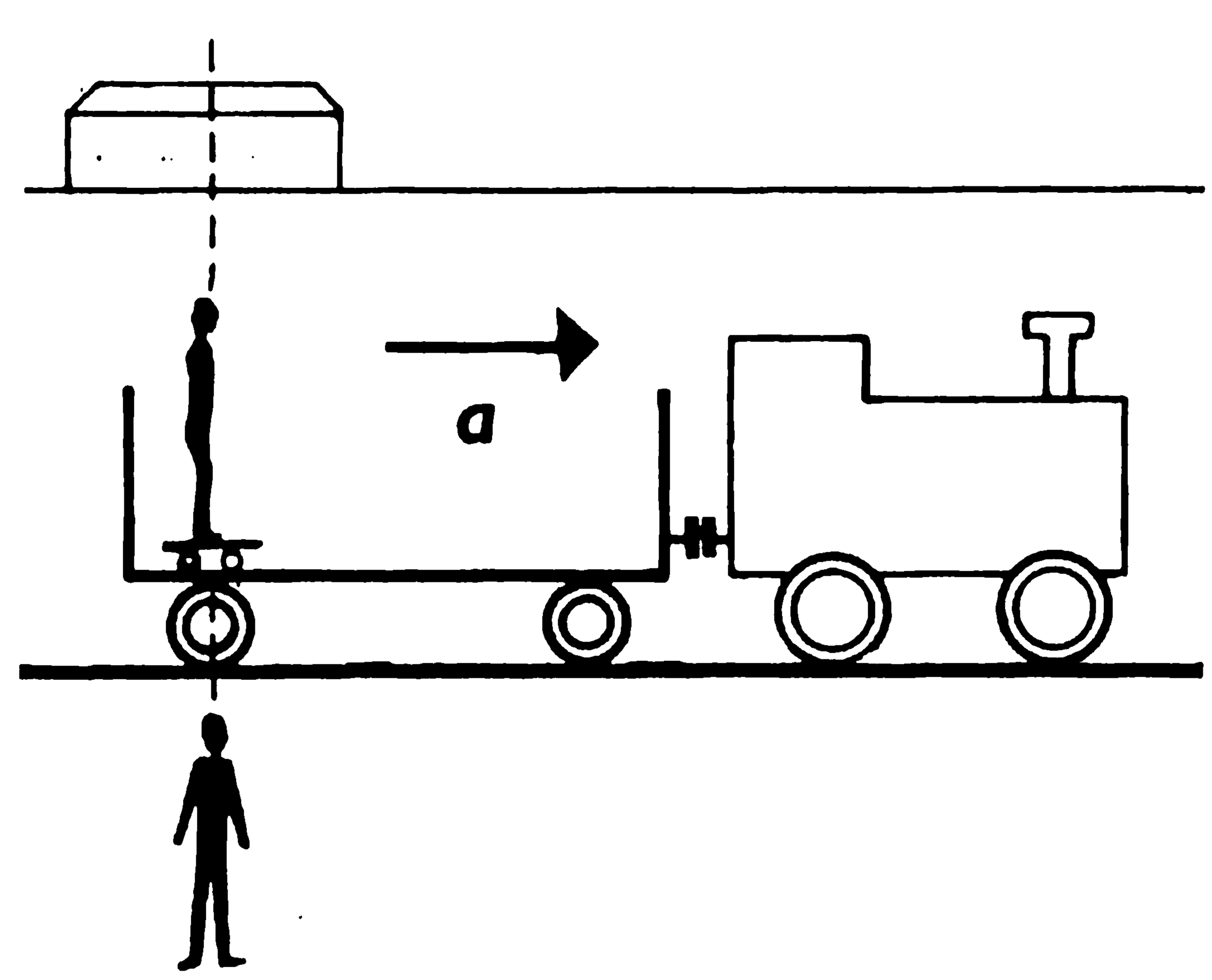
Zo skúsenosti vieme, že pri prudkom rozbiehaní auta sa osoby v ňom naklonia dozadu, pri brzdení dopredu. Pri zrážke auta, keď nastáva jeho takmer okamžité zastavenie, osoby na predných sedadlách sú prudko vrhnuté proti prístrojovej doske a prednému sklu. Aby sa zmenšilo nebezpečenstvo smrteľných úrazov, musia byť osoby na predných sedadlách pripútané bezpečnostnými pásmi.

Aby sme si objasnili a vysvetlili uvedené javy, urobíme tento myšlienkový pokus:

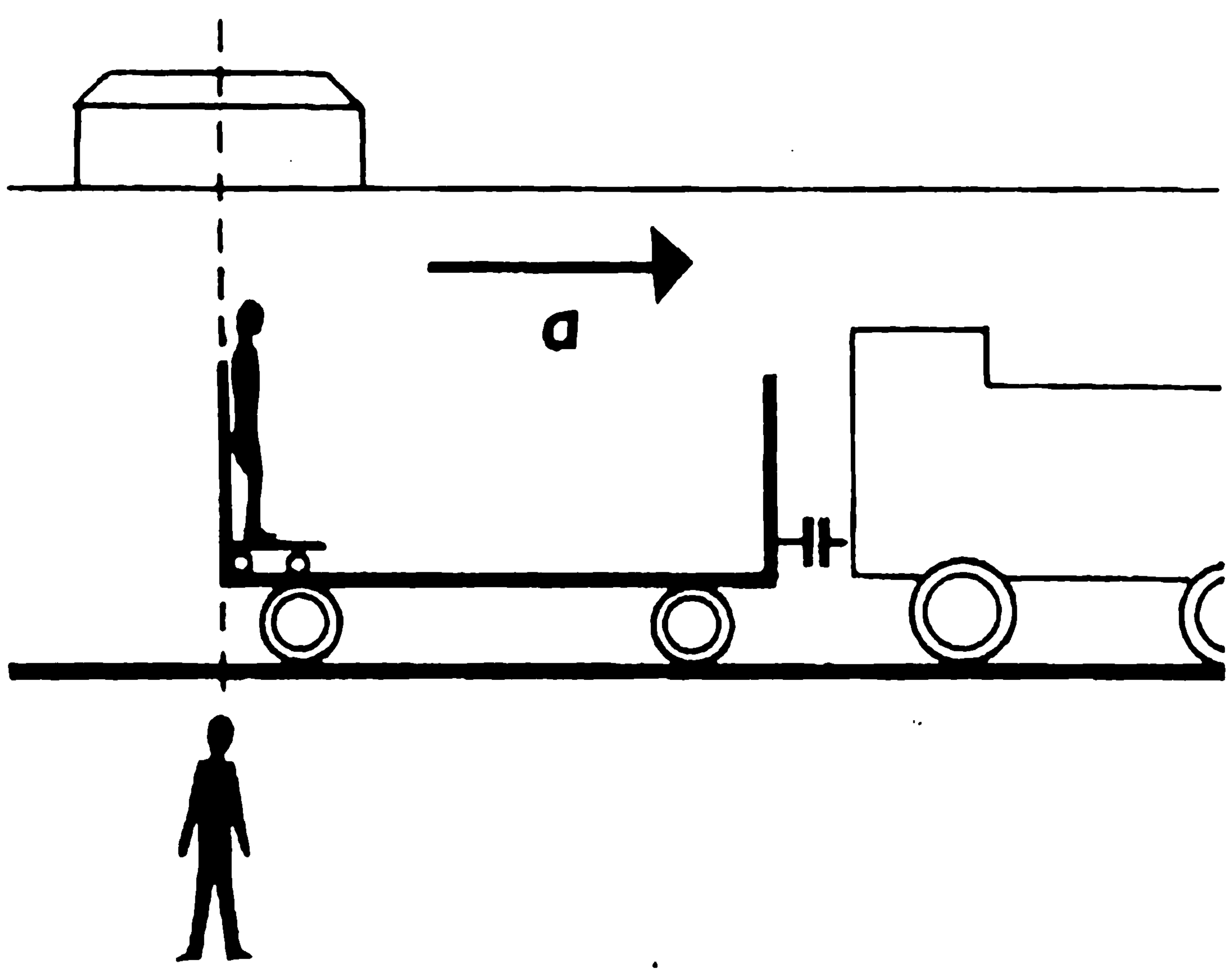
Na priamej vodorovnej trati stojí lokomotíva a za ňou vagón, ktorý má len prednú a zadnú stenu. Podlaha vagóna je z dokonale hladkého tvrdého materiálu. Vo vagóne stojí na kolieskových korčuliach chlapec, ktorý sa môže pohybovať po podlahe vagóna bez trenia (obr. 2-19). Tento chlapec



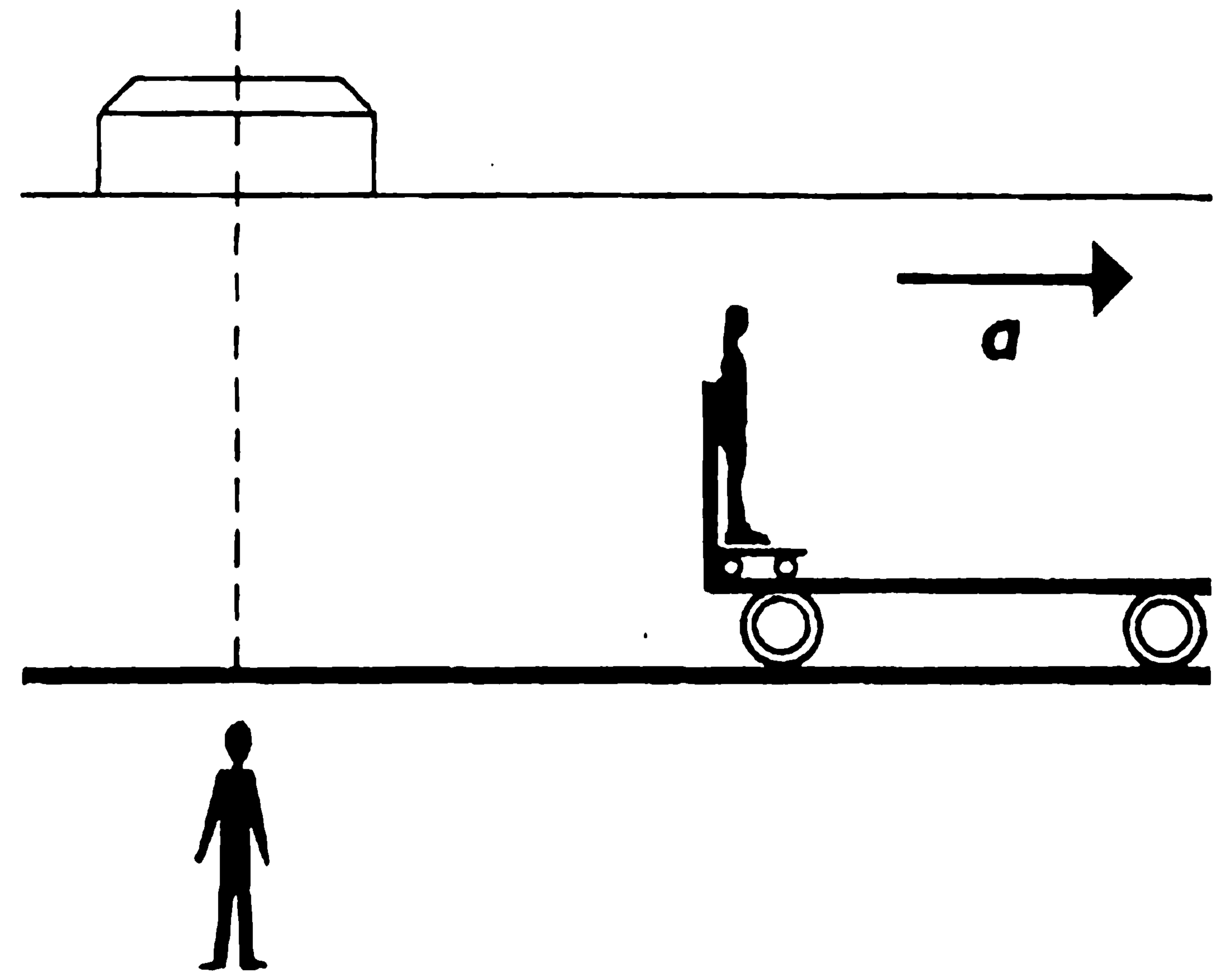
Obr. 2-19a



Obr. 2-19b



Obr. 2-19c



Obr. 2-19d

pozoruje všetky javy vzhľadom na vzťažnú sústavu spojenú s vagónom. Na nástupišti stojí druhý chlapec, ktorý pozoruje všetko z hľadiska vzťažnej sústavy spojenej so Zemou (inerciálnej sústavy).

Lokomotíva sa rozbehne rovnomerne zrýchleným pohybom so zrýchlením $\boldsymbol{a}$ vzhľadom na nástupište a s ňou i vagón. Pozorovateľ na nástupišti vidí, že chlapec vo vagóne zostal stáť na mieste, podlaha vagóna pod ním uteká. Na chlapca pôsobí len tiažová sila a tlaková sila podlahy, ktoré sa vo svojom účinku rušia (sú vykompenzované), preto je chlapec vzhľadom na nástupište v pokoji. Až keď na chlapca narazí zadná stena vagóna, začne naň pôsobiť silou. Chlapec sa po náraze začne pohybovať s rovnakým zrýchlením, aké je zrýchlenie vagóna; pôsobí naňho sila

$$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}\,,$$

kde m je hmotnosť chlapca.

Úplne inak sa situácia javí chlapcovi, ktorý stojí na podlahe vagóna. Vidí, že sa začal pohybovať priamočiarym rovnomerne zrýchleným pohybom k zadnej stene vagóna so zrýchlením $-\boldsymbol{a}$. Nemôže však zistiť, či naň pôsobí nejaké teleso silou, ktorá je príčinou tohto zrýchlenia. Svoj pohyb so zrýchlením si vysvetlí ako dôsledok pôsobenia istej sily. Nazveme ju **zotrvačná sila** $\boldsymbol{F}_z$. Táto sila nemá pôvod vo vzájomnom pôsobení chlapca s inými telesami. Pomocou zotrvačnej sily zdôvodňujeme pohyb chlapca vzhľadom na neinerciálnu vzťažnú sústavu spojenú s vagónom. Platí pre ňu

$$\boxed{F_z = -m\,a}$$

kde a je zrýchlenie neinerciálnej vzťažnej sústavy vzhľadom na inerciálnu vzťažnú sústavu.

V neinerciálnej vzťažnej sústave neplatia Newtonove pohybové zákony.

Zotrvačná sila však existuje iba z hľadiska chlapca vo vagóne. Pre druhého chlapca, ktorý stojí na nástupišti, neexistuje. Ktorý z chlapcov — pozorovateľov má teda pravdu? Podstata veci však nie je v rozličných pozorovateľoch, ale v rozličných vzťažných sústavách, vzhľadom na ktoré obidvaja pozorovatelia pozorujú javy vo vagóne. Pozorovateľ na nástupišti opisuje pohyb vzhľadom na Zem (teda na inerciálnu vzťažnú sústavu), pozorovateľ vo vagóne vzhľadom na neinerciálnu sústavu spojenú s vagónom.

Úlohy

1. Vlak zvýšil pri rovnomernom rozbiehaní svoju rýchlosť z 36 km.h^{-1} na 72 km.h^{-1} za 40 sekúnd. Cestujúci s hmotnosťou 70 kg, ktorý sedel v smere jazdy, cítil, že je tlačený silou na sedadlo. Určte veľkosť tejto sily. [17,5 N]
2. Štartujúca raketa, ktorá vynáša družicu, pohybuje sa so zrýchlením 29,4 m.s^{-2}. Akou veľkou celkovou silou je kozmonaut s hmotnosťou 65 kg tlačený pri štarte do kresla? ($g = 9{,}81$ m.s^{-2}). [2 550 N]

2.15 Odstredivá sila

Pozorujme teraz vzťažnú sústavu, ktorá sa vzhľadom na inerciálnu sústavu rovnomerne otáča.

Keď ideme v autobuse stálou rýchlosťou a autobus náhle vojde do zákruty, všetci cestujúci majú pocit, akoby ich nejaká sila ťahala smerom von zo zákruty. Nikto z cestujúcich však nemôže určiť teleso, pôsobením ktorého táto sila vznikla. Ide opäť o zotrvačnú silu, ktorú v tomto prípade nazývame **odstredivá sila F_0**.

Z hľadiska pozorovateľa v inerciálnej sústave možno jav ľahko vysvetliť. Cestujúci v autobuse majú v dôsledku svojej zotrvačnosti tendenciu pohybovať sa ďalej rovnomerne priamočiaro. Aby zostali voči autobusu v pokoji, musí na nich autobus pôsobiť dostredivou silou $\boldsymbol{F}_d = m\,\boldsymbol{a}_d$.

Z hľadiska pozorovateľa v rovnomerne sa otáčajúcej sústave vzniká v jeho neinerciálnej sústave odstredivá sila $\boldsymbol{F}_0$, pre ktorú platí

$$\boxed{\boldsymbol{F}_0 = -\boldsymbol{F}_d; \quad \boldsymbol{F}_0 = -m\,\boldsymbol{a}_d}$$

Pre veľkosť odstredivej sily teda platia vzťahy

$$F_0 = \frac{m\,v^2}{r} = m\,\omega^2 r = m\,4\pi^2 f^2 r = m\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,r$$

Odstredivá sila smeruje von zo stredu kružnicovej trajektórie.

Odstredivá sila pôsobí na pozorovateľa iba dovtedy, kým je v otáčajúcej sa (teda neinerciálnej) vzťažnej sústave. Od okamihu, keď už nemusí konať pohyb s otáčajúcou sa sústavou, pohybuje sa ďalej zotrvačnosťou rovnomerne priamočiaro vzhľadom na inerciálnu sústavu rýchlosťou, ktorú mal v okamihu opustenia rotujúcej sústavy (t. j. v smere dotyčnice ku kružnicovej trajektórii).

Keď napríklad pozorujeme úlomky odlietajúce z rýchlo rotujúceho brúsneho kotúča (teda z hľadiska pozorovateľa v inerciálnej sústave), vidíme, že odletujú v smere dotyčnice ku kotúču. Keď roztočíme guľôčku na niti a niť pustíme, guľôčka odletí v smere dotyčnice ku kružnicovej trajektórii.

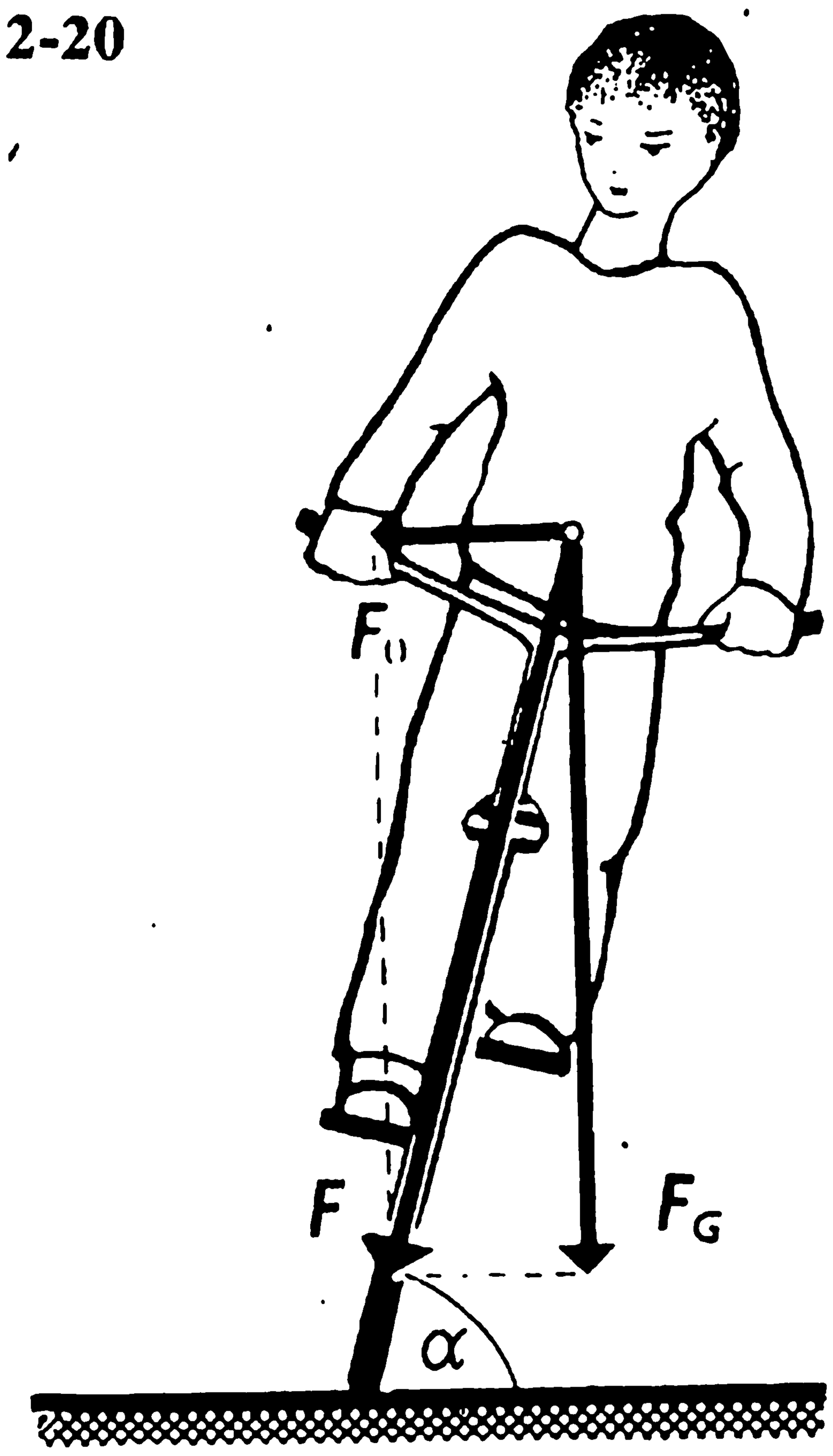
Príklad

Cyklista, ktorý ide po priamej betónovej vozovke rýchlosťou 27 km.h^{-1}, vojde náhle do zákruty s polomerom 25 m ($g \doteq 10$ m.s^{-2}). Ako musí cyklista ísť, aby bezpečne prešiel zákrutou?

Kým ide cyklista rovnomerne po priamej vozovke, pôsobí naňho i na bicykel tiažová sila a tlaková sila vozovky. Obidve sily sú rovnako veľké opačného smeru, preto sa vo svojom účinku na cyklistu rušia. Ak vojde cyklista do zákruty, pocíti silu namierenú von zo zákruty, ktorá by ho mohla preklopiť. Aby sa to nestalo, cyklista sa nakloní smerom do stredu kružnicovej trajektórie. Prečo?

Na obr. 2-20 vidíme, že okrem tiažovej sily $\boldsymbol{F}_G$ pôsobí na cyklistu

Obr. 2-20



odstredivá sila $\boldsymbol{F}_0$. Cyklista sa musí nakloniť o taký uhol, aby jeho ťažisko bolo v rovine výslednice týchto síl. Výslednica týchto síl sa potom ruší silou, ktorou pôsobí vozovka na bicykel.

$v = 7{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $r = 25\ \mathrm{m}$, $\alpha = ?$

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{F_0}{F_G}$$

$$F_G = m\ g$$

$$F_0 = \frac{m\ v^2}{r}$$

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{\frac{m\ v^2}{r}}{m \cdot g} = \frac{v^2}{r\ g}$$

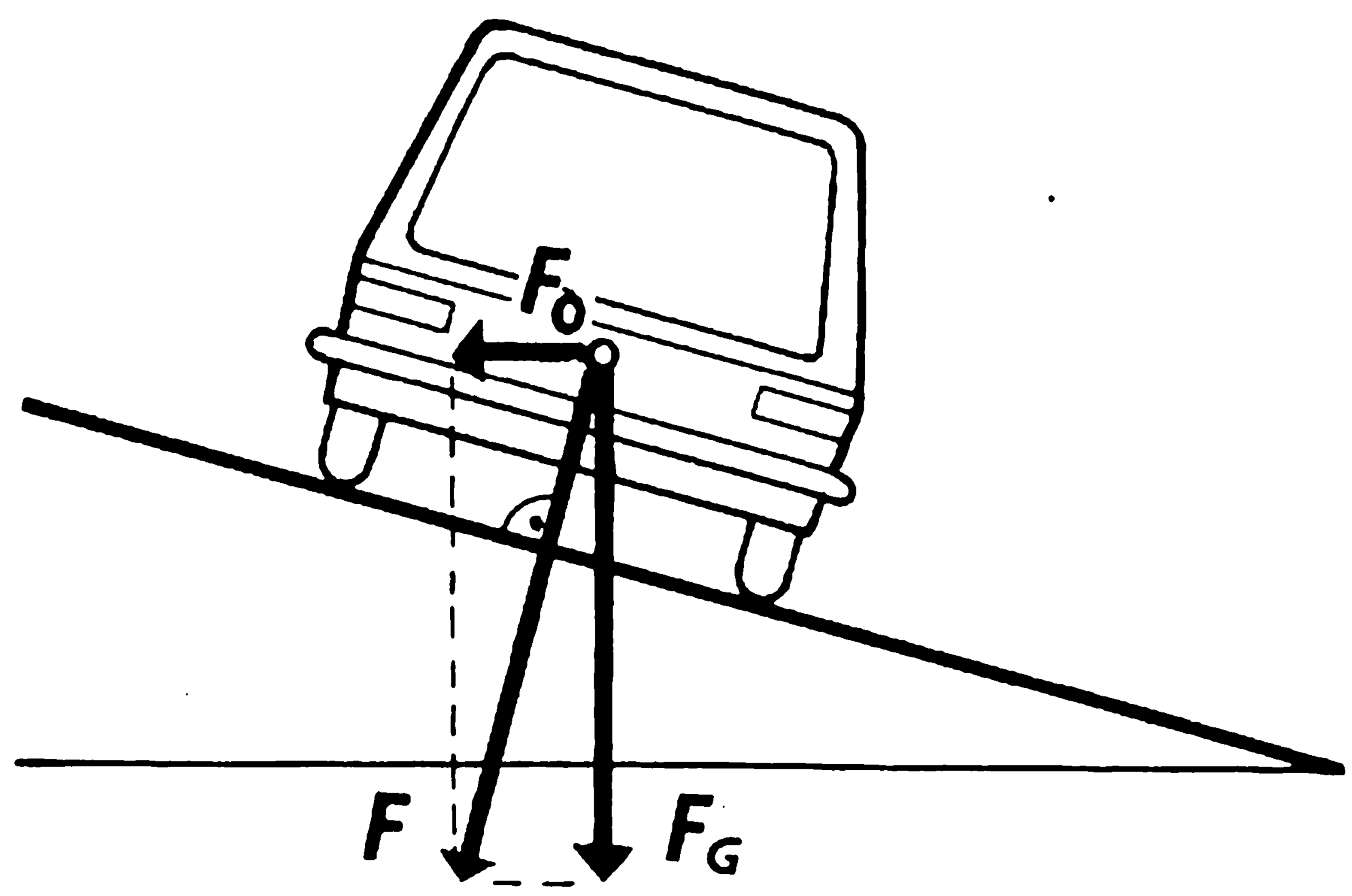
$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{7{,}5^2}{25.10} \doteq 0{,}225$$

$$\alpha \doteq 13°$$

Aby sa cyklista pri jazde nepreklopil, musí sa nakloniť o uhol 13° dovnútra zákruty.

Úlohy

1. Zákruty vozoviek sú klopené (obr. 2-21). Akou maximálnou rýchlosťou môže bezpečne vojsť auto aj v zime do zákruty s polomerom 50,0 m, ktorá má klopenie 15°? ($g = 9{,}81$ m.s^{-2}, tg 15° = 0,268). [11,5 m.s^{-1}]



Obr. 2-21

2. Autobus vchádza do zákruty s polomerom 100 m rýchlosťou 72 km.h^{-1}. Aká veľká sila pôsobí na cestujúceho s hmotnosťou 80 kg? [320 N]

ZHRNUTIE — DYNAMIKA HMOTNÝCH BODOV

Základom dynamiky hmotných bodov sú tri Newtonove pohybové zákony, ktoré platia v inerciálnych vzťažných sústavách. Prvý zákon charakterizuje zotrvačnosť telies ako základnú vlastnosť telies zotrvávať v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, kým na ne nepôsobí vonkajšia sila. Zmena pohybového stavu telies nastáva pôsobením vonkajších síl, ktoré sú prejavom vzájomného pôsobenia telesa s inými fyzikálnymi objektmi. Pohybový stav telesa je určený jeho hybnosťou (vektorová veličina) vzhľadom na zvolený vzťažný systém. Pôsobenie vonkajšej sily sa prejaví zmenou hybnosti telesa, teleso sa pohybuje so zrýchlením. Druhý zákon hovorí, že zmena hybnosti v istom časovom intervale je priamo úmerná výslednej sile, ktorou okolité objekty pôsobia na hmotný bod, a má s ňou rovnaký smer. Inými slovami, sila pôsobiaca na teleso mu udeľuje zrýchlenie, ktoré je priamo úmerné tejto sile a má s ňou rovnaký smer. Tretí zákon hovorí, že sily, ktoré vznikajú pri vzájomnom pôsobení telies, sú rovnako veľké, ale opačného smeru.

Výslednicu síl pôsobiacich na hmotný bod určujeme vektorovým súčtom týchto síl. Silu možno rozložiť na zložky, ktoré majú spolu rovnaký účinok ako daná sila. Sily, ktoré pôsobia v izolovanej sústave hmotných bodov, môžu meniť hybnosti jednotlivých bodov, ale celková hybnosť izolovanej sústavy sa pritom nemení. Pre izolovanú sústavu platí zákon zachovania hybnosti.

Ak vektor sily nie je rovnobežný s vektorom okamžitej rýchlosti, teleso koná krivočiary pohyb. Dostredivá sila, ktorá má stálu veľkosť a smeruje stále do jedného bodu (je kolmá na vektor okamžitej rýchlosti), je príčinou rovnomerného pohybu hmotného bodu po kružnici. V týchto sústavách pôsobia aj sily, ktoré nemajú pôvod v silovom pôsobení iných telies, ale v zrýchlení vzťažnej sústavy. Takéto sily sa nazývajú zotrvačné. Vo vzťažnej sústave, ktorá sa rovnomerne otáča okolo nehybnej osi, pôsobí na teleso zotrvačná odstredivá sila.

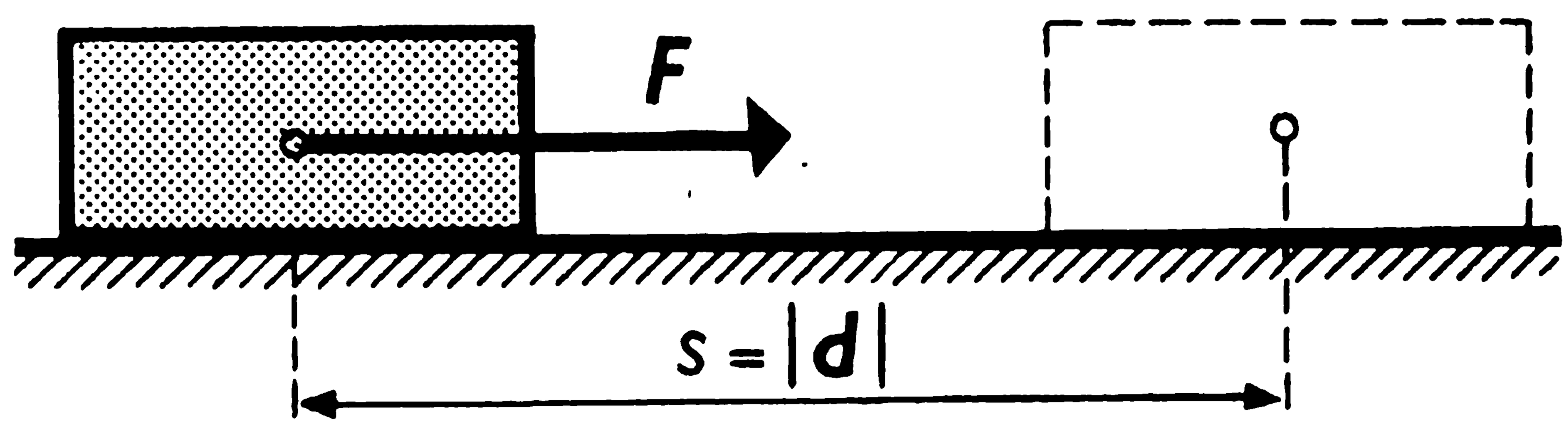
Veličiny	Jednotky	Zákony	Vzťahy
hmotnosť m	kg		
hybnosť $\boldsymbol{p}$	kg.m.s^{-1}		$\boldsymbol{p}=m\,\boldsymbol{v}$
sila $\boldsymbol{F}$	newton N N = kg.m.s^{-2}		$\boldsymbol{F}=\frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta t}$
		1. Newtonov zákon (princíp zotrvačnosti)	$\boldsymbol{F}=m\,\boldsymbol{a}$
		2. Newtonov zákon	$\boldsymbol{F}=\frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta t}$
		3. Newtonov zákon (princíp akcie a reakcie)	$\boldsymbol{F}_1=-\boldsymbol{F}_2$
tiažová sila $\boldsymbol{F}_G$	N		$\boldsymbol{F}_G=m\,\boldsymbol{g}$
		zákon zachovania hybnosti pre izolovanú sústavu	$\boldsymbol{p}=$ **konšt.**
dostredivá sila $\boldsymbol{F}_d$	N		$\boldsymbol{F}_d=m\,\boldsymbol{a}_d$
zotrvačná sila $\boldsymbol{F}_z$	N		$\boldsymbol{F}_z=-m\,\boldsymbol{a}$
odstredivá sila $\boldsymbol{F}_0$	N		$\boldsymbol{F}_0=-m\,\boldsymbol{a}_d$ $F_0=m\frac{v^2}{r}=m\,\omega^2 r$

3. Energia hmotných bodov

3.1 Mechanická práca

Slovo práca sa v každodennom živote používa v rozličných významoch. Hovoríme napr. o telesnej alebo duševnej práci, alebo hovoríme, že máme veľa práce.

Vo fyzike má však veličina práca presne určený význam. V základnej škole ste pri definícii práce uvažovali len o prípade, že stála sila $\boldsymbol{F}$ (sila, ktorej veľkosť ani smer sa nemení) pôsobí na hmotný bod po priamej trajektórii tak, že sila a posunutie majú rovnaký smer (obr. 3-1). Ak je F



Obr. 3-1

veľkosť sily a s dráha, ktorú teleso pôsobením sily prejde, tak pre veličinu práca W platí

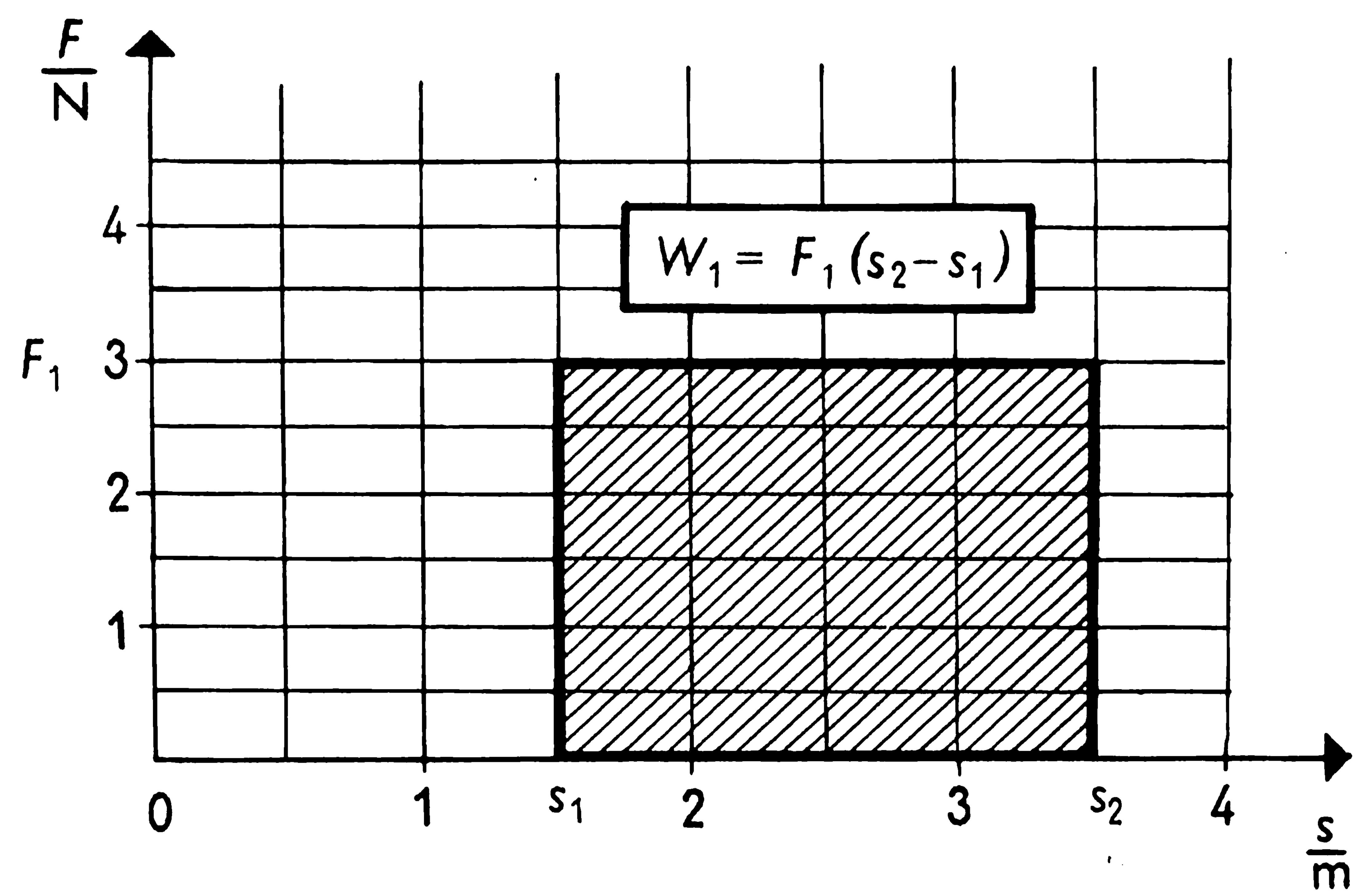
$$\boxed{W = F\,s}$$

Z tohto vzťahu určíme jednotku práce v SI: [J] = N . m. Nazýva sa **joule*** (J).

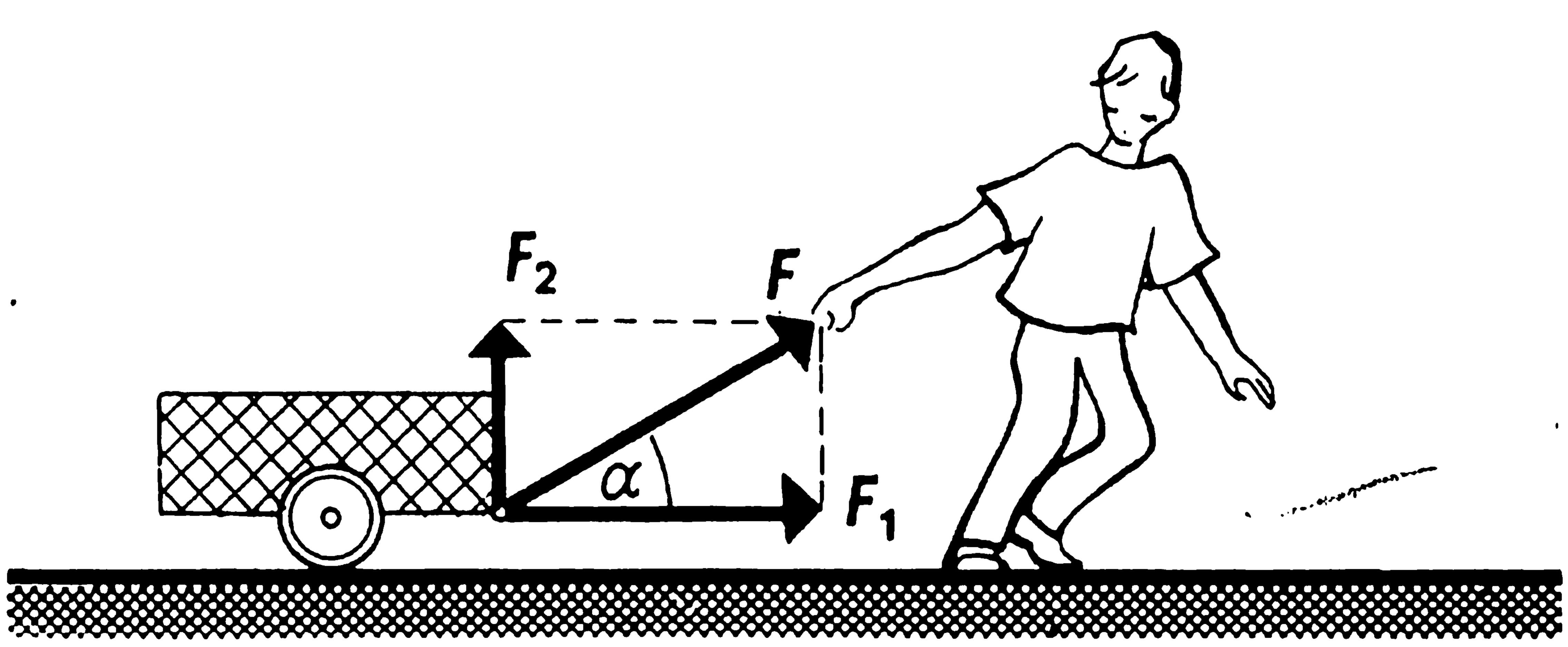
* Jednotku práce nazvali na počesť anglického fyzika JAMESA PRESCOTTA JOULA (1818—1889).

Joule sa rovná práci, ktorú vykoná sila 1 newtona pôsobiaca v smere posunutia po dráhe 1 metra.

Vykonanú prácu môžeme graficky znázorniť pomocou pracovného diagramu. Práca vykonaná konštantnou silou je v pracovnom diagrame (obr. 3-2) daná obsahom vyšrafovaného obdĺžnika.



Obr. 3-2



Obr. 3-3

Smer sily pôsobiacej na pohybujúce sa teleso však nemusí byť vždy súhlasný so smerom posunutia. Napríklad ak ťaháme vozík po vodorovnej priamej ceste, pôsobíme naň stálou silou $\boldsymbol{F}$, ktorá zviera so smerom posunutia stály uhol α (obr. 3-3). Silu $\boldsymbol{F}$ si môžeme predstaviť ako výslednicu dvoch síl $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$. Prácu koná len sila $\boldsymbol{F}_1$, ktorá leží v smere posunutia. Sila $\boldsymbol{F}_2$ je kolmá na posunutie a nemá na vozík pohybový účinok (mení len tlakovú silu vozíka na podlahu).

Pretože pre veľkosť sily F_1 platí

$$F_1 = F \cos \alpha$$

($\boldsymbol{F}_1$ je zložka sily $\boldsymbol{F}$ v smere posunutia, $\alpha = 90°$), dostaneme pre prácu sily F_1 vzťah

$$\boxed{W = F\, s \cos \alpha}$$

Hovoríme, že pri tomto deji sa koná práca. Ak zložka sily $\boldsymbol{F}_1$ má opačný smer ako posunutie, pre uhol α platí: $90° < \alpha \leqq 180°$ a $\cos \alpha < 0$. V tomto prípade hovoríme, že práca sa spotrebúva. Pre veľkosť spotrebovanej práce platí

$$\boxed{W = F\, s\, |\cos \alpha|}$$

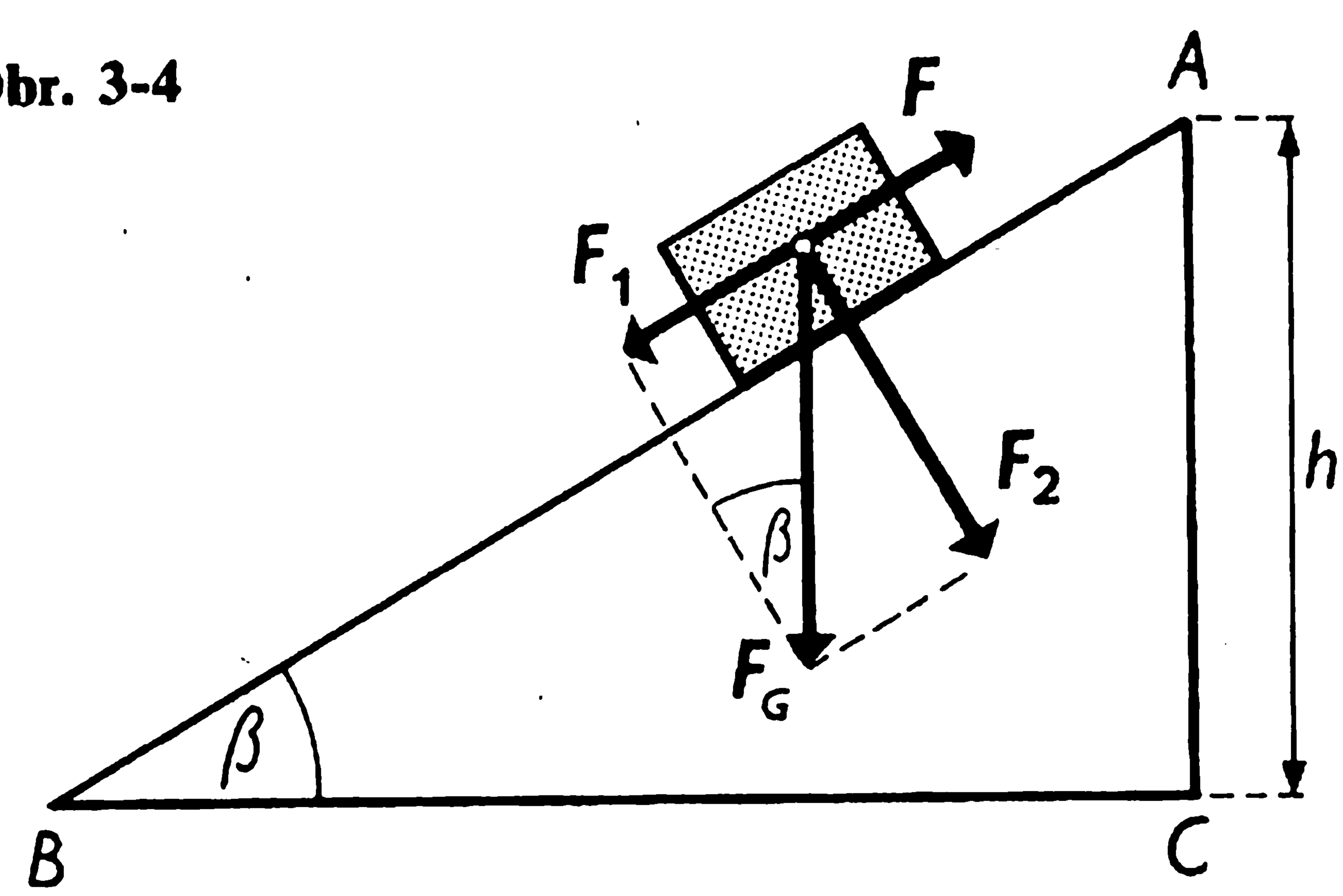
Prácu môžeme vypočítať, aj keď sa sila mení a trajektória nie je priamočiara. Výpočet je však zložitejší.

Príklad

Naklonená rovina s výškou $h = 5$ m zviera s vodorovnou rovinou uhol $\beta = 30°$ (obr. 3-4). Na naklonenej rovine sa môže bez trenia pohybovať teleso s hmotnosťou 50 kg ($g \doteq 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$). Akú veľkú prácu vykoná tiažová sila pri posunutí telesa nadol po naklonenej rovine z výšky h?

$h = 5$ m, $\beta = 30°$, $m = 50$ kg, $g \doteq 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$, $W = ?$

Obr. 3-4



Tiažovú silu $\boldsymbol{F}_G$ pôsobiacu na teleso rozložíme na pohybovú zložku $\boldsymbol{F}_1$ rovnobežnú s naklonenou rovinou a zložku $\boldsymbol{F}_2$ kolmú na naklonenú rovinu (nemá pohybové účinky).

Pre vykonanú prácu (sila $\boldsymbol{F}_1$ má rovnaký smer ako posunutie) platí

$$W = F_1 s$$

Z obrázka je zrejmé, že $F_1 = F_G \sin\beta = m\,g \sin\beta$ a dráha $s = \dfrac{h}{\sin\beta}$.

$$W = m\,g \sin\beta \frac{h}{\sin\beta} = m\,g\,h$$

$$W = 50 . 10 . 5 \text{ J} = 2\,500 \text{ J}$$

Posunutím telesa po naklonenej rovine vykoná tiažová sila prácu 2 500 J.

Z výsledného vzťahu pre prácu $W = m\,g\,h$ vyplýva, že rovnakú prácu by vykonala tiažová sila aj pri posunutí telesa zvislo nadol po dráhe h (napr. pri voľnom páde telesa s hmotnosťou m z výšky h).

Uvážme, akú veľkú prácu by sme vykonali, keby sme po naklonenej rovine posúvali teleso rovnomerným pohybom zdola do výšky h. Aby sa teleso pohybovalo rovnomerne, musí sa podľa 2. Newtonovho zákona výslednica síl, ktoré na toto teleso pôsobia, rovnať nule. Na teleso by sme teda museli pôsobiť silou $\boldsymbol{F}$, ktorá má rovnakú veľkosť a opačný smer ako sila $\boldsymbol{F}_1$. Preto $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}_1$. Vykonali by sme opäť prácu $W = m\,g\,h$.

Rovnako veľkú prácu vykonáme pri zdvihnutí telesa zvislo nahor po dráhe h, keď na teleso pôsobíme rovnako veľkou silou, ale opačného smeru, ako je tiažová sila.

Úlohy

1. Stála sila s veľkosťou $F = 100$ N pôsobí na teleso tak, že so smerom posunutia zviera uhol: a) $\alpha_1 = 30°$; b) $\alpha_2 = 60°$ a c) $\alpha_3 = 90°$. Určte vykonanú prácu vo všetkých prípadoch pre dráhu $s = 6$ m. [520 J; 300 J; 0 J]
2. V ruke držíme teleso s hmotnosťou 5 kg. Určte veľkosť vykonanej práce, ak: a) stojíte v pokoji s telesom v ruke; b) idete po vodorovnej ceste 10 m dlhej rovnomerným pohybom; c) idete po tej istej ceste rovnomerne zrýchleným pohybom so zrýchlením 0,5 m.s^{-2}. Predpokladáme, že pri chôdzi sa výška telesa nad zemou nemení a všetky odpory zanedbáme. [0 J; 0 J; 25 J]
3. Keď ťaháme vozík, prekonávame stálu odporovú silu veľkosti 100 N, namierenú proti smeru posunutia. Človek, ktorý ťahá vozík rovnomerným pohybom po dráhe 12 m,

pôsobí naň ťahovou silou a) rovnobežnou so smerom posunutia; b) zvierajúcou so smerom posunutia uhol 30°; c) zvierajúcou so smerom posunutia uhol 60°. Akou veľkou silou človek pôsobí na vozík a akú prácu v jednotlivých prípadoch vykoná? [100 N; 115 N; 200 N; 1 200 J]

4. Automobil s hmotnosťou 2 000 kg prešiel rovnomerným priamočiarym pohybom po vozovke so stúpaním 8 %. Akú prácu vykonal motor automobilu na dráhe 1 km (trenie a všetky odpory zanedbáme, $g \doteq 10 \text{ m.s}^{-2}$)? [1,6 MJ]

3.2 Výkon

Na stavbe sú dva žeriavy. Jeden môže zdvihnúť panel do istej výšky za 5 s, druhý ten istý panel za 2 s. Druhý žeriav vykoná rovnakú prácu ako prvý za kratší čas. Má väčší výkon.

Veličinu **výkon** definujeme vzťahom

$$\boxed{P = \frac{W}{t}}$$

kde W je práca vykonaná rovnomerne za čas t. Ak sa práca nekoná rovnomerne, uvedený vzťah vyjadruje priemerný výkon.

Jednotku výkonu v SI určíme z definičného vzťahu pre výkon

$$[P] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{J.s}^{-1}$$

Nazýva sa **watt*** (W).

Ak je výkon konštantný, pre prácu platí

$$\boxed{W = P\,t}$$

* Jednotku výkonu nazvali na počesť anglického vynálezcu parného stroja JAMESA WATTA (čítaj džejms vot; 1736—1819).

Z tohto vzťahu zavedieme jednotku práce **watt sekunda,** pre ktorú platí

$$\mathrm{W.s} = \mathrm{J}$$

S násobkami tejto jednotky sa stretávame najmä v energetike ($1\ \mathrm{kW.h} = 36.10^5\ \mathrm{W.s} = 36.10^5\ \mathrm{J}$).

Vzťah pre výkon pri rovnomernom konaní práce môžeme napísať aj takto

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F s}{t} = F \frac{s}{t} = F v$$

Keď pôsobiaca sila a rýchlosť majú súhlasný smer, má odvodený vzťah všeobecnú platnosť a výkon je určený súčinom veľkosti sily a rýchlosti

$$\boxed{P = F v}$$

Úlohy

1. Určte výkon človeka, ktorý zdvihol pomocou pevnej kladky vrece cementu ($m = 50$ kg) do výšky 1,5 m za 7,5 s rovnomerným pohybom ($g \doteq 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$). [100 W]
2. Človek prenesie vo výške 80 cm nad vozovkou rovnobežne s ňou rovnomerným pohybom kameň s hmotnosťou 2 kg po dráhe 6 m za 10 s. S akým výkonom pracuje? [0 J]
3. Výťah má zdvihnúť rovnomerným pohybom náklad do výšky 24 m za 12 s. Motor výťahu má pri rovnomernom chode výkon 20 kW. Akú maximálnu hmotnosť môže mať kabína s nákladom ($g \doteq 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$)? [1 000 kg]
4. Automobil ide po vodorovnej ceste rýchlosťou $72\ \mathrm{km.h^{-1}}$. Odporové a trecie sily pôsobiace proti smeru posunutia sú 1 kN. Aký veľký výkon má motor? [20 kW]
5. Traktor sa pri orbe pohybuje rýchlosťou $2{,}88\ \mathrm{km.h^{-1}}$ a má výkon 110 kW. Akou veľkou silou pôsobí na pluh? [138 kN]

3.3 Kinetická energia hmotného bodu

Predpokladajme, že na hmotný bod s hmotnosťou m, ktorý je vzhľadom na zvolenú inerciálnu vzťažnú sústavu v pokoji, začne pôsobiť stála sila $\boldsymbol{F}$. Podľa 2. Newtonovho pohybového zákona sa bude pôsobením tejto sily hmotný bod pohybovať priamočiaro rovnomerne zrýchlene. Za čas t prejde dráhu $s=\frac{1}{2}a\,t^2$ a bude mať konečnú rýchlosť $v=a\,t$.

Sila $\boldsymbol{F}$, ktorá pôsobí na hmotný bod po dráhe s, vykoná prácu

$$W_s=F\,s$$

Keď dosadíme za $F=m\,a$, po úpravách dostaneme

$$W_s=m\,a\frac{1}{2}a\,t^2=\frac{1}{2}m\,a^2t^2=\frac{1}{2}m(a\,t)^2=\frac{1}{2}m\,v^2$$

Keď na hmotný bod nebude ďalej pôsobiť žiadna sila, bude sa pohybovať rovnomerne priamočiaro. Na zbrzdenie pohybu musíme opäť vykonať prácu $\frac{1}{2}m\,v^2$. Odvodený vzťah určuje veličinu, ktorú nazveme **kinetická energia** hmotného bodu, značka E_k

$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}m\,v^2}$$

Hmotný bod získal kinetickú energiu, ktorá sa rovná práci vykonanej silou pôsobiacou na tento hmotný bod

$$W_s=E_k$$

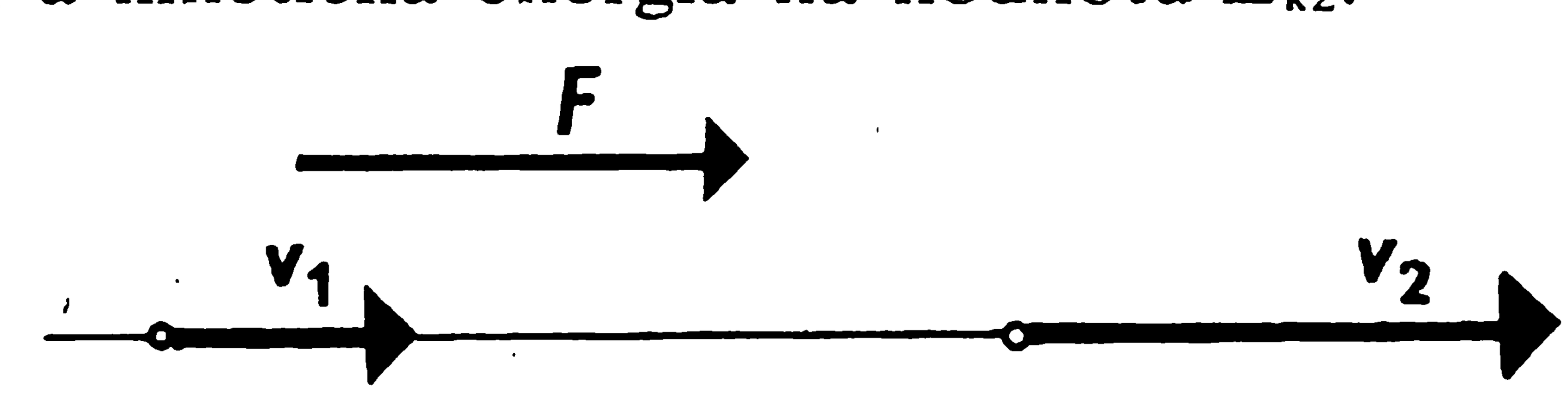
Určme jednotku kinetickej energie

$$[E_k]=\mathrm{kg.m^2.s^{-2}=kg.m.s^{-2}.m=N.m=J}$$

Jednotkou kinetickej energie je joul.

Uvažujme teraz, že hmotný bod sa už pohybuje rýchlosťou $\boldsymbol{v}_1$, má teda kinetickú energiu E_{k1}. Na hmotný bod začne pôsobiť stála sila $\boldsymbol{F}$ tak, že rýchlosť $\boldsymbol{v}_1$ a sila $\boldsymbol{F}$ majú súhlasný smer (obr. 3-5). Pôsobením sily $\boldsymbol{F}$ na hmotný bod sa teraz vykoná práca W; tým sa zvýši rýchlosť hmotného bodu na hodnotu $\boldsymbol{v}_2$ a kinetická energia na hodnotu E_{k2}.

Obr. 3-5



Pri deji nastala zmena kinetickej energie

$$\boxed{\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}}$$

Možno dokázať, že zmena kinetickej energie sa rovná práve práci, ktorú vykonala pôsobiaca sila

$$\boxed{W = \Delta E_k}$$

Tento záver platí aj vtedy, keď sa sila mení a hmotný bod sa pohybuje po krivke.

Úlohy

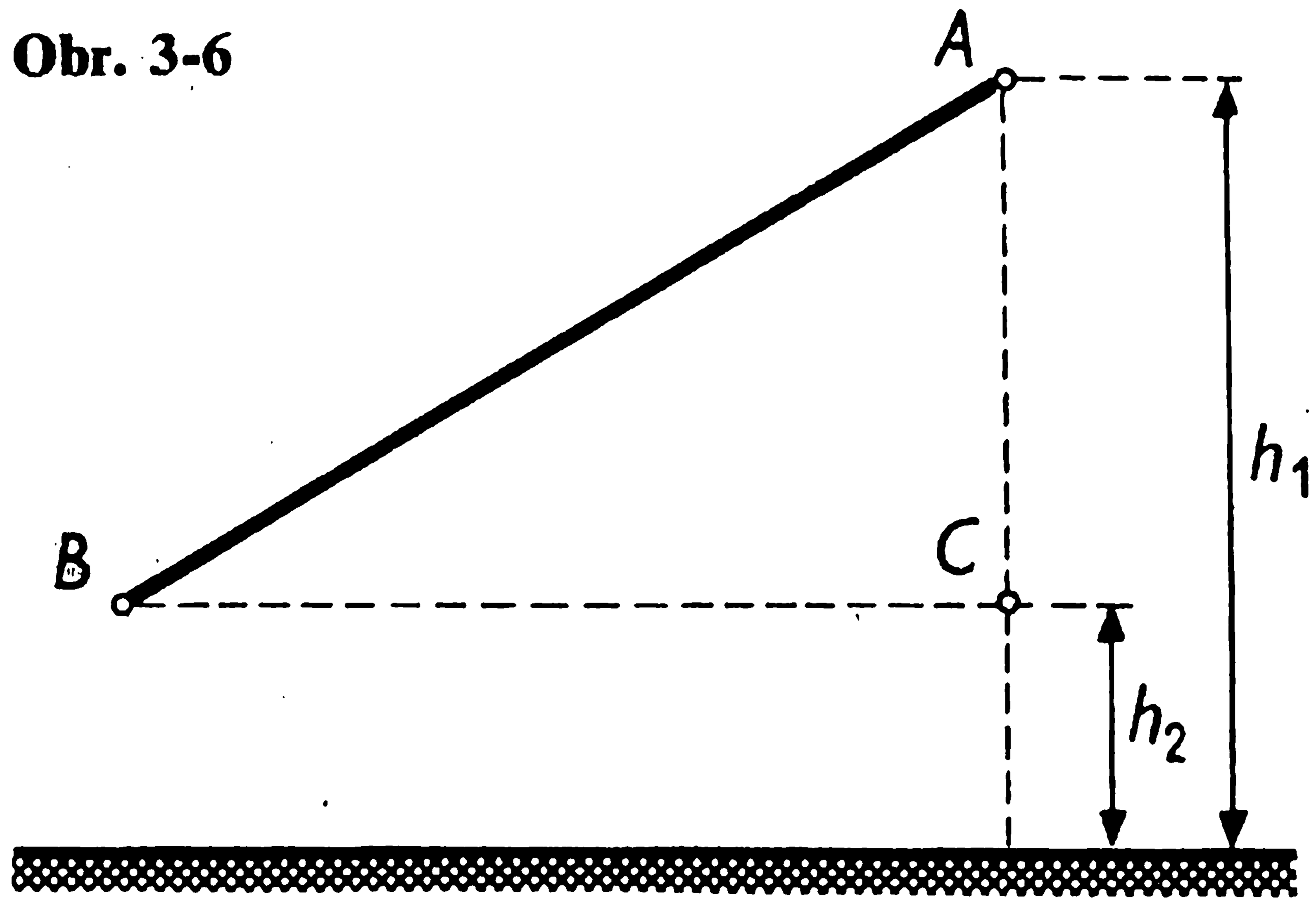
1. Železničný vagón s hmotnosťou 10 t sa pohybuje vzhľadom na Zem rýchlosťou veľkosti $10\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Určte kinetickú energiu vagóna vzhľadom na Zem a vzhľadom na iný vagón, ktorý sa voči Zemi pohybuje rýchlosťou $10\ \mathrm{m.s^{-1}}$ jednak rovnakým smerom, jednak opačným smerom. [0,5 MJ; 0 J; 2 MJ]
2. Akú kinetickú energiu má kameň s hmotnosťou 1,0 kg, ktorý padá voľným pádom 5 s od začiatku pohybu ($g \doteq 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$)? [1,25 kJ]
3. Oceľová palica s hmotnosťou 0,5 kg dopadne na klinec rýchlosťou $3\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Akou veľkou priemernou silou pôsobí palica po dopade na klinec, ak tento prenikne v dreve do hĺbky 45 mm? [50 N]
4. Automobil s hmotnosťou 1 t, ktorý má rýchlosť $54\ \mathrm{km.h^{-1}}$ vzhľadom na vodorovnú vozovku, po ktorej ide, zabrzdí na dráhe 30 m. Aká veľká priemerná výsledná brzdiaca sila naň pôsobila? [3,75 kN]
5. Rýchlik s hmotnosťou 400 t zväčší svoju rýchlosť z $36\ \mathrm{km.h^{-1}}$ na $90\ \mathrm{km.h^{-1}}$ vzhľadom na povrch Zeme. Určte prírastok jeho kinetickej energie. [105 MJ]

3.4 Potenciálna energia

Budeme predpokladať, že tiažové zrýchlenie g je vo všetkých miestach rovnaké; má všade rovnakú veľkosť a smer zvislý nadol. Na dané teleso teda pôsobí vo všetkých miestach rovnaká tiažová sila.

Keď budeme teleso posúvať bez trenia po vodorovnej doske stola alebo po podlahe, nevykonáme pritom žiadnu prácu, pretože smer pôsobiacej

Obr. 3-6



tiažovej sily a posunutie sú navzájom kolmé. Keď necháme teleso voľne padať, vykoná tiažová sila medzi bodom A vo výške h_1 a bodom C vo výške h_2 nad Zemou (obr. 3-6) prácu

$$\boxed{W = m\, g\, (h_1 - h_2)}$$

Pri výpočte práce konanej tiažovou silou pôsobiacou na teleso, ktoré sa pohybuje po naklonenej rovine z miesta A do miesta B, sme zistili (pozri príklad na s. 97), že táto práca je rovnaká ako práca pri voľnom páde z miesta A do miesta C. Práca vykonaná tiažovou silou teda závisí od polôh bodov A, B, C len do takej miery, ako vysoko sú nad Zemou. Veličinu

$$\boxed{E_p = m\, g\, h}$$

nazývame **polohová (potenciálna) energia** tiažová telesa vo výške h nad Zemou, na ktoré pôsobí tiažová sila $\boldsymbol{F}_G = m\,\boldsymbol{g}$. Na povrchu Zeme má potom teleso nulovú potenciálnu tiažovú energiu. Ľahko sa presvedčíme, že aj veličina E_p sa meria v rovnakých jednotkách ako práca.

Miesta, v ktorých má teleso rovnakú potenciálnu energiu, nazývajú sa **hladiny potenciálnej energie.** Pri tiažovej sile sú nimi vodorovné roviny.

Výšku h telesa však môžeme merať od podlahy alebo dosky stola. Nulovú hladinu potenciálnej energie môžeme teda voliť podľa potreby.

Hodnota potenciálnej energie závisí od voľby nulovej hladiny potenciálnej energie.

Práca vykonaná tiažovou silou pri posunutí telesa z miesta s potenciálnou energiou $E_{p1} = m\ g\ h_1$ na miesto s potenciálnou energiou $E_{p2} = m\ g\ h_2$ sa teda rovná

$$W = m\ g\ (h_1 - h_2) = E_{p1} - E_{p2}$$

Keď označíme $\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}$, práca vykonaná tiažovou silou pri posunutí telesa z miesta s potenciálnou energiou E_{p1} do miesta s potenciálnou energiou E_{p2} sa rovná

$$W = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

Potenciálna tiažová energia je iba osobitným prípadom potenciálnej energie telies. Neskôr sa oboznámite aj s ďalšími druhmi potenciálnej energie, napr. s potenciálnou energiou pružnosti.

Keď si zvolíme istú vzťažnú sústavu, potom každému jednotlivému telesu možno vzhľadom na túto sústavu určiť jednoznačne istú kinetickú energiu. Potenciálna energia však závisí od silového pôsobenia iného telesa, napr. pri potenciálnej tiažovej energii od silového pôsobenia Zeme. Potenciálnu energiu tiažovú teda nemá samo teleso, ale sústava Zem—teleso. Ak vzťažnú sústavu a nulovú hladinu spájame s povrchom Zeme, hovoríme stručne, že potenciálnu energiu má teleso.

Úlohy

1. Teleso s hmotnosťou 10 kg je zdvihnuté do výšky 1 m nad stôl rovnomerným pohybom po šikmej dráhe, ktorá zviera so zvislým smerom uhol 60°. Určte, akú polohovú energiu získa teleso vzhľadom na vodorovnú dosku stola ($g \doteq 10\ m.s^{-2}$). [100 J]
2. Výťah s hmotnosťou 500 kg vystúpi z tretieho poschodia na piate. O koľko sa zväčší jeho potenciálna tiažová energia, ak výškový rozdiel medzi jednotlivými poschodiami je 4 m ($g \doteq 10\ m.s^{-2}$)? [40 kJ]
3. Do akej výšky treba zdvihnúť kladivo s hmotnosťou 5 kg, aby sa jeho potenciálna tiažová energia zväčšila o 40 J ($g \doteq 10\ m.s^{-2}$)? [0,8 m]

3.5 Mechanická energia

Potenciálna energia telesa, ktoré sa pôsobením tiažovej sily pohybuje smerom nadol, klesá (správne by sme mali hovoriť, že klesá potenciálna energia sústavy teleso-Zem); tiažová sila koná prácu $W = E_{p1} - E_{p2} > 0$. Naopak pri pohybe telesa zvislo nahor jeho potenciálna energia sa zväčšuje. Pretože $h_1 < h_2$, práca tiažovej sily $W = E_{p1} - E_{p2} < 0$. V tomto prípade hovoríme, že sa práca spotrebuje.

Ukázali sme, ako súvisí práca W vykonaná tiažovou silou so zmenou potenciálnej energie ΔE_p; $W = -\Delta E_p$. Ďalej vieme, že práca tiažovej sily na danom úseku trajektórie a prírastok kinetickej energie telesa ΔE_k majú rovnakú hodnotu (pozri stať 3.3); $W = \Delta E_k$. Keď na teleso okrem tiažovej sily nepôsobí žiadna iná sila, $\Delta E_k = -\Delta E_p$, čiže

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

Ak súčet kinetickej a potenciálnej energie nazveme **celková mechanická energia** sústavy teleso-Zem

$$\boxed{E = E_k + E_p}$$

môžeme vzťah, ktorý sme uviedli predtým, napísať

$$\Delta E = 0$$

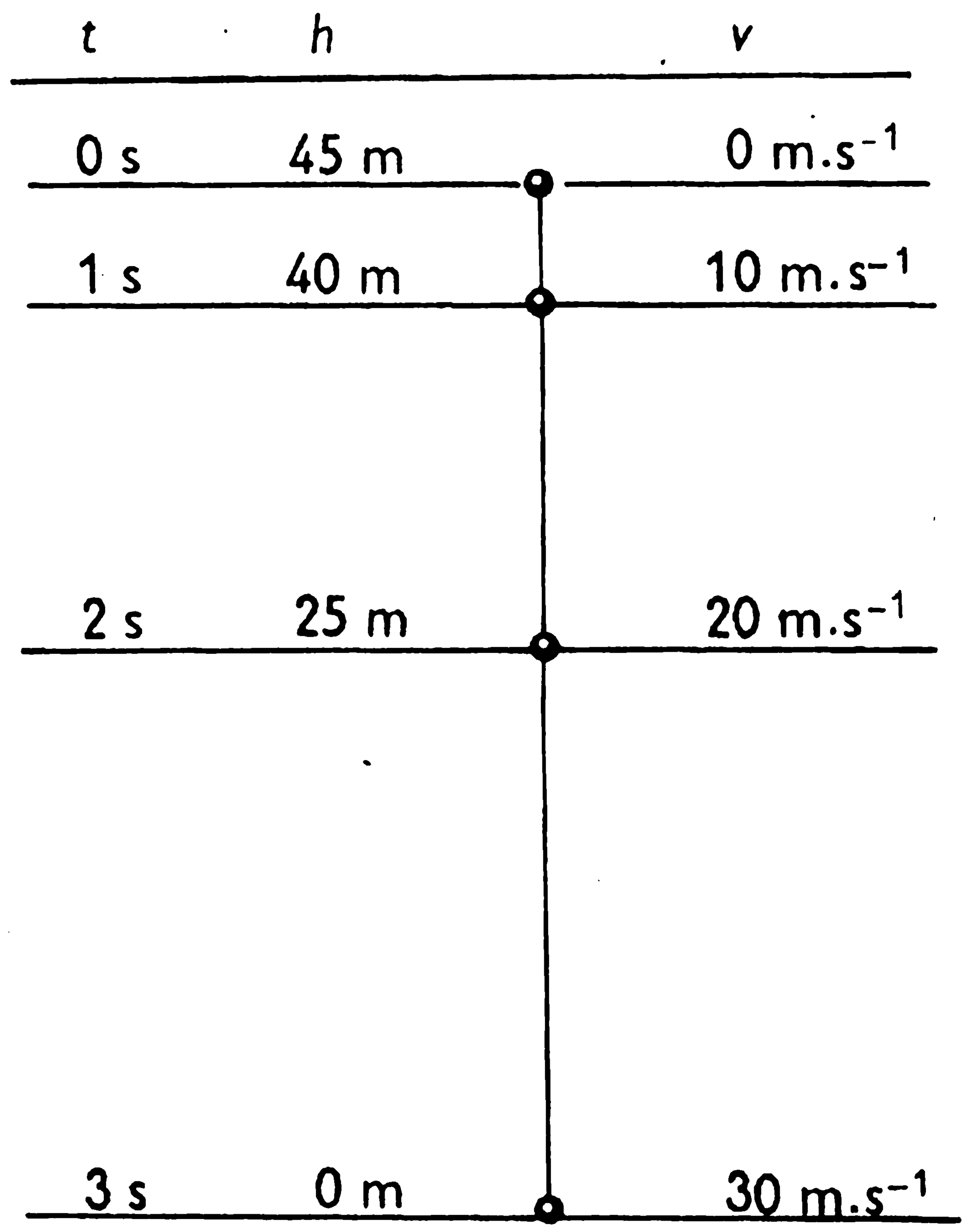
Keď v sústave teleso-Zem pôsobí iba tiažová sila, celková mechanická energia sústavy sa nemení. Celková mechanická energia takejto sústavy je stála.

Príklad

Naše tvrdenie overíme na voľnom páde telesa s hmotnosťou $m = 1$ kg, ktoré padá z výšky $h = 45$ m ($g \doteq 10$ m.s^{-2}) (obr. 3-7). Pre voľný pád platí: $s = \frac{1}{2} g t^2$, $v = g t$. Sledujme, ako sa mení potenciálna a kinetická energia po jednotlivých sekundách a ako sa mení súčet týchto energií:

1. na začiatku pohybu ($t = 0$ s)

$$E_p = m g h, \quad E_k = 0 \text{ J}$$



Obr. 3-7

$E = E_p + E_k = m\ g\ h,\ E = 1\,.\,10\,.\,45\ \mathrm{J} = 450\ \mathrm{J}$

2. na konci 1. sekundy ($t = 1$ s) teleso prešlo dráhu $s_1 = 5$ m a má rýchlosť $10\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$

   $E_p = m\ g\ (h - s_1),\ E_k = \frac{1}{2}\, m\ v_1^2$

   $E = 1\,.\,10\,.\,40\ \mathrm{J} + \frac{1}{2}\,.\,1\,.\,100\ \mathrm{J} = 450\ \mathrm{J}$

3. na konci 2. sekundy ($t = 2$ s), $s_2 = 20$ m, $v_2 = 20\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$

   $E_p = m\ g\ (h - s_2),\ E_k = \frac{1}{2}\, m\ v_2^2$

   $E = 1\,.\,10\,.\,25\ \mathrm{J} + \frac{1}{2}\,.\,1\,.\,400\ \mathrm{J} = 450\ \mathrm{J}$

4. na konci 3. sekundy ($t = 3$ s), $s_3 = 45$ m, $v_3 = 30\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ teleso dopadá na zem

   $E_p = 0,\ E_k = \frac{1}{2}\, m\ v_3^2$

   $E = 0 + \frac{1}{2}\,.\,1\,.\,900\ \mathrm{J} = 450\ \mathrm{J}$

Počas celého voľného pádu zostáva súčet potenciálnej a kinetickej energie konštantný.

3.6 Zákon zachovania energie

V stati 3.5 sme uvažovali o sústave teleso—Zem. V tejto sústave na teleso nepôsobili žiadne iné sily okrem tiažovej. Takáto vzťažná sústava je príkladom izolovanej sústavy telies. Platí v nej **zákon zachovania mechanickej energie.** Tento zákon však neplatí iba pre telesá, na ktoré pôsobia len tiažové sily. Má všeobecnejšiu platnosť a týka sa všetkých prípadov izolovaných sústav, v ktorých pôsobením síl nenastávajú premeny na iné formy energie ako na mechanickú potenciálnu a kinetickú energiu. Pre takéto sústavy potom platí zákon zachovania mechanickej energie:

Celková mechanická energia izolovanej sústavy je stála.

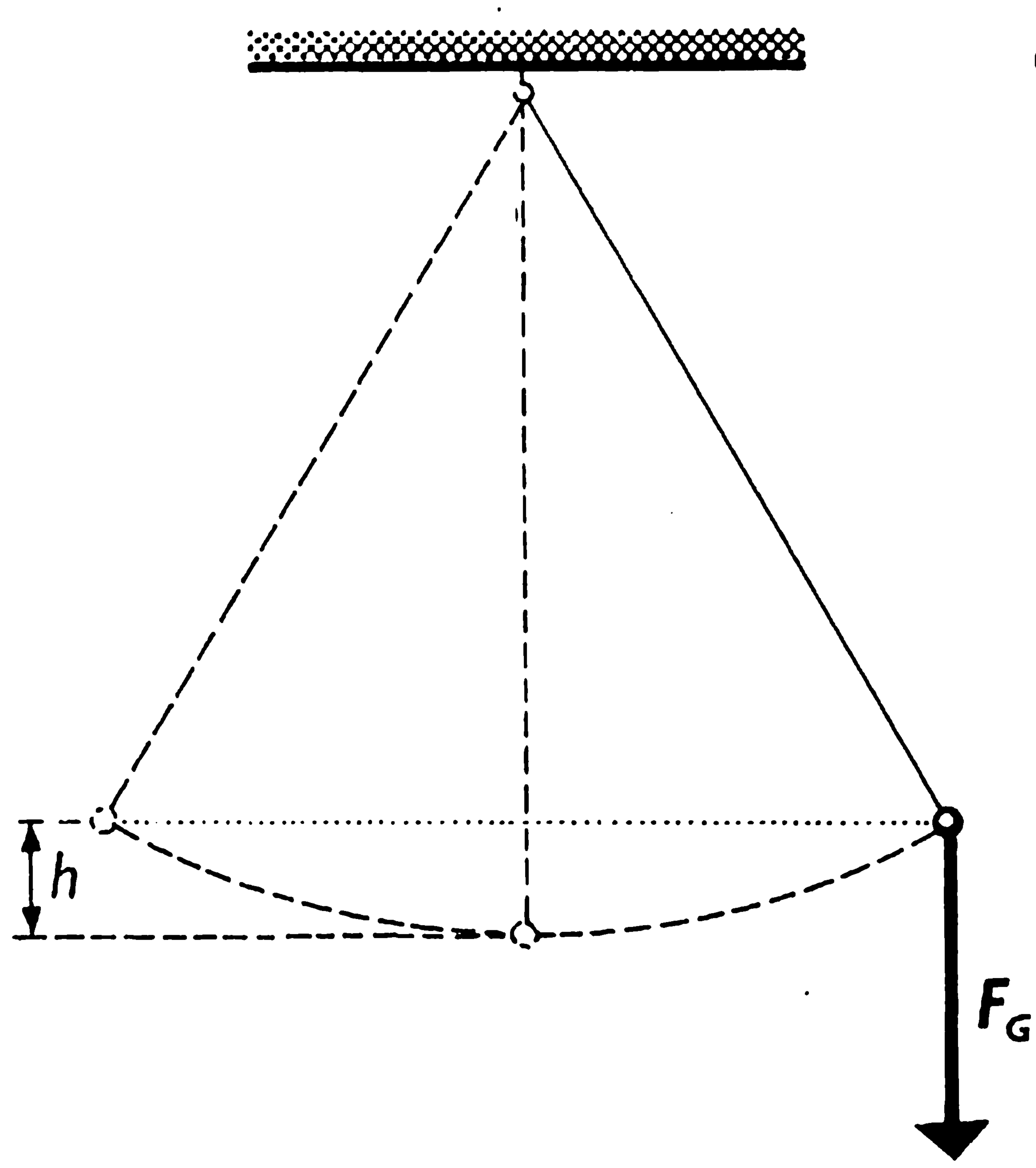
Pri pôsobení napr. trecích síl sa však telesá, ktoré sa po sebe pohybujú, zahrievajú, môžu sa trením zelektrizovať a pod. Mechanická energia telies sa postupne mení na iné formy energie tak dlho, až mechanický pohyb celkom zanikne. V takomto prípade v izolovanej sústave telies zákon zachovania mechanickej energie neplatí.

Energia nemôže vzniknúť ani zaniknúť. Nastáva len premena jednej formy energie na druhú, prenos energie z jedného telesa na druhé. Mierou procesu premeny energie aj mierou prenosu energie z jedného telesa na druhé je práca. Hoci hodnoty veličín energia a práca vyjadrujeme v rovnakých jednotkách, nesmieme tieto veličiny stotožňovať. **Veličina energia charakterizuje istý stav sústavy (je stavová veličina). Veličina práca charakterizuje dej, pri ktorom nastáva premena alebo prenos energie.**

Zákon zachovania mechanickej energie je len osobitným prípadom všeobecného zákona zachovania energie. **Celková energia izolovanej sústavy (všetkých jej foriem) je stála, nech v nej prebiehajú akékoľvek deje** (napr. mechanická energia sa mení na vnútornú energiu telies, elektromagnetickú energiu a iné i naopak).

Príklad

Oceľová guľôčka je zavesená na tenkom vlákne na pevnom závese. Keď ju vychýlime z rovnovážnej polohy a spustíme, začne sa kývať. Ak zanedbáme odpor vzduchu, trenie v závese a vonkajšie vplyvy pôsobiace na Zemi, môžeme sústavu utvorenú guľôčkou na vlákne (kyvadlo) a Zemou považovať za izolovanú sústavu, v ktorej na guľôčku pôsobí iba tiažová sila. Kývanie guľôčky predstavuje periodickú premenu potenciálnej energie a kinetickej energie v sústave guľôčka-Zem (obr. 3-8).



Obr. 3-8

Hmotnosť guľôčky je 10 g, dĺžka nite je 0,5 m, výška vychýlenia guľôčky nad rovnovážnu polohu je 6,7 cm, $g \doteq 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$. Určte: a) celkovú mechanickú energiu sústavy guľôčka-Zem, b) veľkosť rýchlosti guľôčky pri prechode rovnovážnou polohou.

$m = 0{,}01$ kg, $l = 0{,}5$ m, $h = 0{,}067$ m, $E = ?$, $v_r = ?$

---

a) $E = E_k + E_p$. Pri maximálnej výchylke sa celková energia rovná potenciálnej energii vo výške h nad rovnovážnou polohou.

$E = m\,g\,h \quad E = 0{,}01 . 10 . 0{,}06\,7\ \mathrm{J} = 0{,}006\,7\ \mathrm{J}$

Celková energia guľôčky je 6,7 mJ.

b) Pri prechode rovnovážnou polohou má guľôčka v zvolenej vzťažnej sústave spojenej so Zemou, ktorú považujeme za inerciálnu, len kinetickú energiu. Tá sa rovná celkovej mechanickej energii guľôčky

$$E=\frac{1}{2}\,m\,v_r^2=m\,g\,h \qquad v_r^2=2g\,h$$

$$v_r=\sqrt{2\,.\,10\,.\,0{,}067}\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}} \qquad v_r=\sqrt{2g\,h}$$

$$v_r \doteq 1{,}16\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$$

Rýchlosť guľôčky pri prechode rovnovážnou polohou je približne $1{,}16\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$.

Úlohy

1. Určte rýchlosť guľôčky kyvadla s hmotnosťou 0,2 kg v najnižšom bode jej dráhy, ak je výška výchylky 0,2 m a $g \doteq 10\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}$. [$2\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$]
2. Guľôčka zavesená na niti s dĺžkou 30 cm sa vychýli tak, že napnutá niť zviera so zvislou polohou uhol 60°. Akou rýchlosťou prejde guľôčka rovnovážnou polohou ($g \doteq 10\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}$)? [$1{,}7\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$]

3.7 Zákony zachovania v mechanike hmotných bodov

V predchádzajúcom učive sme sa oboznámili s tým, že v izolovaných sústavách hmotných bodov platí zákon zachovania hybnosti a zákon zachovania mechanickej energie (za predpokladu, že sily spĺňajú isté podmienky). Mlčky sme predpokladali, že ani hmotnosti telies, o ktorých sme uvažovali, sa pri mechanických dejoch nemenia.

Pri všetkých mechanických dejoch v izolovaných sústavách musia teda vždy platiť: zákon zachovania hmotnosti, zákon zachovania hybnosti a zákon zachovania celkovej energie (v osobitných prípadoch ako zákon zachovania mechanickej energie).

Tieto tri zákony zachovania platné v klasickej fyzike (neskôr sa oboznámime ešte s ďalšími) patria medzi najvšeobecnejšie fyzikálne zákony (princípy) a ich poznanie k vrcholom ľudského poznania vôbec.

Znalosť týchto troch zákonov a Newtonových pohybových zákonov umožňuje riešiť veľmi veľa problémov v dynamike.

Dôležitá úloha, ktorá sa vyskytuje nielen v mechanike, ale aj v molekulovej fyzike, atomistike, technickej praxi a inde, je úloha určiť veľkosť a smer okamžitej rýchlosti telies po ráze (zrážke), ak poznáme ich rýchlosti pred rázom. Napríklad pre ráz dvoch telies, ktoré tvoria izolovanú sústavu, musí vždy platiť zákon zachovania hmotnosti a hybnosti. Môžeme teda písať

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = m_1 \boldsymbol{u}_1 + m_2 \boldsymbol{u}_2,$$

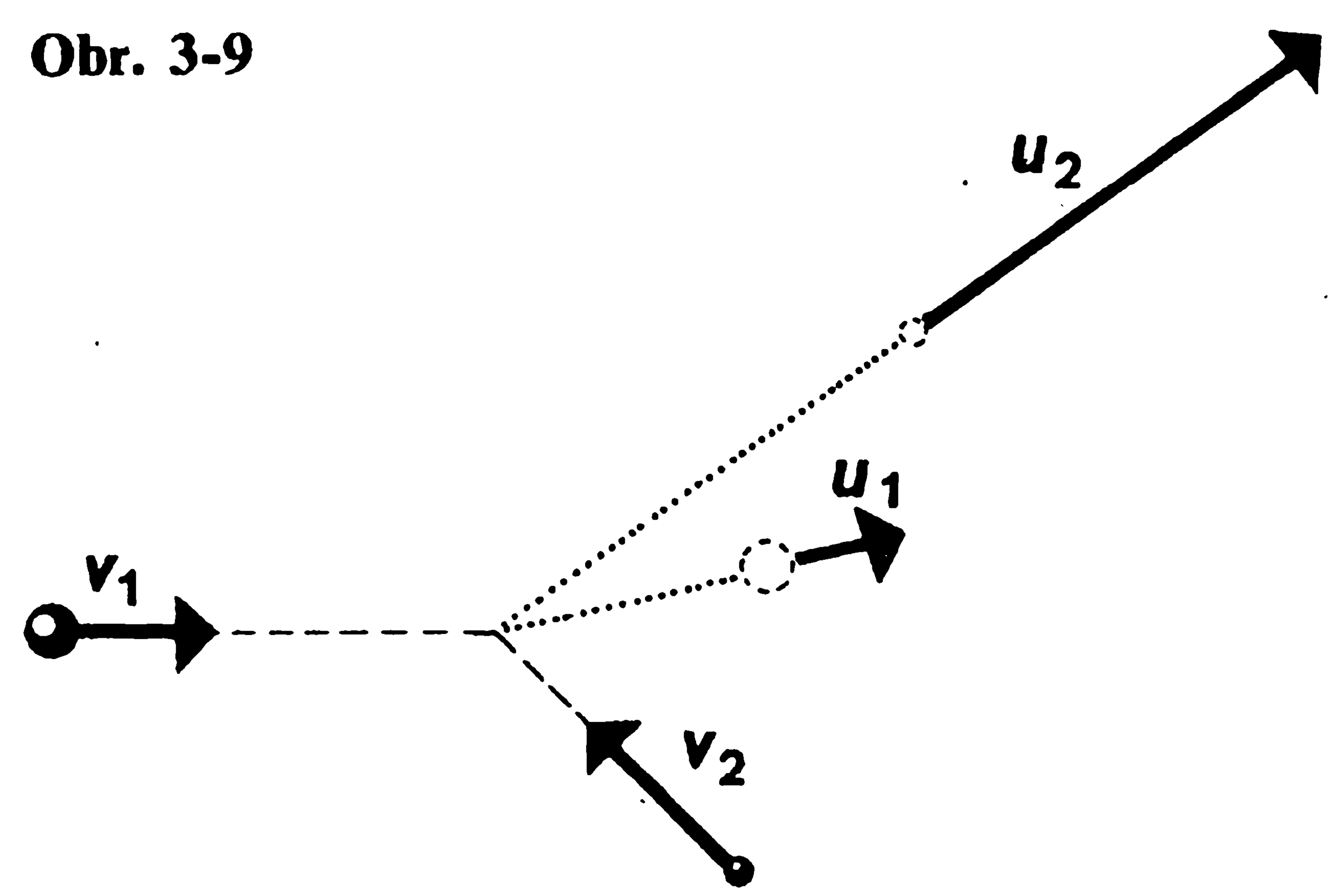
kde $\boldsymbol{v}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$ sú okamžité rýchlosti hmotných bodov pred rázom, $\boldsymbol{u}_1$ a $\boldsymbol{u}_2$ sú okamžité rýchlosti po ráze vzhľadom na vhodnú inerciálnu vzťažnú sústavu.

Tento jediný vzťah nestačí na určenie dvoch neznámych vektorov $\boldsymbol{u}_1$ a $\boldsymbol{u}_2$, preto musia byť dané ďalšie údaje. Napríklad pri dokonale pružných rázoch hmotných bodov (t. j. zrážok, pri ktorých súčet kinetických energií pred zrážkou a po nej zostáva stály) možno po vynásobení dvoma písať

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2$$

Z týchto dvoch vzťahov, ak poznáme z experimentu smer $\boldsymbol{u}_1$ alebo $\boldsymbol{u}_2$ (napr. obr. 3-9), môžeme určiť rýchlosti hmotných bodov po ráze.

Obr. 3-9



Keď ráz nie je dokonale pružný, mení sa časť alebo celá kinetická energia hmotných bodov na iné druhy energie. Zákon zachovania hmotnosti a hybnosti však platí.

Poznanie zákona zachovania energie a Newtonových pohybových zákonov umožňuje určiť napr. rýchlosť dokonale pružnej gule pri jej odraze po kolmom dopade na pevnú stenu.

Pre odraz musí platiť zákon zachovania energie

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m u^2 \Rightarrow v = u$$

Podľa 2. Newtonovho pohybového zákona na dopadajúcu guľu pôsobí stena silou

$$\boldsymbol{F} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta t}$$

Vplyvom tejto sily sa zmení hybnosť gule na opačnú

$$\boldsymbol{p}_2 = -\boldsymbol{p}_1$$

Dokonale pružná guľa pri kolmom dopade na kolmú stenu sa odráža rovnako veľkou rýchlosťou opačným smerom.

ZHRNUTIE — ENERGIA HMOTNÝCH BODOV

Skalárna veličina práca charakterizuje kvantitatívny dej, pri ktorom pôsobí sila na teleso po istej dráhe. Výkon určuje prácu vykonanú za jednotku času.

Mechanická energia telesa je súčet pohybovej (kinetickej) energie a polohovej (potenciálnej) energie telies v zvolenej vzťažnej sústave. Polohová energia tiažová telesa sa vzťahuje na sústavu teleso—Zem.

Pri konaní práce nastávajú zmeny mechanickej energie jednotlivých telies. Ak vonkajšie sily pôsobia na teleso tak, že sa práca koná, energia telesa sa zväčšuje. V opačnom prípade, ak sa práca síl pôsobiacich na teleso spotrebúva, energia telesa sa zmenšuje.

V izolovanej sústave sprevádza zväčšenie energie jedného telesa zmenšenie energie ostatných telies sústavy tak, že celková energia sústavy sa zachováva. V izolovanej sústave, v ktorej nenastávajú premeny energie na energiu vnútornú, elektromagnetickú a pod., platí zákon zachovania mechanickej energie.

Veličina energia určuje istý stav telesa alebo sústavy telies. Veličina práca charakterizuje dej, pri ktorom prebieha zmena energie.

Veličiny	Jednotky	Zákony	Vzťahy
práca W	joule J $J = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$		$W = F s \cos \alpha$
výkon P	watt W $W = J \cdot s^{-1}$		$P = \frac{W}{t}$
kinetická energia W_k	J		$E_k = \frac{1}{2} m v^2$
potenciálna tiažová energia E_p	J		$E_p = m g h$
mechanická energia E	J	zákon zachovania mechanickej energie	$E = E_p + E_k$ pre izolovanú sústavu $E =$ konšt.

4. Mechanika tuhého telesa

4.1 Tuhé teleso

Telesá z pevných látok sú viac alebo menej usporiadané súbory častíc (atómov, molekúl, iónov), medzi ktorými pôsobia príťažlivé aj odpudivé sily (vnútorné sily). Vzájomné silové pôsobenie častíc pevnej látky spôsobuje, že neustály neusporiadaný pohyb častíc (tepelný pohyb) sa prejavuje ako kmitanie častíc okolo istých rovnovážnych (stredných) polôh. Ak na teleso nepôsobia žiadne vonkajšie sily a ak je teplota, pri ktorej teleso pozorujeme stála a nižšia ako teplota topenia látky telesa, vzdialenosť stredných polôh častíc sa nemení. Preto pevné telesá zachovávajú stály tvar a objem.

Pri skúmaní pokoja a pohybu pevných telies ako celku a pri skúmaní niektorých ich mechanických vlastností nemusíme prihliadať na **časticovú štruktúru látok,** z ktorých sú telesá. Pevné látky môžeme považovať za **spojité prostredie — kontinuum.**

Pre zjednodušenie niektorých úvah zanedbávame aj zmeny tvaru a objemu telies, ktoré nastanú pôsobením vonkajších síl, a zavádzame pojem **tuhé teleso.**

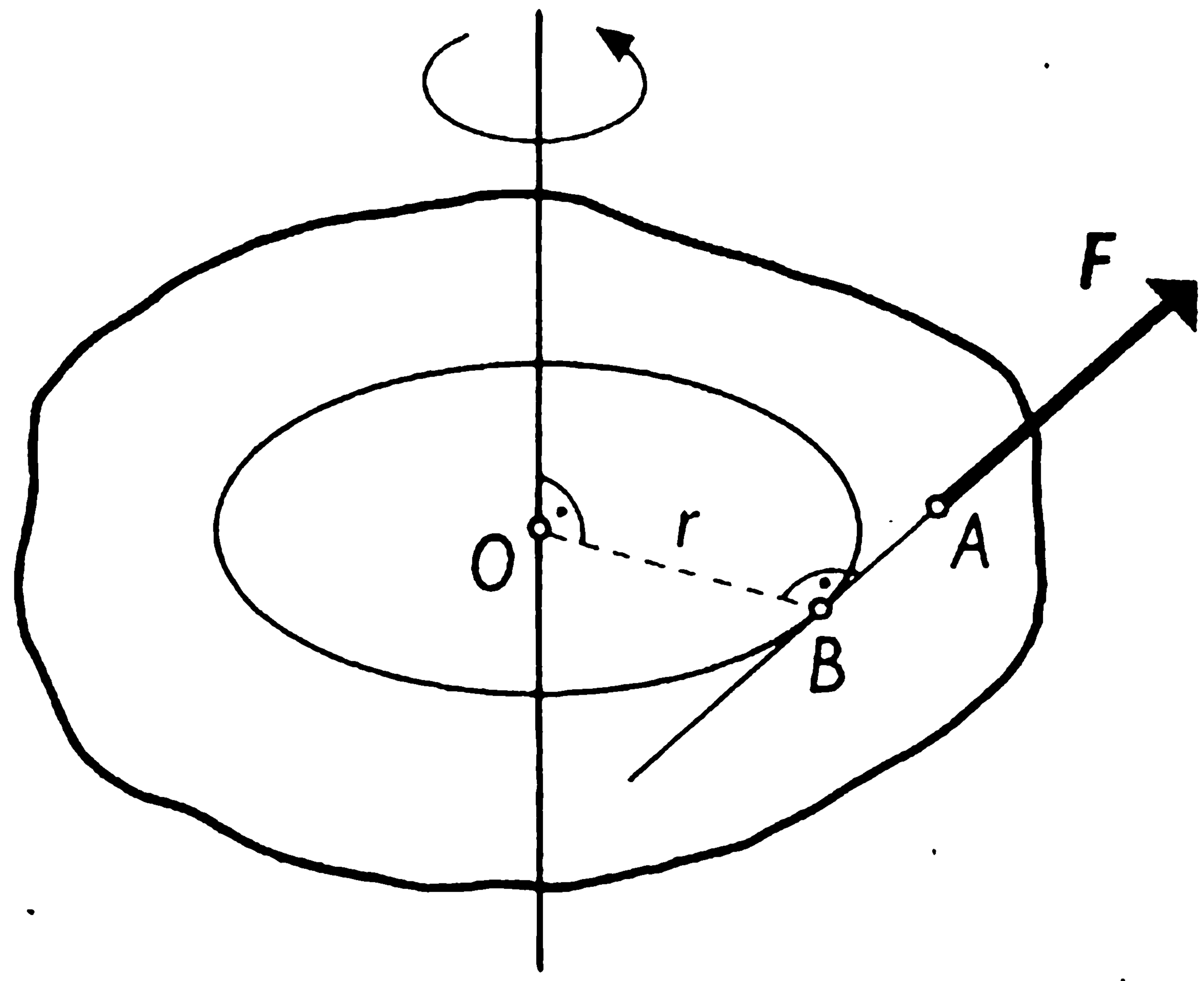
Tuhé teleso je ideálne teleso, ktorého tvar a objem sa účinkom ľubovoľne veľkých síl nemení.

Tuhé teleso je iba model reálneho pevného telesa. V praxi však musíme vždy uvážiť, za akých okolností môžeme závery odvodené pre tuhé teleso použiť pre reálne pevné telesá.

Častice tuhého telesa na seba vzájomne pôsobia vnútornými silami. Pretože podľa 3. Newtonovho pohybového zákona majú tieto sily rovnakú veľkosť, ale opačný smer, ich súčet sa rovná nule a na pohybový stav telesa ako celku nemajú vplyv. **Zmenu pohybu tuhého telesa môžu spôsobiť len vonkajšie sily.**

Ďalej budeme hovoriť stručne iba o silách pôsobiacich na teleso, pričom budeme mať vždy na mysli len vonkajšie sily.

Bod, v ktorom sila pôsobí na teleso, nazýva sa **pôsobisko** sily (napr. bod A na obr. 4-1). Účinky sily pôsobiacej na teleso závisia nielen od veľkosti a smeru tejto sily, ale aj od jej pôsobiska.



Obr. 4-1

Pohyb tuhého telesa môže byť posuvný alebo otáčavý.

Teleso koná posuvný pohyb, keď všetky jeho body majú v ľubovoľnom okamihu rovnakú okamžitú rýchlosť. Posuvný pohyb možno opísať podobne ako pohyb hmotného bodu.

Otáčavý pohyb telesa okolo osi je pohyb, pri ktorom majú všetky body telesa v ľubovoľnom čase rovnakú okamžitú uhlovú rýchlosť. Z možných prípadov otáčavého pohybu budeme ďalej uvažovať len o najjednoduchšom pohybe — pohybe tuhého telesa otáčavého okolo **nehybnej osi.** Takéto teleso môže uviesť z pokoja do pohybu sila ležiaca v rovine kolmej na os otáčania, ktorej vektorová priamka túto os nepretína. Opis otáčavých účinkov takejto sily je najjednoduchší, keď je látka telesa rozložená rovnomerne okolo osi otáčania. Potom dostredivé sily, ktoré pôsobia na jednotlivé časti telesa, sú rozložené rovnomerne vzhľadom na os a vo svojich účinkoch sa navzájom rušia. Takáto os sa nazýva **voľná os.** Niektoré časti strojov, napr. zotrvačníky, obežné kolesá turbín alebo generátorov sa konštruujú tak, aby sa otáčali okolo voľnej osi.

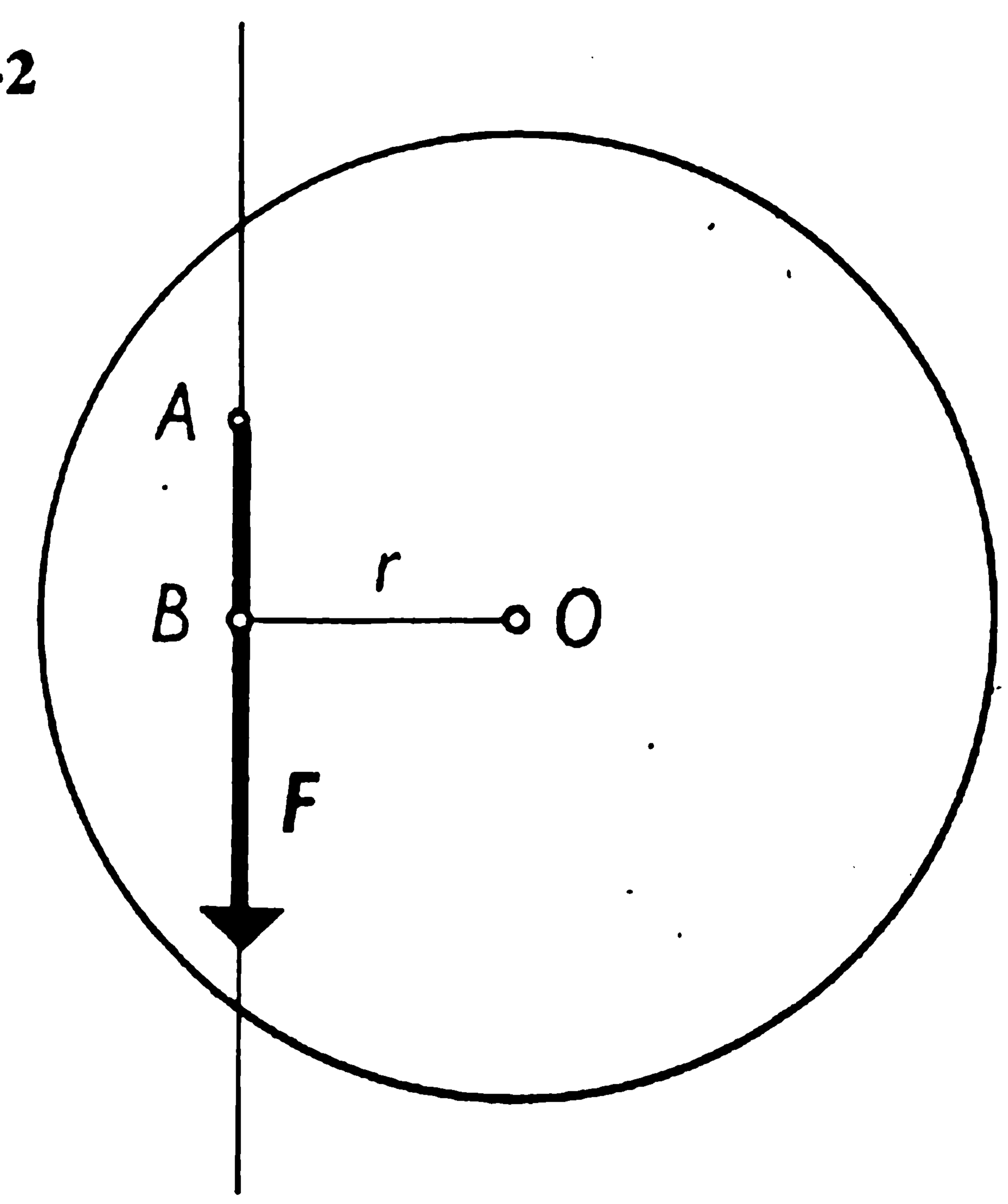
Preto sa aj kolesá automobilov vyvažujú pridávaním malých olovených závaží na obvode disku; tým sa dosahuje rovnomerné rozloženie hmotnosti vzhľadom na os.

4.2 Moment sily vzhľadom na os otáčania kolmú na smer sily

Keď pôsobí na tuhé teleso sila ***F***, ktorá leží v rovine kolmej na os otáčania a jej vektorová priamka túto os nepretína, otáčavý účinok sily závisí nielen od veľkosti sily, ale aj od vzdialenosti vektorovej priamky od osi otáčania, ktorú nazývame **rameno sily** r. Účinok sily ***F*** sa prejavuje zmenami v otáčavom pohybe telesa (obr. 4-1).

Na tenký kotúč otáčavý okolo osi (obr. 4-2), ktorá prechádza stredom O kotúča a je kolmá na rovinu kotúča (na nákresňu), pôsobí v bode A sila ***F***. Vektorová priamka sily ***F*** leží v rovine kotúča a nepretína os otáčania. Sila ***F*** spôsobuje zmenu otáčania kotúča.

Obr. 4-2

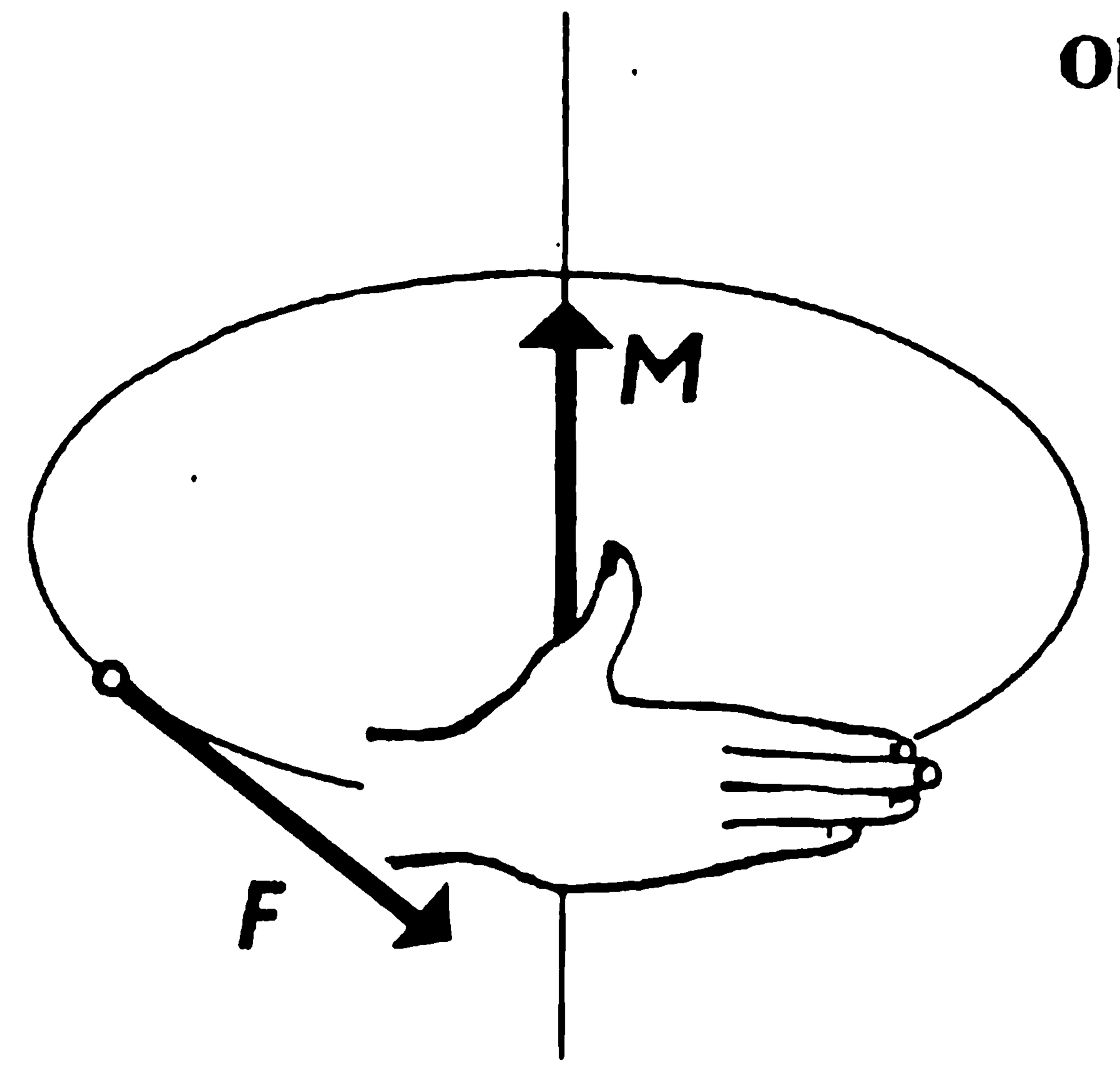


Otáčavý účinok sily na teleso vyjadruje veličina **moment sily** vzhľadom na os otáčania. Veľkosť momentu sily vzhľadom na os otáčania, ktorá je kolmá na smer sily, určíme ako súčin veľkosti sily F a ramena sily r vzhľadom na túto os

$$\boxed{M = F\,r}$$

Veličine moment sily priraďujeme aj istý smer, ktorý charakterizuje zmysel otáčania okolo nehybnej osi. Moment sily vzhľadom na nehybnú os je vektor, ktorý leží v osi otáčania; jeho smer určujeme podľa **pravidla pravej ruky:**

Keď položíme pravú ruku na povrch telesa tak, aby prsty ukazovali smer sily, ktorá spôsobuje otáčanie, vztýčený palec ukazuje smer momentu sily (obr. 4-3).



Obr. 4-3

Moment sily $\boldsymbol{M}$ smeruje podľa obr. 4-2 od nákresne dopredu.

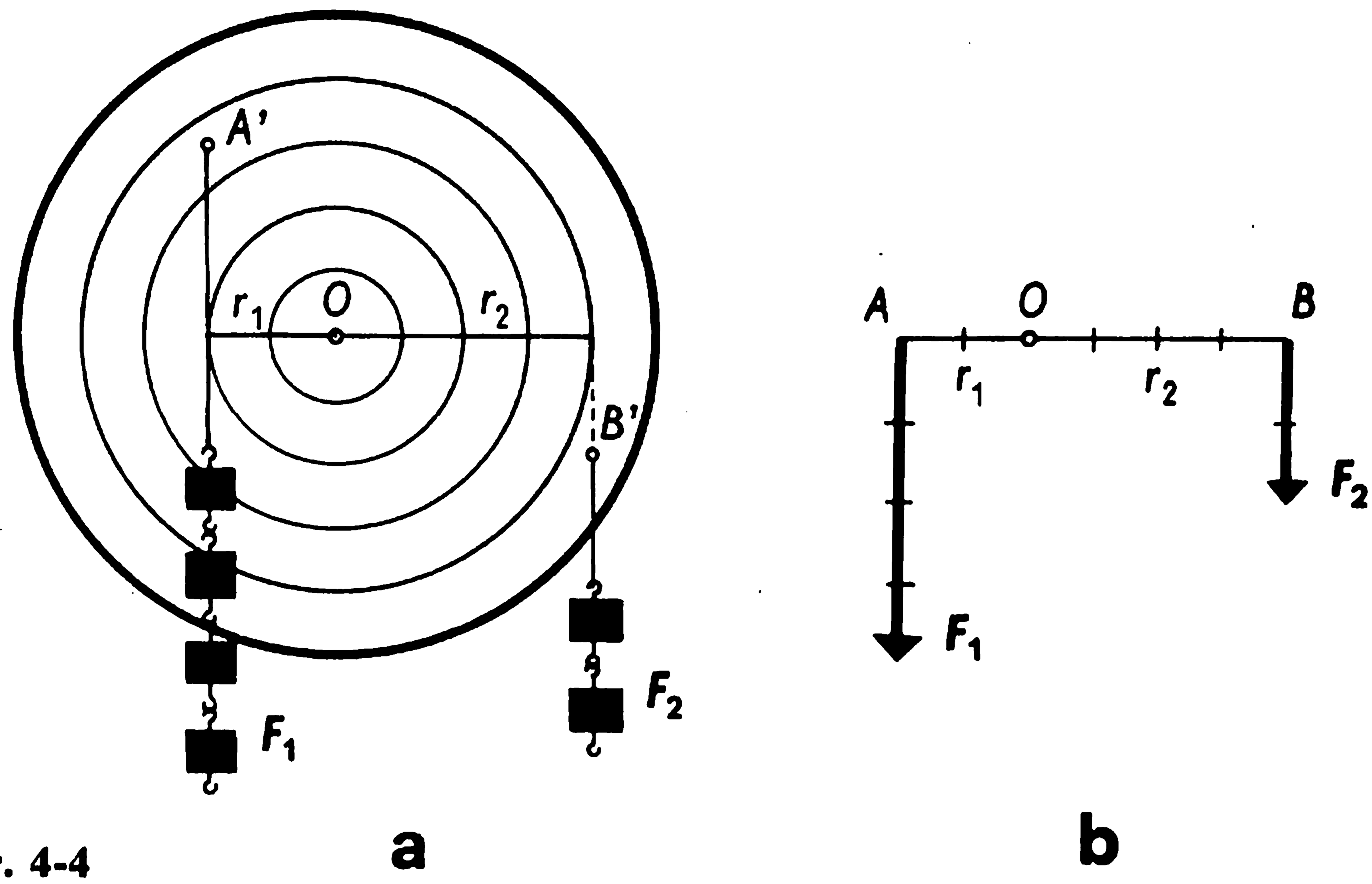
Jednotkou momentu sily v SI je **newton meter,** $[M]=[F]\,[r]= =\mathrm{N\,.\,m}$.

Z našich úvah aj z obr. 4-1 a 4-2 je zrejmé, že posunutím pôsobiska sily v tuhom telese po vektorovej priamke sily sa moment sily vzhľadom na danú os nemení. **Pôsobisko sily v tuhom telese môžeme ľubovoľne posúvať po jej vektorovej priamke bez toho, že by sa zmenil účinok sily na tuhé teleso.**

Keby v pokuse podľa obr. 4-4a pôsobila len sila $\boldsymbol{F}_1$, uviedla by kotúč (momentový kotúč) do otáčavého pohybu v kladnom zmysle (proti otáčaniu hodinových ručičiek). Moment sily $\boldsymbol{F}_1$, ktorý označíme $\boldsymbol{M}_1$, má podľa pravidla pravej ruky smer dopredu (pred nákresňu). Keby pôsobila len sila $\boldsymbol{F}_2$, uviedla by kotúč do otáčavého pohybu v zápornom zmysle (v smere otáčania hodinových ručičiek). Moment sily $\boldsymbol{M}_2$ ako vektor má smer dozadu (za nákresňu). Podľa obr. 4-4b, ktorý schematicky znázorňuje situáciu z obr. 4-4a (ak každé závažie pôsobí silou 1 N), pre veľkosť momentov platí

$$F_1=4\ \mathrm{N},\ r_1=0{,}08\ \mathrm{m},\ M_1=F_1 r_1=4\ \mathrm{N}\,.\,0{,}08\ \mathrm{m}=0{,}32\ \mathrm{N\,.\,m}$$
$$F_2=2\ \mathrm{N},\ r_2=0{,}16\ \mathrm{m},\ M_2=F_2 r_2=2\ \mathrm{N}\,.\,0{,}16\ \mathrm{m}=0{,}32\ \mathrm{N\,.\,m}$$

Obidva momenty sú rovnako veľké, ale opačného smeru, ich účinky na tuhé teleso sa vzájomne rušia. Ak pôsobia sily $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ na teleso súčasne, ich otáčavý účinok na teleso sa ruší, vektorový súčet ich momentov je nulový vektor, $\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{0}$. Kotúč zostane v pokoji.



Obr. 4-4

Keď na tuhé teleso otáčavé okolo nehybnej osi pôsobí súčasne viac síl (napr. *n*), účinok týchto síl na teleso môžeme určiť z výsledného momentu síl. Výsledný moment je daný vektorovým súčtom momentov jednotlivých síl (vzhľadom na danú os)

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{M}_3 + \ldots + \boldsymbol{M}_n$$

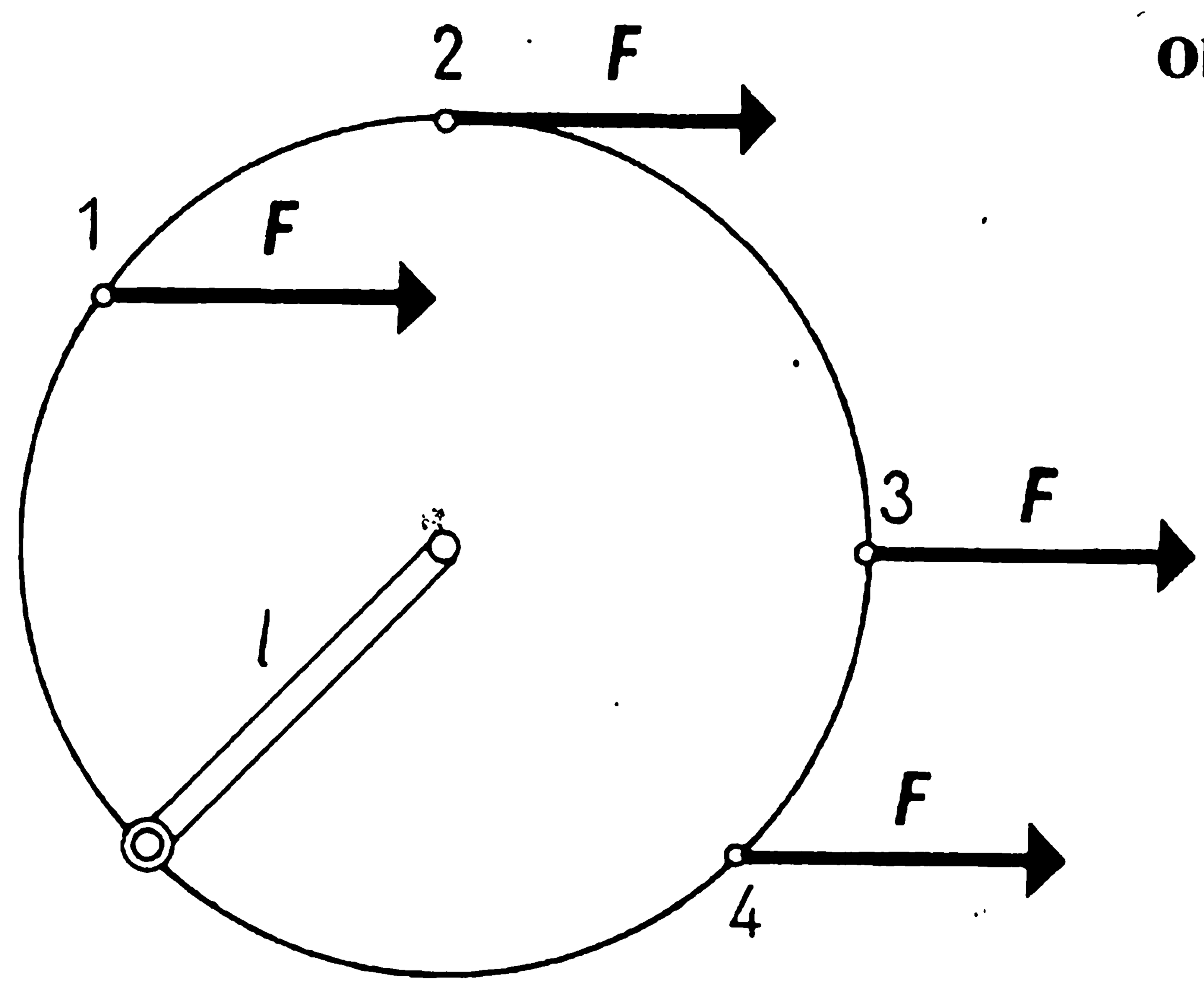
Otáčavý účinok síl pôsobiacich na tuhé teleso otáčavé okolo nehybnej osi sa ruší, ak vektorový súčet momentov všetkých síl vzhľadom na os je nulový vektor momentu sily.

$$\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots + \boldsymbol{M}_n = \boldsymbol{0}$$

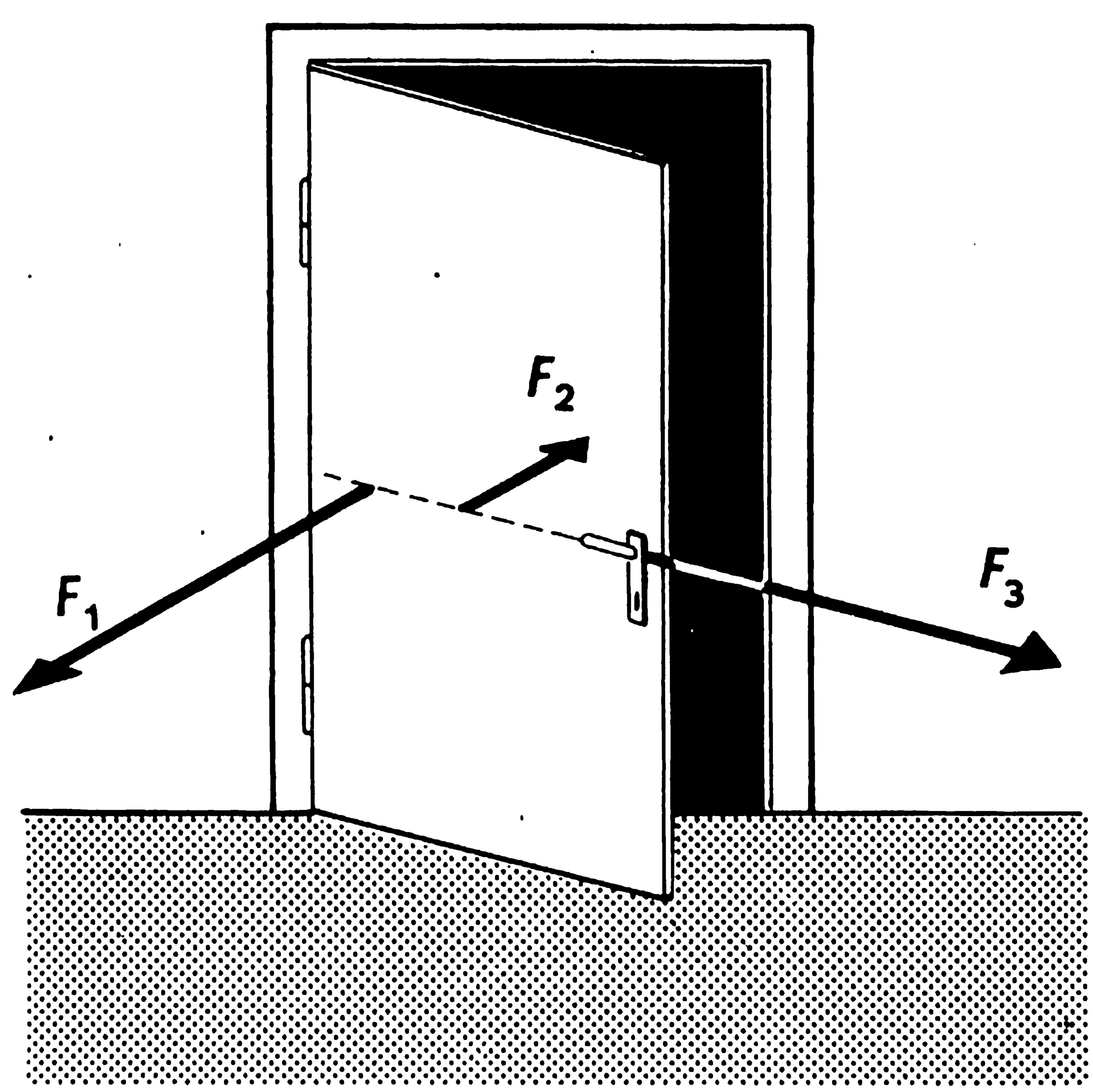
Toto pravidlo sa nazýva **momentová veta.**

Úlohy

1. Na kľuku dĺžky l pôsobíme rukou stálou silou rovnakého smeru. V ktorej polohe podľa obr. 4-5 je moment tejto sily najväčší a v ktorej nulový?
2. Dvere sú príkladom telesa otáčavého okolo zvislej osi. Podľa obr. 4-6 vysvetlite, aký účinok majú na dvere sily F_1, F_2, F_3.



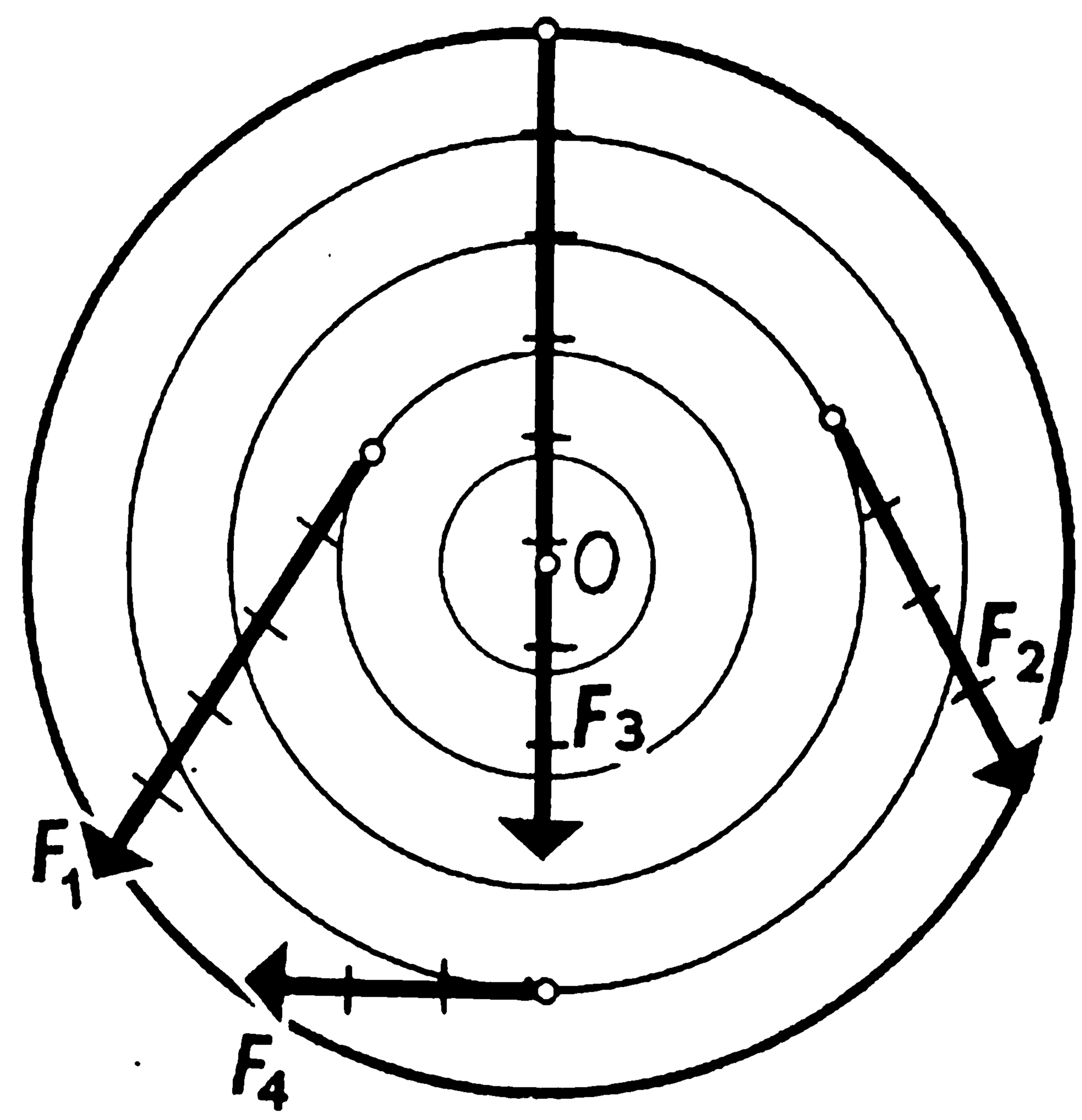
Obr. 4-5



Obr. 4-6

3. Pokusom na momentovom kotúči overte platnosť momentovej vety, ak na kotúč pôsobia tri rozličné sily.
4. Rozhodnite, či sily pôsobiace na kotúč podľa obr. 4-7 spôsobia jeho otáčanie.

Obr. 4-7



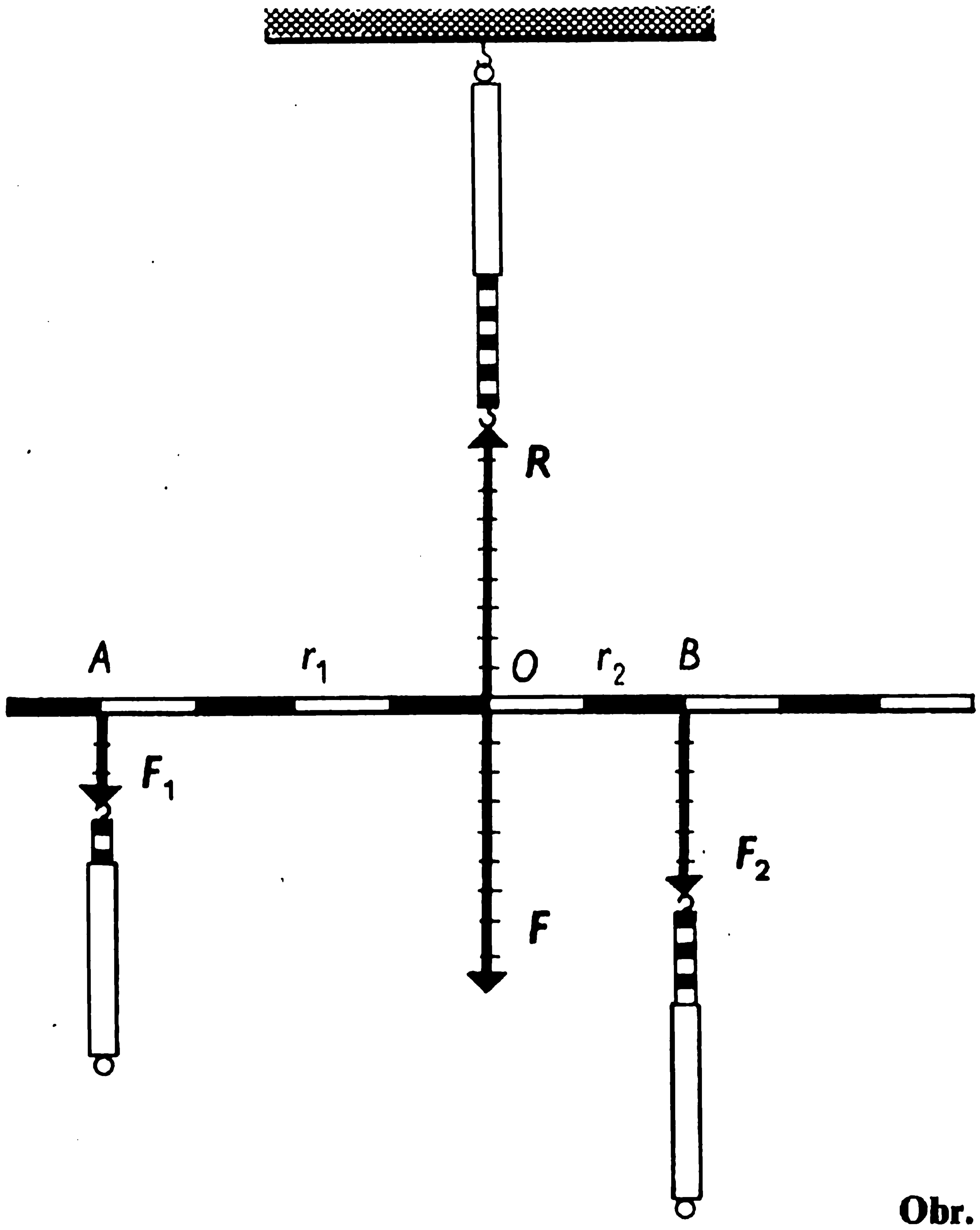
4.3 Skladanie síl

Zo základnej školy aj z predchádzajúcich statí viete, že sila je vektor. Preto musíme pri skladaní a rozkladaní síl, ktoré pôsobia na teleso v jednom bode, používať pravidlá na počítanie s vektormi. Sily, ktoré skladáme, nazývajú sa **zložky;** sila, ktorá vznikne skladaním zložiek, nazýva sa **výslednica.**

Skladať sily pôsobiace na tuhé teleso znamená určiť silu, ktorá má na dané teleso rovnaký účinok ako sily, ktoré skladáme.

Viete už skladať sily, ktoré pôsobia na teleso súčasne v jednom bode rovnakým smerom, i rôznobežné sily pomocou vektorového rovnobežníka. Teraz sa naučíme skladať a rozkladať rovnobežné sily, ktoré pôsobia súčasne v rôznych bodoch tuhého telesa otáčavého okolo nehybnej osi.

Zostavíme pokus podľa obr. 4-8. Na tyč, ktorá predstavuje tuhé teleso otáčavé okolo nehybnej osi, pôsobia v rovine kolmej na os (os je vodorovná, sily pôsobia zvislo nadol) súhlasným smerom dve rovnobežné sily $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$. Sila $\boldsymbol{F}_1$ pôsobí na ľavej strane v bode A, sila $\boldsymbol{F}_2$ na pravej strane v bode B. Veľkosť síl meriame silomermi; $F_1 = 3$ N, $F_2 = 6$ N.



Obr. 4-8

Podľa momentovej vety zostane tyč v pokoji, ak vektorový súčet momentov síl bude nulový.

Pokusom sa presvedčíme, že tyč zostane v pokoji, keď na ňu súčasne pôsobíme silami $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ vo vzdialenostiach $OA = r_1 = 0{,}4$ m a $OB = r_2 = 0{,}2$ m, to značí, že oba momenty majú veľkosť 1,2 N.m, ale opačný smer. Bod O rozdeľuje vzdialenosť pôsobísk A, B síl $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ v obrátenom pomere veľkostí týchto síl

$$\frac{OA}{OB} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{0{,}4\ \mathrm{m}}{0{,}2\ \mathrm{m}} = \frac{6\ \mathrm{N}}{3\ \mathrm{N}} = \frac{F_2}{F_1}$$

To značí, že vektorová priamka výslednice $\boldsymbol{F}$ síl $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ pretína os otáčania. Účinok síl $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ je rovnaký ako účinok výslednice $\boldsymbol{F}$. Výslednica síl $\boldsymbol{F}$ pôsobí v bode O a má veľkosť $F = |\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2| = F_1 + F_2 = 9$ N; na teleso nemá pohybový účinok, lebo je v rovnováhe s reakciou osi $\boldsymbol{R}$, ktorej veľkosť ukazuje tretí silomer.

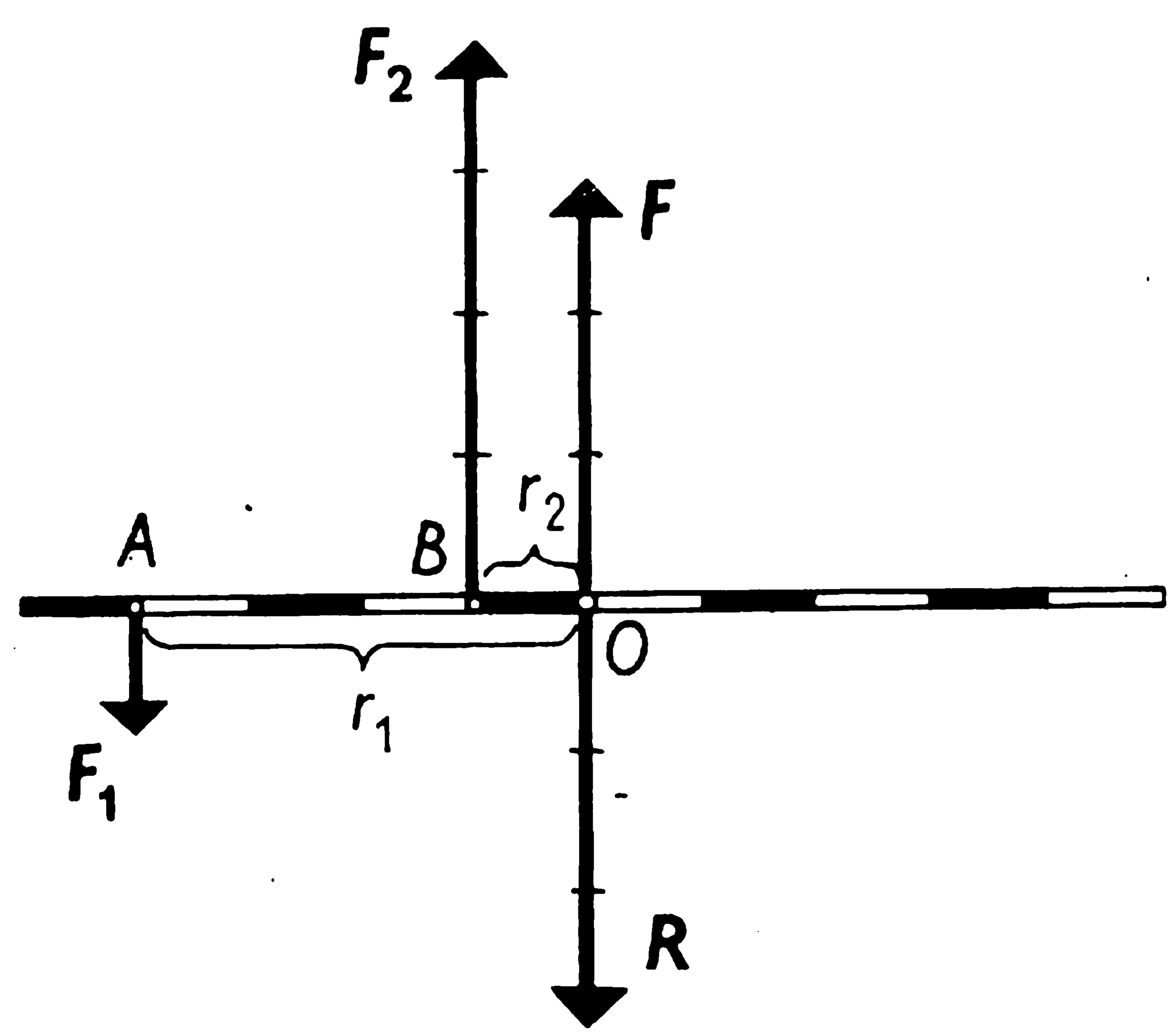
Výslednica dvoch rovnobežných síl rovnakého smeru má súhlasný smer ako zložky a jej veľkosť sa rovná súčtu veľkostí obidvoch zložiek. Pôsobisko výslednice rozdeľuje vzdialenosť pôsobísk obidvoch zložiek v obrátenom pomere veľkostí zložiek; nazýva sa stred rovnobežných síl. Stredom rovnobežných síl nazývame bod, vzhľadom na ktorý je výsledný moment týchto síl nulový.

Zostavme pokus podľa obr. 4-9. Sily s veľkosťami $F_1 = 10$ N, $F_2 = 40$ N sú rovnobežné, majú opačný smer a pôsobia na tuhé teleso súčasne v rovine kolmej na os prechádzajúcu bodom O. Pretože tieto dve sily tyč neotáčajú, musí vektorová priamka ich výslednice pretínať os otáčania a prechádzať bodom O, pričom vektorový súčet momentov síl $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ sa rovná nulovému vektoru; $\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{0}$.

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{40\ \mathrm{N}}{10\ \mathrm{N}} = \frac{4}{1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{OA}{OB}$$

Výslednica $\boldsymbol{F}$ síl $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ je sila, ktorá má na tyč rovnaký účinok ako súčasne pôsobiace sily $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$. Pretože účinok síl $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ sa ruší účinkom reakcie $\boldsymbol{R}$, určíme výslednicu $\boldsymbol{F}$ ako silu rovnako veľkú a opačnú k reakcii $\boldsymbol{R}$.

Výslednica dvoch rovnobežných rôzne veľkých síl opačného smeru má smer zhodný so smerom väčšej sily a jej veľkosť sa rovná rozdielu veľkostí

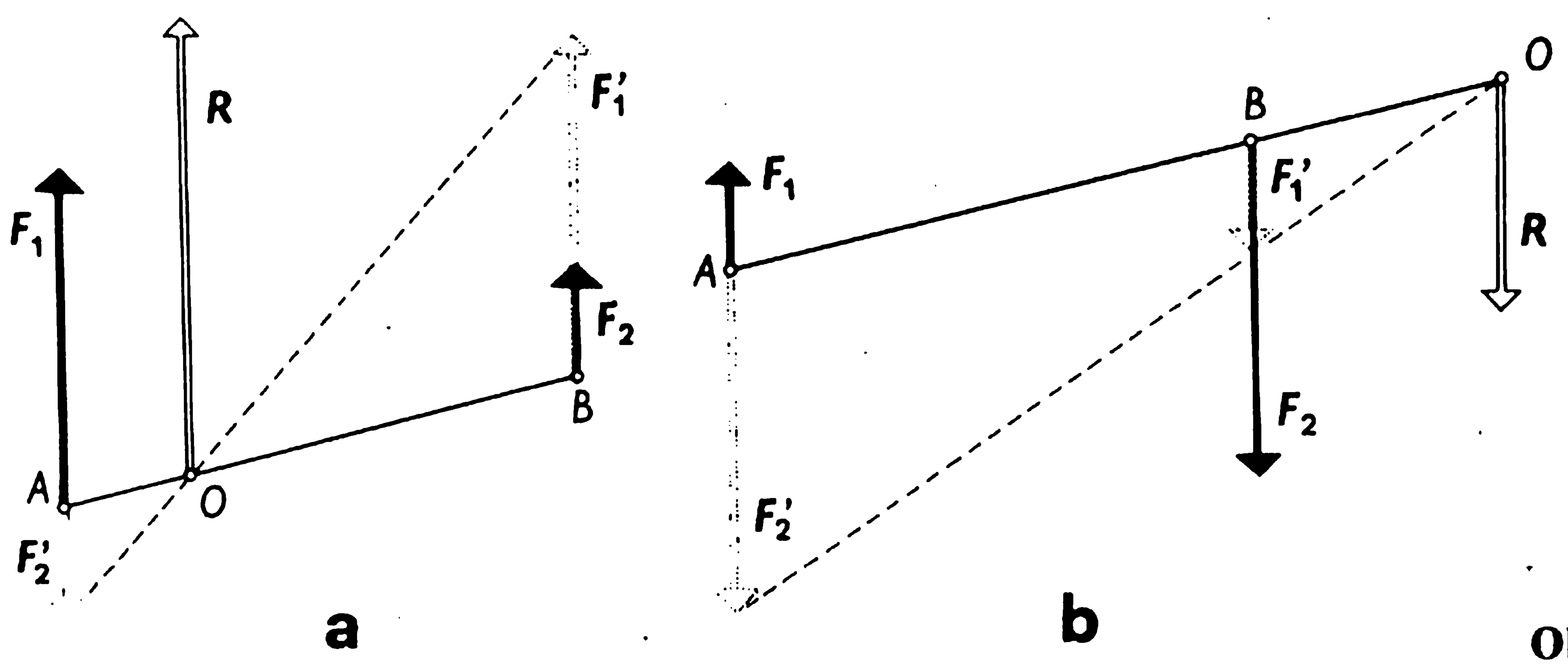


Obr. 4-9

oboch zložiek: $F = |\boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_2|$. Pôsobisko výslednice je na predĺženej spojnici oboch zložiek, bližšie k väčšej sile. Pomer vzdialenosti pôsobiska od pôsobísk zložiek sa rovná prevrátenému pomeru veľkostí zložiek. Určiť pôsobisko výslednice dvoch rovnobežných síl rovnakého alebo opačného smeru znamená riešiť rovnicu

$$F_1 r_1 = F_2 r_2$$

Pôsobisko výslednice dvoch rovnobežných síl $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ môžeme určiť aj graficky (obr. 4-10). Ak majú sily rovnaký smer (obr. 4-10a), zostrojíme pomocné vektory $\boldsymbol{F}_1'$ v pôsobisku B a $\boldsymbol{F}_2'$ v pôsobisku A. Vektor $\boldsymbol{F}_1'$ má



Obr. 4-10

rovnakú veľkosť i smer ako sila $\boldsymbol{F}_1$, vektor $\boldsymbol{F}_2'$ má rovnakú veľkosť ako $\boldsymbol{F}_2$, ale opačný smer. Podľa obr. 4-10b zostrojíme pre obidve rovnobežné sily opačného smeru pomocné vektory $\boldsymbol{F}_1'$ v pôsobisku B a $\boldsymbol{F}_2'$ v pôsobisku A. Vektor $\boldsymbol{F}_1'$ má rovnakú veľkosť ako sila $\boldsymbol{F}_1$, ale opačný smer; vektor $\boldsymbol{F}_2'$ má rovnakú veľkosť aj smer ako sila $\boldsymbol{F}_2$. Spojnica koncových bodov pomocných vektorov pretína spojnicu bodov A a B v bode O. O podobnosti trojuholníkov, ktoré takto vzniknú, platí $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{F_2'}{F_1'} = \dfrac{F_2}{F_1}$. Bod O je teda pôsobiskom výslednice síl $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$.

Úlohy

1. Výsadkár klesá s padákom k zemi rovnomerným priamočiarym pohybom. Hmotnosť výsadkára je 75 kg, hmotnosť padáka 15 kg. Aká je sila odporu vzduchu pri tomto pohybe ($g \doteq 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$)? [900 N]

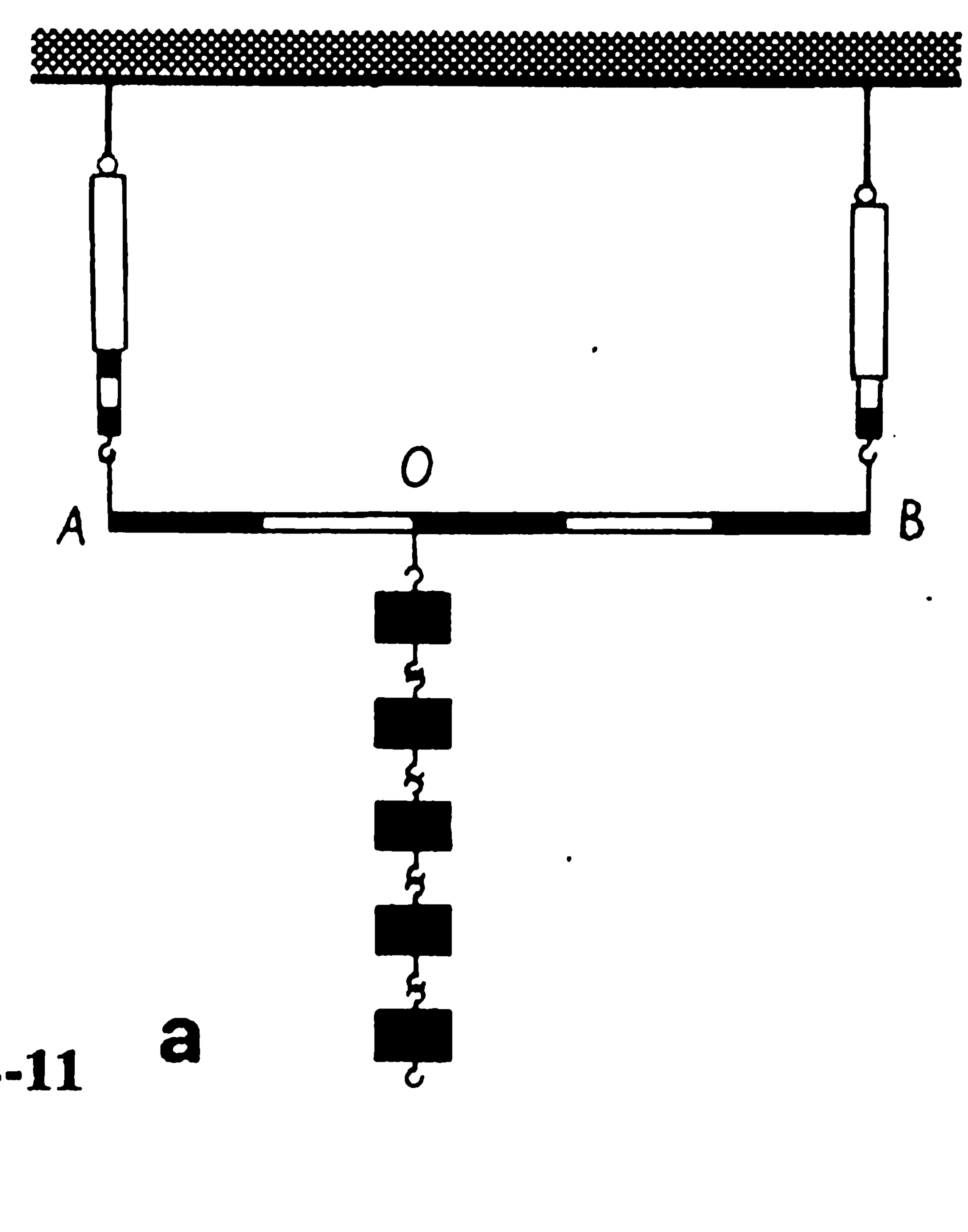
2. Robotník, ktorý má hmotnosť 80 kg, zdvíha pomocou zvislého povrazu vedeného cez kladku teleso s hmotnosťou 45 kg. Akou veľkou silou pritom pôsobí na podlahu? Aké najťažšie bremeno môže zdvihnúť, ak stojí voľne na podlahe ($g \doteq 10\,\mathrm{m.s^{-2}}$)? [350 N; 800 N]
3. Na koncoch tyče dĺžky 1,2 m pôsobia rovnobežné sily rovnakého smeru, $F_1 = 50$ N a $F_2 = 70$ N. Určte veľkosť a pôsobisko výslednice graficky aj výpočtom. [120 N; 0,5 m, 0,7 m]

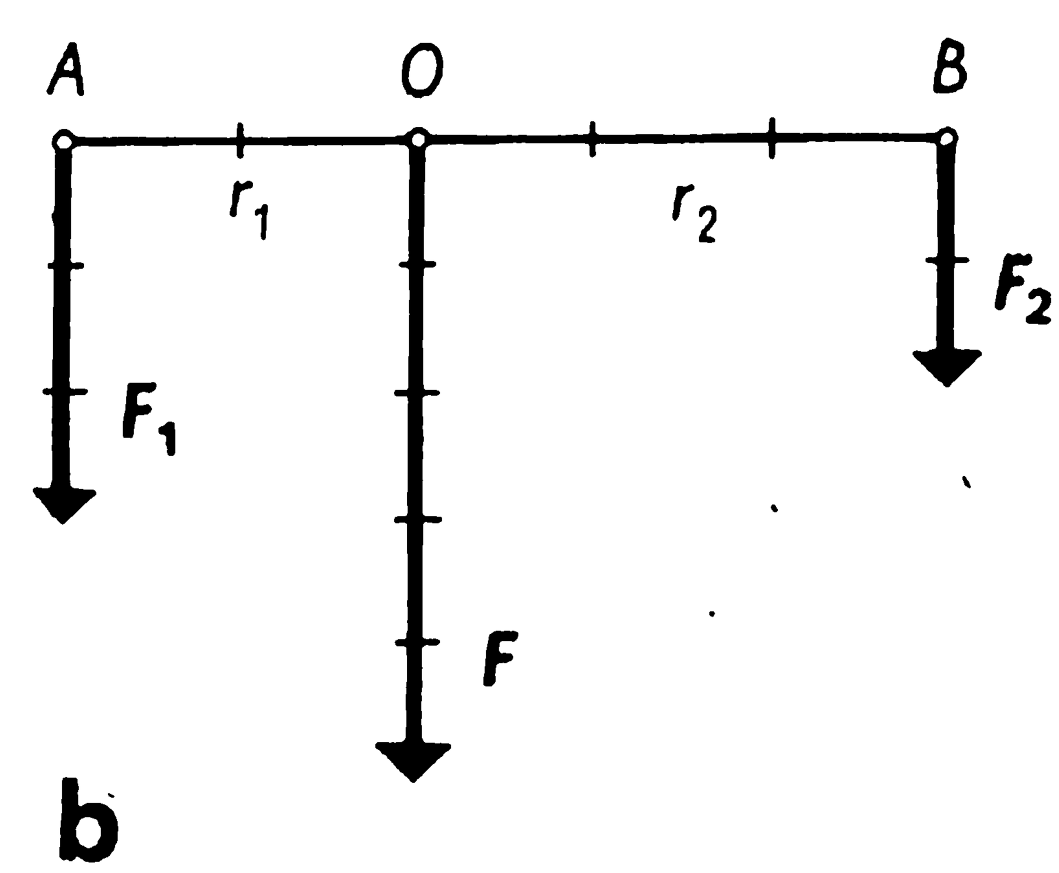
4.4 Rozkladanie sily na dve rovnobežné zložky

Rozložiť silu na zložky danej výslednice znamená nájsť dve alebo viac takých síl, ktorých výslednica sa rovná danej sile. Úloha nájsť zložky F_1 a F_2 danej výslednice F je teda opačná ako úloha, pri ktorej sme hľadali výslednicu daných zložiek.

Keď nesú dvaja ľudia teleso zavesené na tyči, ktorú každý z nich drží za jeden koniec, rozloží sa tiaž telesa na dve zložky. Zo skúsenosti vieme, že väčšia časť tiaže pôsobí na nosiča, ktorý drží tyč v menšej vzdialenosti od telesa. Ak obidvaja nosiči držia tyč v rovnakej vzdialenosti od miesta, v ktorom je teleso zavesené, pôsobí na každého z nich polovica tiaže telesa.

Tyč zavesíme v koncových bodoch A, B na silomery a zaťažíme závažím podľa obr. 4-11. Tiaž tyče zanedbáme. Závažie upevňujeme na tyč





Obr. 4-11

postupne v rozličných bodoch. Zistíme, že pomer vzdialeností bodu O od koncových bodov A, B sa rovná prevrátenému pomeru veľkostí príslušných zložiek F_1 a F_2, ktoré nameriame silomermi. Vypočítať veľkosť dvoch rovnobežných zložiek rovnakého smeru znamená riešiť sústavu rovníc

$$F_1 r_1 = F_2 r_2, \quad F = F_1 + F_2$$

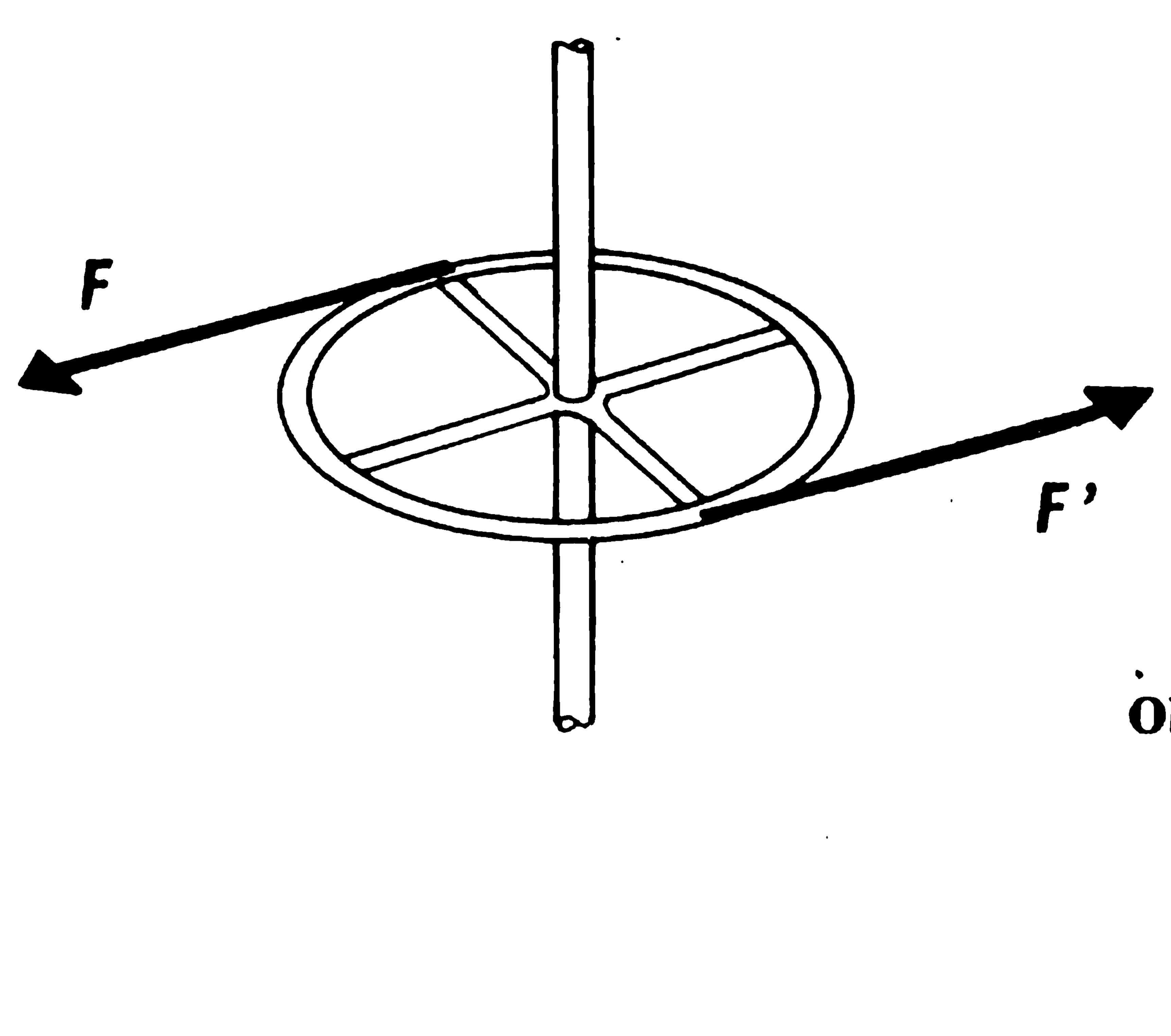
Taký istý záver dostaneme výpočtom pomocou momentovej vety, podľa ktorej sa veľkosti momentov obidvoch síl vzhľadom na pôsobisko výslednice (bod O) musia rovnať.

Úlohy

1. Na teleso položené na naklonenej rovine pôsobí sila $F_G = 200$ N. Akú veľkosť majú zložky tiažovej sily (rovnobežná a kolmá na naklonenú rovinu), ak naklonená rovina zviera s vodorovnou rovinou uhol 30°? Pri akom uhle sklonu naklonenej roviny budú veľkosti zložiek rovnaké? [100 N; 173,2 N; 45°]
2. Dvaja ľudia nesú teleso s hmotnosťou 90 kg zavesené na vodorovnej tyči. Vzdialenosti bodov, v ktorých je tyč podopretá ramenami nosičov, od pôsobiska tiaže telesa sú 0,8 m a 1,0 m. Aké veľké sily pôsobia na ramená nosičov ($g \doteq 10$ m.s^{-2})? [500 N; 400 N]
3. Nosník dĺžky 5 m je na koncoch podopretý. Kam treba umiestiť teleso s hmotnosťou 12 t, aby na pravú podperu pôsobilo silou 25 kN ($g \doteq 10$ m.s^{-2})? [3,96 m od pravej podpery]

4.5 Dvojica síl

Dve rovnako veľké rovnobežné sily opačného smeru, ktoré neležia v jednej priamke, nazývame **dvojica síl** (obr. 4-12). Výslednica týchto síl je nulová; účinok dvojice síl na tuhé teleso nemôžeme nahradiť účinkom



Obr. 4-12

jednej sily. Teleso upevnené v osi sa pôsobením dvojice síl otáča vždy okolo tejto osi. Otáčavý účinok dvojice síl je určený vektorovým súčtom momentov síl. Budeme uvažovať o týchto prípadoch:

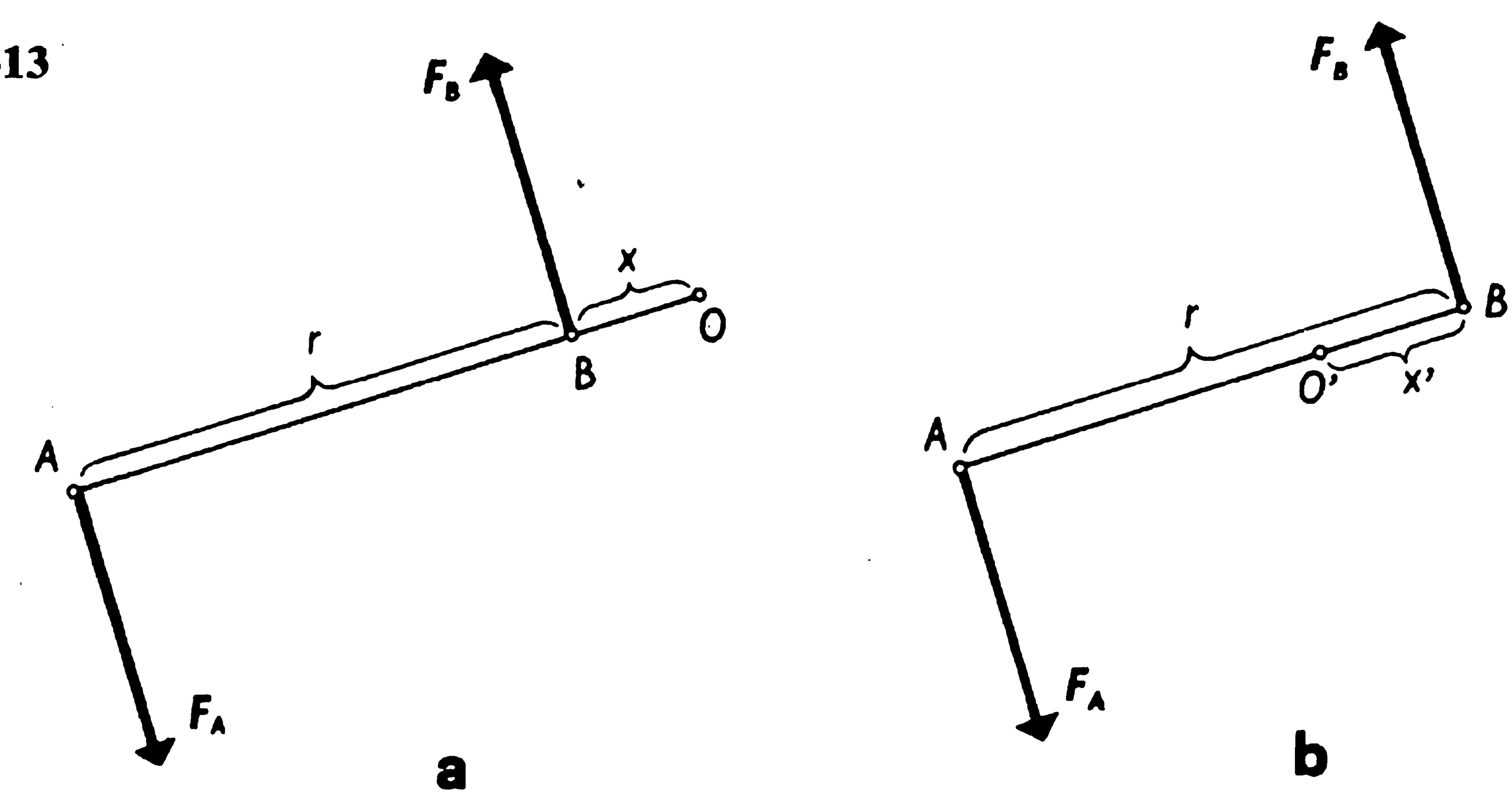
a) Os otáčania je mimo pásu vymedzeného vektorovými priamkami síl $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{F}_B$ (obr. 4-13a). Veľkosti momentov M_A a M_B síl $\boldsymbol{F}_A$ a $\boldsymbol{F}_B$ sú podľa obr. 4.13a $M_A = F_A(r + x)$ a $M_B = F_B x$; pre veľkosť výsledného momentu dvojice síl s ohľadom na opačný zmysel otáčania dostaneme

$$M = F_A(r + x) - F_B x \qquad M = F\,r + F\,x - F\,x$$
$$F_A = F_B = F \qquad M = F\,r$$

b) Os otáčania je medzi vektorovými priamkami síl $\boldsymbol{F}_A$ a $\boldsymbol{F}_B$. Veľkosti momentov M_A a M_B síl $\boldsymbol{F}_A$ a $\boldsymbol{F}_B$ sú podľa obr. 4-13b $M_A = F_A(r - x')$ a $M_B = F_B x'$. Pre veľkosť výsledného momentu dvojice síl s ohľadom na súhlasný zmysel otáčania dostaneme

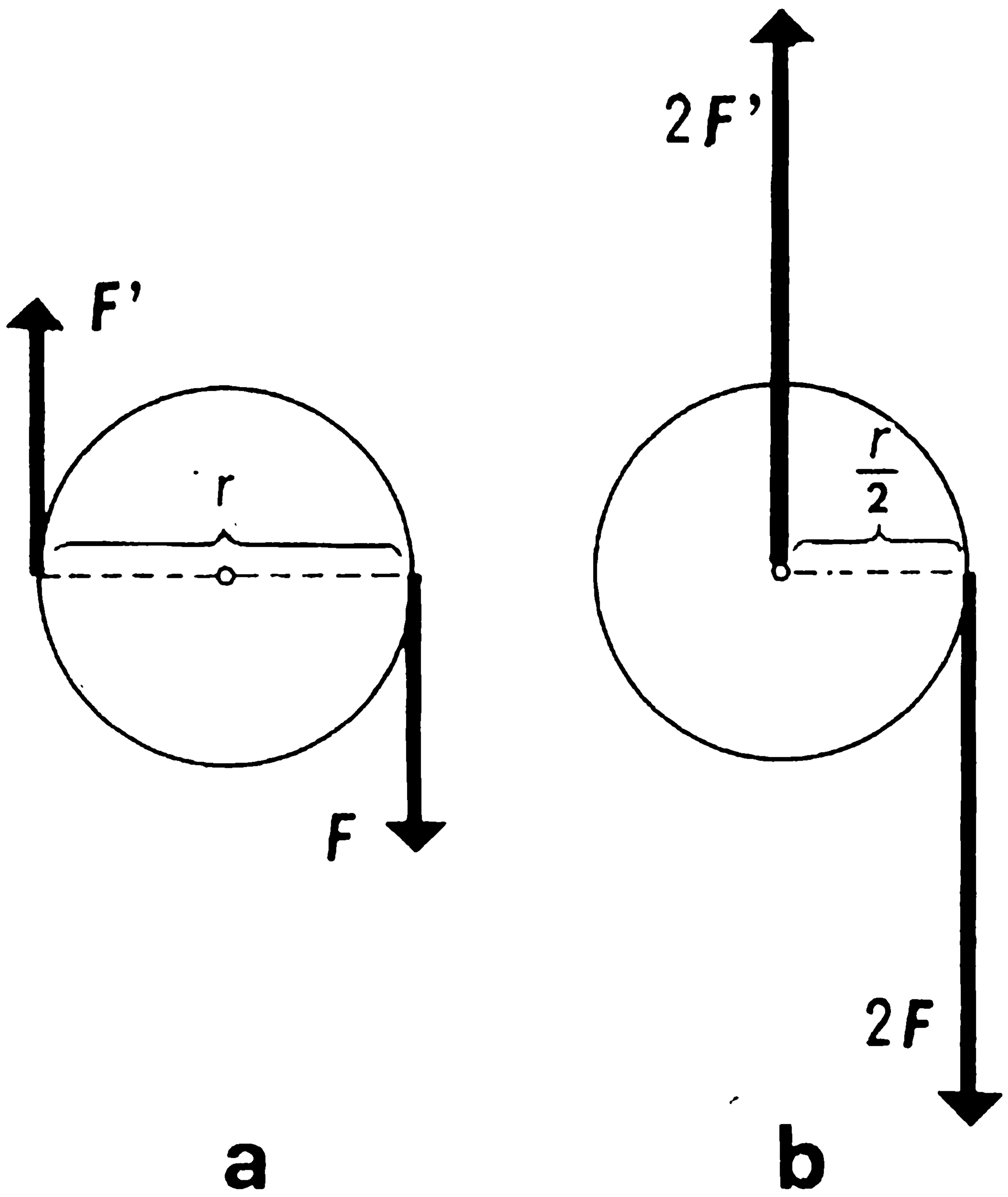
$$M = F_A(r - x') + F_B x' = F(r - x') + F\,x'$$
$$M = F\,r - F\,x' + F\,x'$$
$$M = F\,r$$

Obr. 4-13

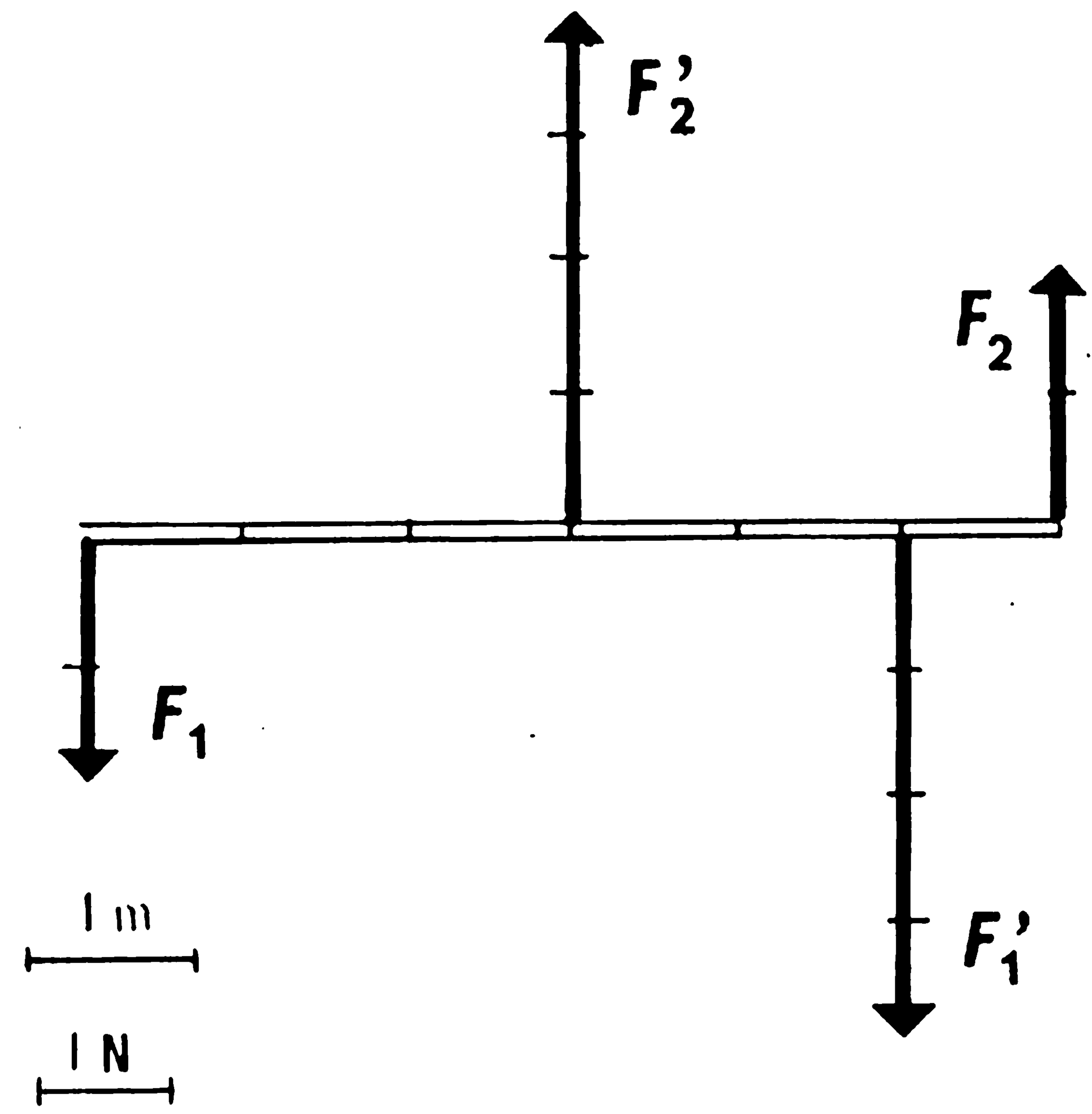


Tieto výsledky môžeme zovšeobecniť:

Veľkosť momentu dvojice síl sa vždy rovná súčinu veľkosti jednej sily dvojice a ramena dvojice *r*. Ramenom dvojice nazývame kolmú vzdialenosť vektorových priamok síl dvojice.



Obr. 4-14



Obr. 4-15

Veľkosť momentu dvojice síl zostáva vzhľadom na ľubovoľnú os otáčania kolmú na rovinu určenú silami $\boldsymbol{F}_A$ a $\boldsymbol{F}_B$ stále rovnaká. Dvojica síl, ktorá pôsobí na tuhé teleso, spôsobuje len otáčavý pohyb telesa. Napríklad vodič automobilu uvedie do otáčavého pohybu volant, keď naň pôsobí oboma rukami dvojicou síl (obr. 4-14a); v tomto prípade je veľkosť momentu dvojice síl $F\,r$. Ak vodič otáča volant jednou rukou, pôsobí ruka s volantom silou na os. Reakciou na túto silu je sila, ktorou pôsobí os na volant. Obe sily tvoria dvojicu síl. Ak má byť účinok dvojice síl v obidvoch prípadoch rovnaký, musí v druhom prípade (obr. 4-14b), keď je rameno polovičné, pôsobiť vodič jednou rukou dvakrát väčšou silou ako v prvom prípade, $M = 2\,F\,\frac{r}{2} = F\,r$.

Úloha

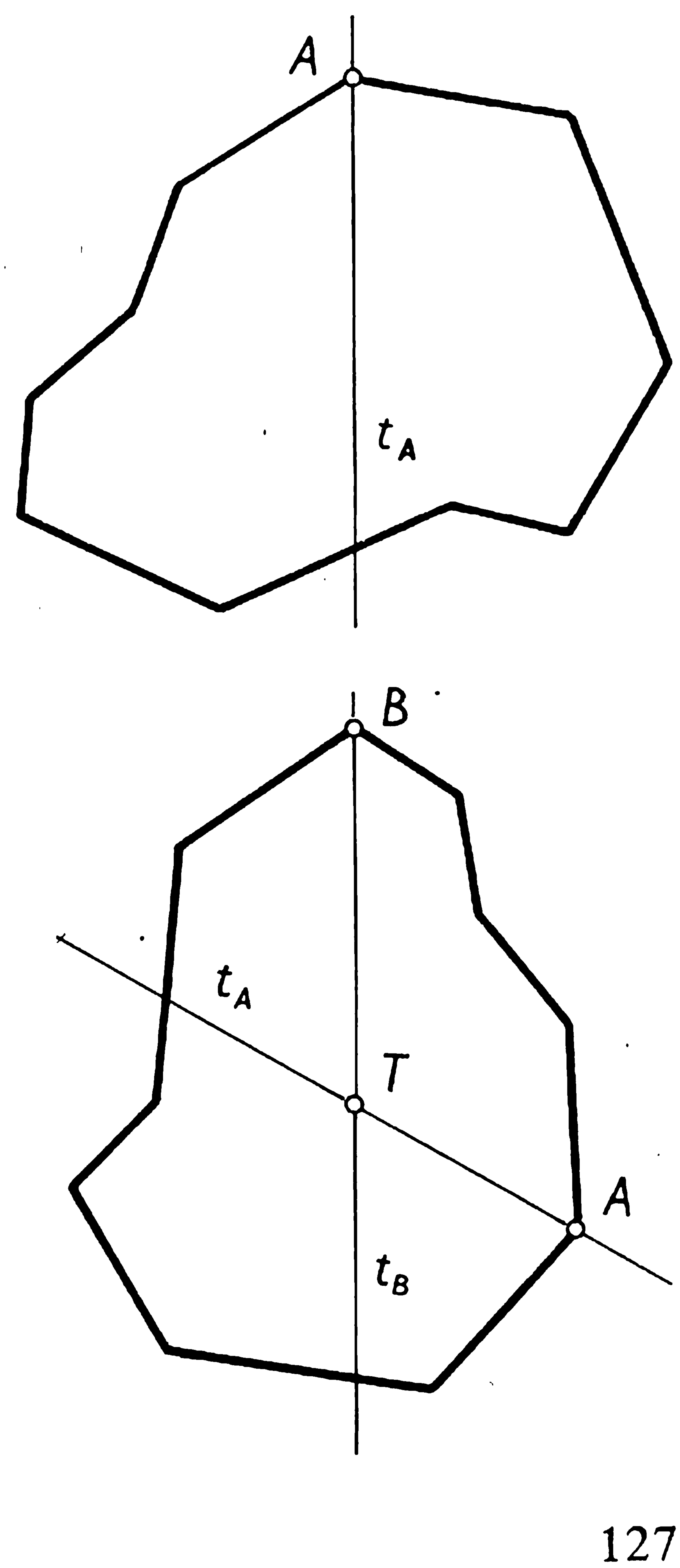
Na tyč pôsobia dve dvojice síl podľa obr. 4-15. Zistite, aký pohybový účinok majú tieto sily na tyč. [4 N.m v kladnom zmysle]

4.6 Ťažisko telesa

Tuhé teleso sa skladá z veľkého počtu hmotných častíc, ktorých vzájomná poloha v telese sa nemení. Tiažové sily pôsobiace na jednotlivé častice telesa sú v každej polohe telesa navzájom súhlasne rovnobežné. Zložením týchto jednotlivých rovnobežných tiažových síl dostaneme výslednicu — celkovú tiažovú silu, ktorá má pôsobisko v istom bode telesa. Poloha tohto bodu závisí len od rozloženia častíc v telese. Tento bod nazývame **ťažisko telesa** (obr. 4-16). Je stredom tiažových síl, ktoré pôsobia na častice tuhého telesa.

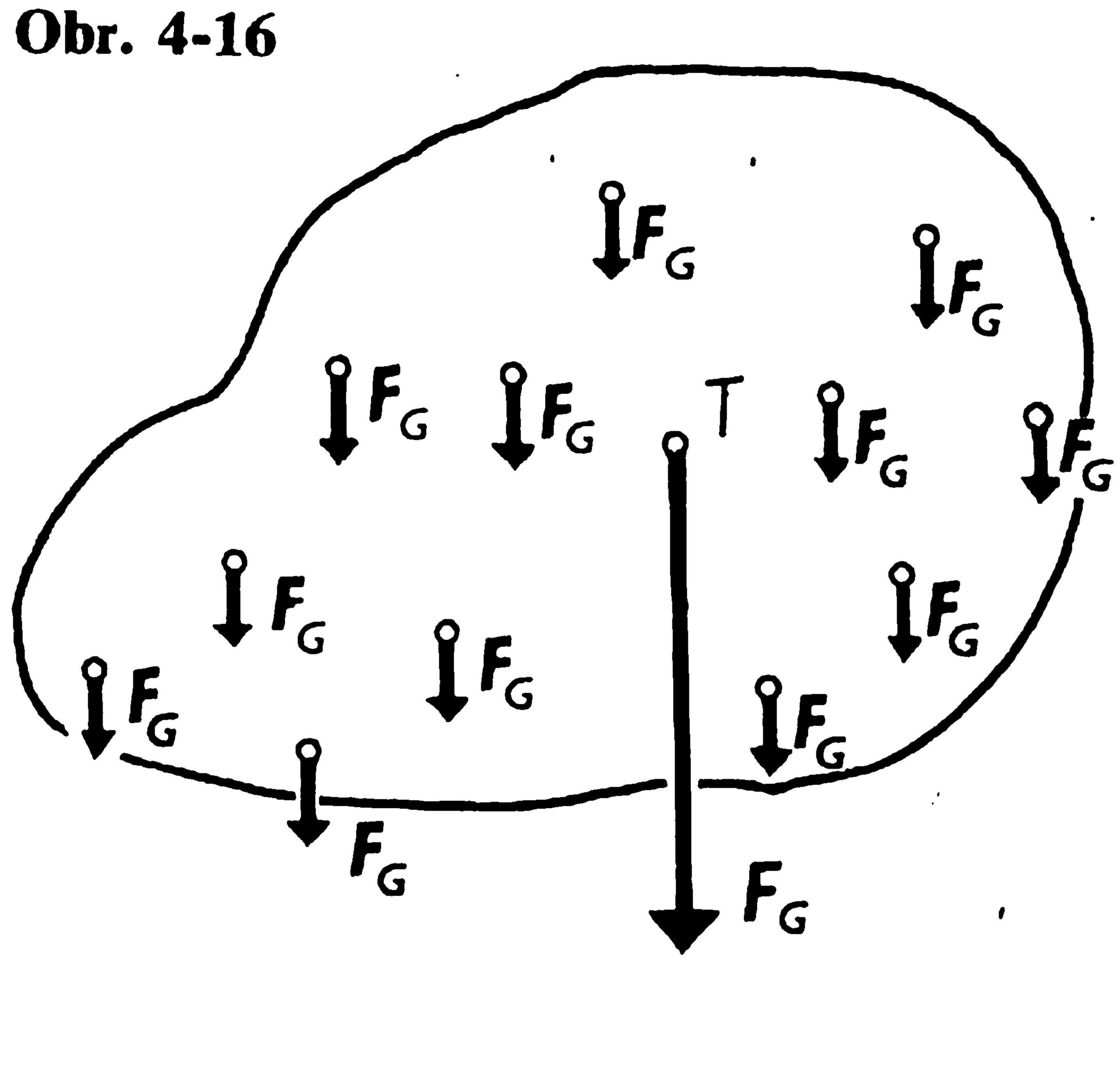
Ťažisko telesa je pôsobisko tiažovej sily, ktorá pôsobí na teleso.

Zo základnej školy viete, že ťažisko môžeme určiť ako priesečník T ťažníc telesa (obr. 4-17).



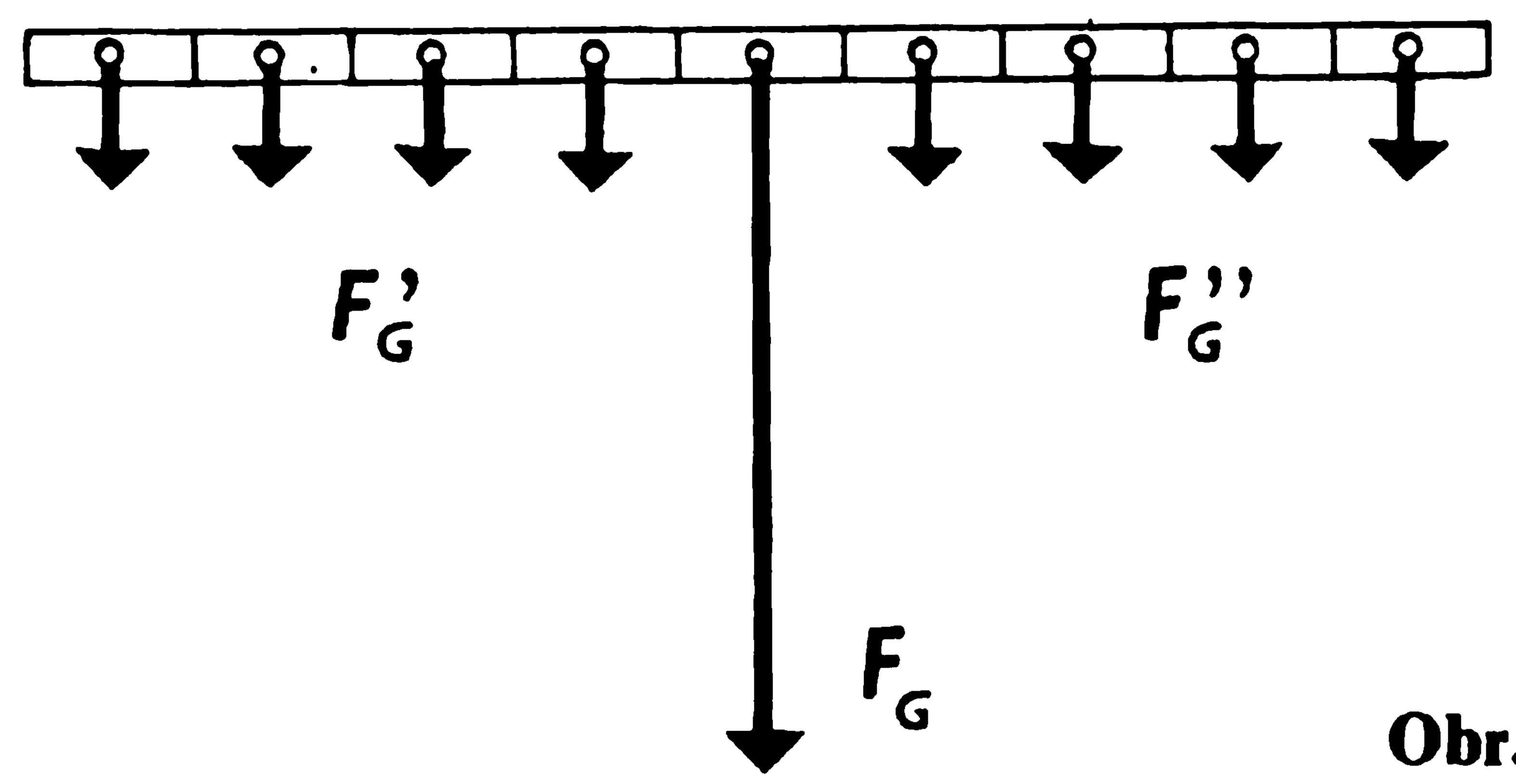
Obr. 4-17

Obr. 4-16



Ťažisko rovnorodých pravidelných telies, ktoré majú geometrický stred súmernosti (napr. guľa, kváder, valec, kruhová obruč), je v strede súmernosti týchto telies. Potvrdzuje to aj nasledujúca úvaha:

Keď rozdelíme valcovú tyč z rovnorodého materiálu priečnymi rezmi na veľmi malé časti s rovnakým objemom tak, že ku každej z nich existuje časť súmerná podľa stredu tyče (obr. 4-18), potom tiažové sily $\boldsymbol{F}'_G$ a $\boldsymbol{F}''_G$ každej takejto dvojice majú výslednicu s pôsobiskom v strede tyče. Výslednica všetkých týchto síl sa rovná celkovej tiažovej sile $\boldsymbol{F}_G$ a má pôsobisko v strede tyče.



Obr. 4-18

Rovnorodé telesá, ktoré majú os súmernosti (napr. pravidelné rotačné telesá, pravidelný štvorboký hranol), majú ťažisko na tejto osi. Rovnorodé tuhé telesá, ktoré majú rovinu súmernosti, majú ťažisko v tejto rovine. Pri týchto telesách môžeme určiť polohu ťažiska výpočtom alebo graficky. Ťažisko nerovnorodých alebo geometricky nepravidelných telies určujeme zvyčajne pokusne.

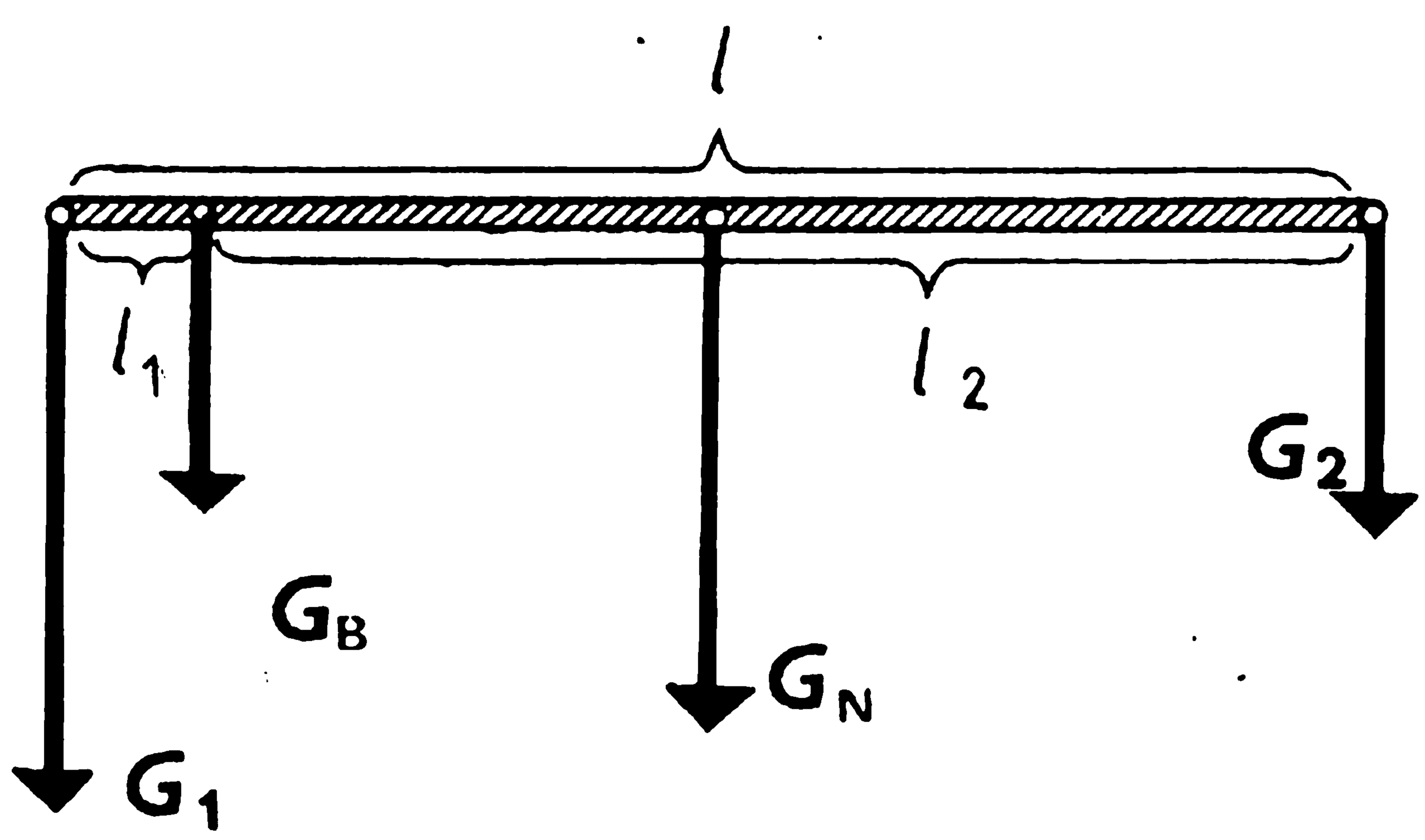
Ťažisko niektorých telies, napr. dutej gule, prstenca, nádob môže ležať aj mimo látky telesa.

Príklad

Na nosník, ktorý má dĺžku $l = 3$ m a tiaž $G_N = 400$ N, treba umiestiť teleso s tiažou $G_B = 300$ N tak, aby zaťažený nosník, podopretý na obidvoch koncoch, pôsobil na jednu podperu dvojnásobnou silou ako na druhú (obr. 4-19). V akej vzdialenosti l_1 od konca nosníka treba teleso upevniť?

Riešenie

$G_N = 400$ N, $G_B = 300$ N, $l = 3$ m, $l_1 = ?$



Obr. 4-19

Tiaž telesa a tiaž nosníka sa rozložia tak, že na koncoch nosníka budú pôsobiť sily

$$G_1 = \frac{G_N}{2} + G_{B1} \quad \text{a} \quad G_2 = \frac{G_N}{2} + G_{B2}$$

Z podmienky úlohy určíme najprv zložky tiaže telesa
$G_1 = 2\,G_2$, súčasne platí $G_B = G_{B1} + G_{B2}$

$$\frac{G_N}{2} + G_{B1} = 2\,\frac{G_N}{2} + 2\,G_{B2}$$

$$G_{B1} = \frac{1}{6}\,G_N + \frac{2}{3}\,G_B$$

$$G_{B2} = G_B - G_{B1} = \frac{1}{3}\,G_B - \frac{1}{6}\,G_N$$

Pre rozklad tiaže telesa G_B na nosníku platí

$$G_{B1}\,l_1 = G_{B2}\,l_2$$

$$G_{B1}\,l_1 = G_{B2}(l - l_1)$$

$$l_1 = \frac{l\,G_{B2}}{G_{B1} + G_{B2}} = \frac{l\left(\frac{1}{3}\,G_B - \frac{1}{6}\,G_N\right)}{G_B}$$

$$l_1 = \frac{1}{3}\ \text{m}$$

Teleso treba umiestiť do vzdialenosti $\frac{1}{3}$ m od konca nosníka.

Úloha

Na konci valcovej tyče dĺžky 0,8 m je pripojená guľa s polomerom 0,1 m tak, že jej stred leží na pozdĺžnej osi tyče. Obidve telesá sú z rovnakého rovnorodého materiálu. Guľa je dvakrát ťažšia ako tyč. Určte graficky aj výpočtom polohu ťažiska tejto sústavy telies. [0,17 m od stredu gule]

4.7 Rovnovážna poloha tuhého telesa

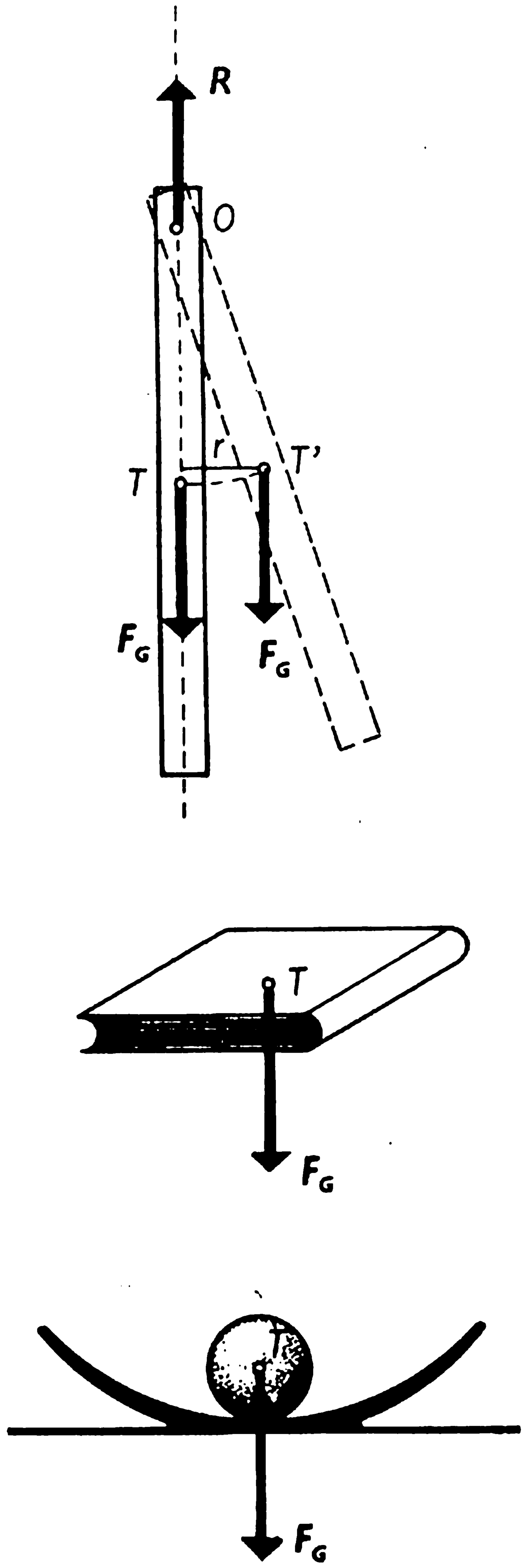
Tuhé teleso otáčavé okolo osi je v rovnovážnej polohe, ak vektorové súčty všetkých síl a všetkých momentov síl, ktoré na teleso pôsobia, sú nulové vektory a teleso je v pokoji.

Podľa vzájomnej polohy ťažiska telesa a vodorovnej osi, okolo ktorej sa teleso môže otáčať, rozlišujeme tri druhy rovnovážnych polôh.

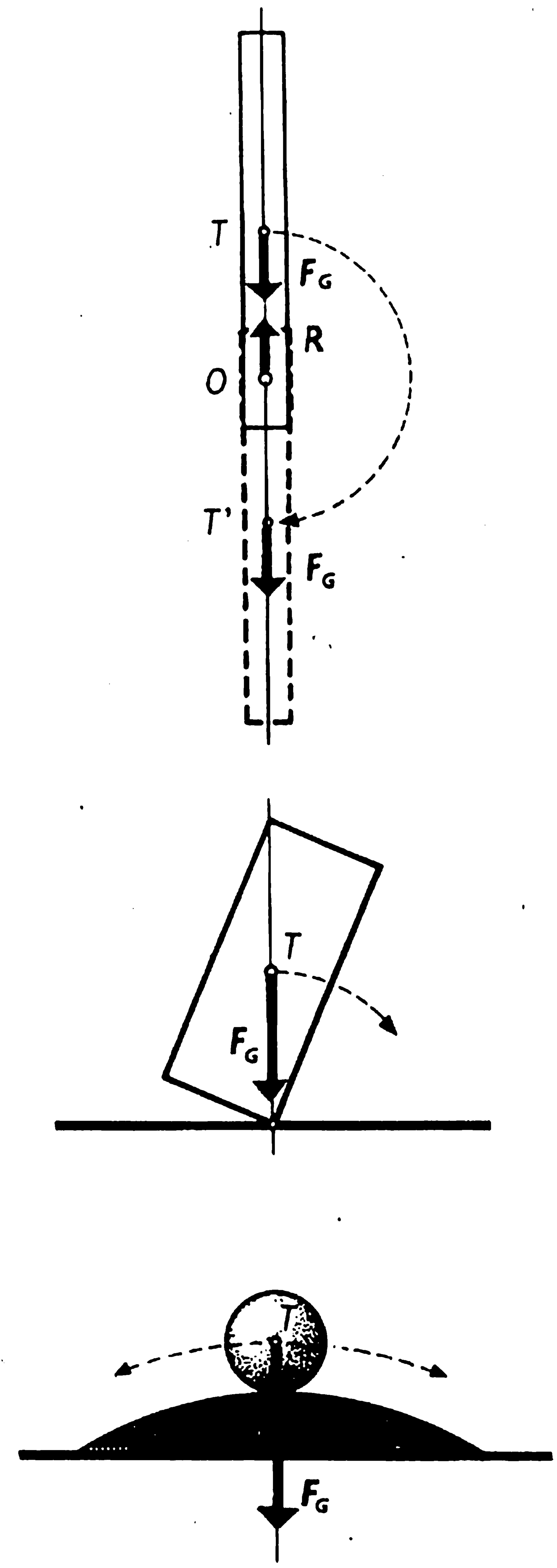
Pravítko otáčavé okolo osi O nad ťažiskom, kniha položená na stole, guľa v guľatej miske (obr. 4-20) sú v rovnovážnych polohách, ak ich ťažiská zaujímajú najnižšiu možnú polohu. Po vychýlení telesa z rovnovážnej polohy pôsobí na teleso moment tiažovej sily vzhľadom na os, $M = F_G r$, ktorý teleso vracia späť do rovnovážnej polohy. Takúto rovnovážnu polohu nazývame **stála (stabilná) poloha.** Pri vychýlení telesa z rovnovážnej polohy stálej ťažisko vzhľadom na povrch Zeme stúpa a tým sa zväčšuje potenciálna energia tiažová telesa. Pri vychýlení telesa z rovnovážnej polohy stálej sa musí vykonať práca pôsobením vonkajšej sily. Teleso v rovnovážnej polohe stálej má ťažisko v najnižšej polohe, preto má v tejto polohe najmenšiu potenciálnu energiu.

Rovnovážnu **polohu voľnú (indiferentnú)** majú telesá, ktoré po vychýlení zostávajú v rovnovážnej polohe; ich ťažisko zostáva po vychýlení v pôvodnej výške. V rovnovážnej polohe voľnej je napr. pravítko na obr. 4-21 na s. 132 upevnené v osi, ktorá prechádza ťažiskom, alebo guľa na vodorovnej podložke. Potenciálna energia tiažová telies, ktoré vychýlime z tejto rovnovážnej polohy, sa nemení.

Teleso môžeme umiestiť do takej rovnovážnej polohy, že ťažisko leží nad osou a zvislá ťažnica pretína os otáčania. V takej polohe je napr. pravítko na obr. 4-22 alebo guľa v najvyššom bode vypuklej plochy. Už pri nepatrnom otočení telesa ťažisko klesá a moment tiažovej sily pôsobí na teleso, až kým toto nezaujme rovnovážnu polohu stálu. Táto rovnovážna poloha sa nazýva **poloha vratká (labilná).**

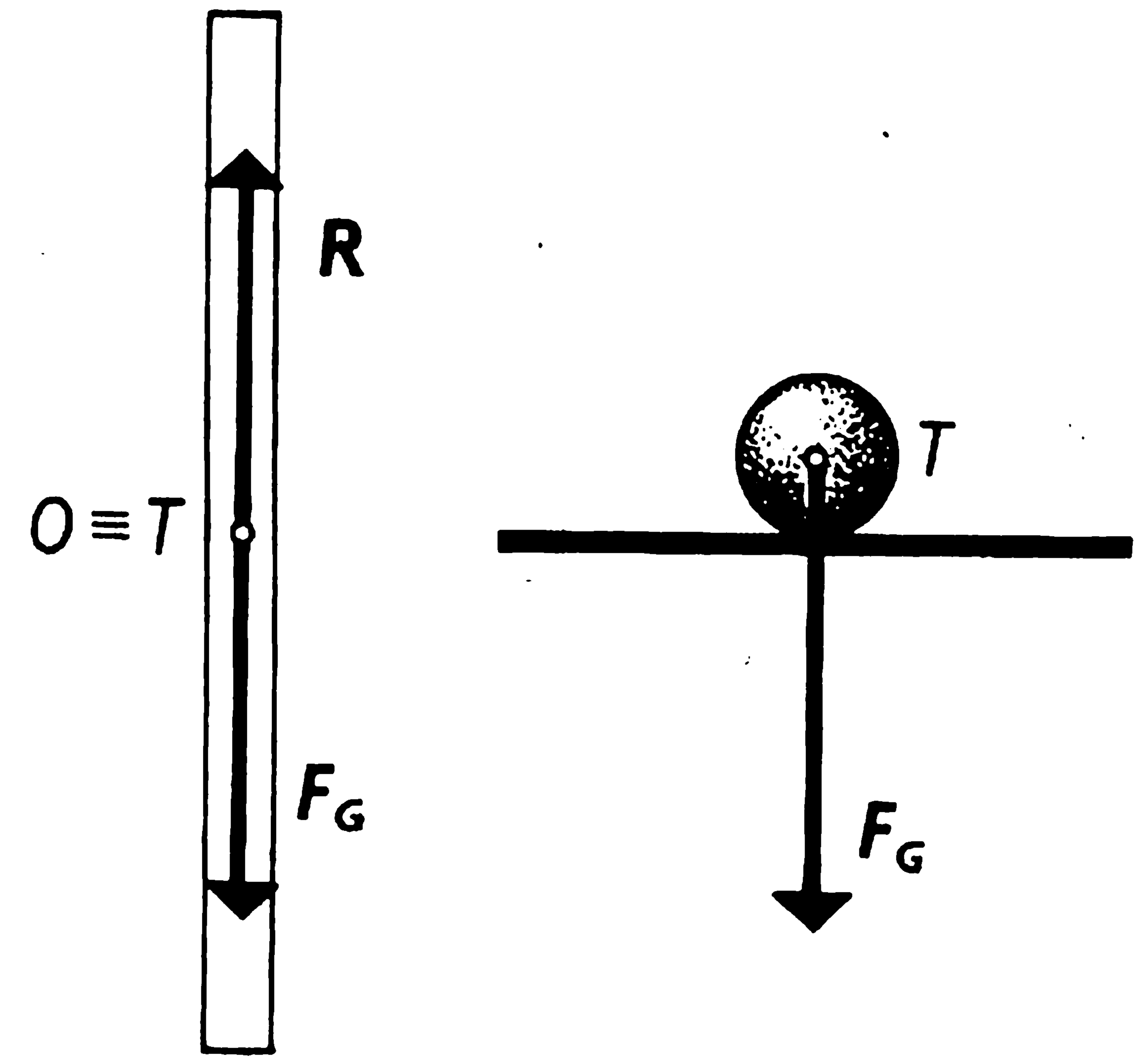


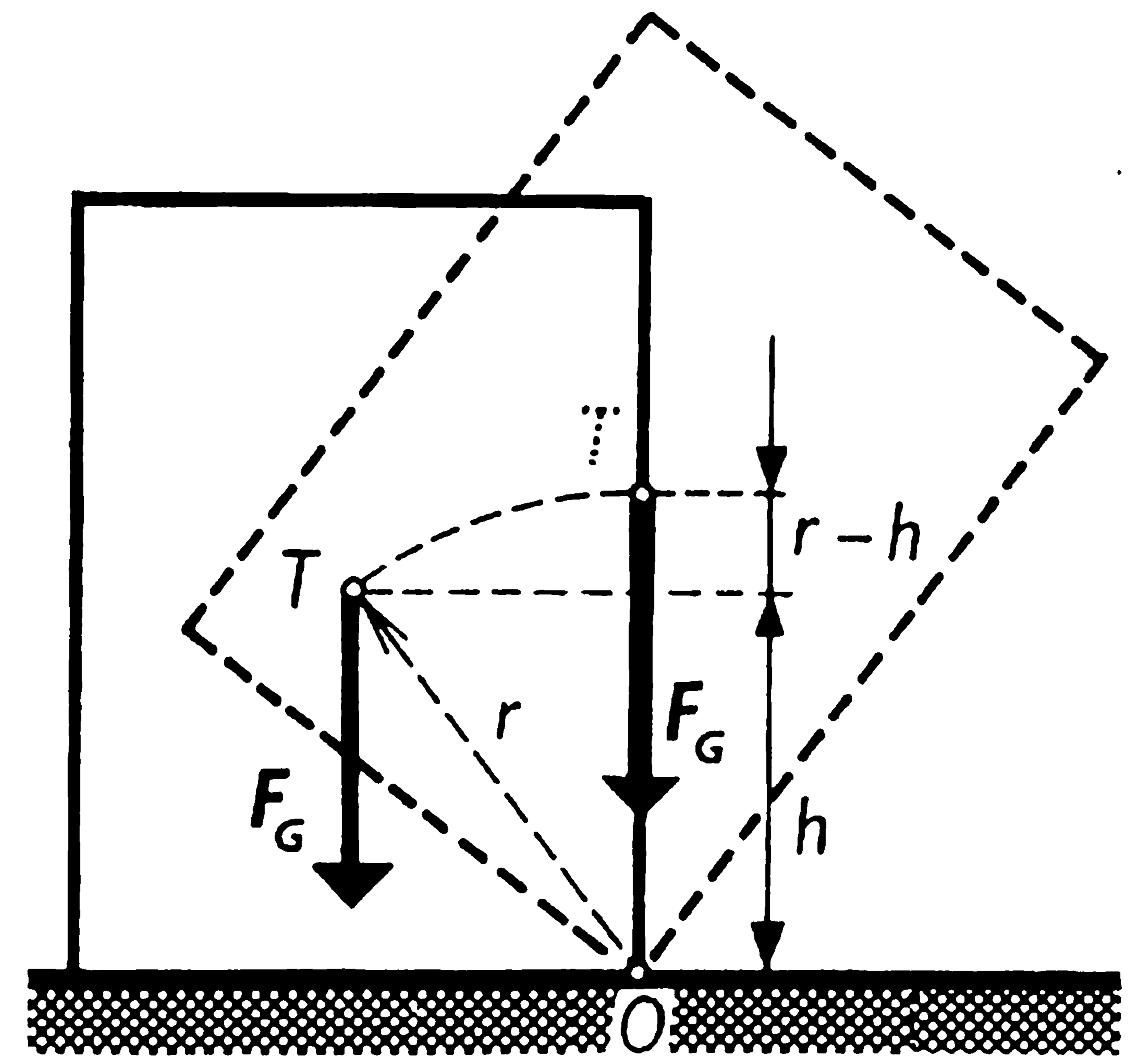
Obr. 4-20



Obr. 4-22

Teleso podopreté v ploche alebo aspoň v troch bodoch, ktoré neležia na jednej priamke, je v rovnovážnej polohe stálej, keď zvislá ťažnica pretína plochu podstavy telesa alebo plochu rovinného útvaru určeného opornými bodmi telesa. Pri otáčaní telesa okolo hrany podstavy ťažisko stúpa. V najvyššej polohe vzhľadom na Zem zvislá ťažnica pretína hranu podstavy, okolo ktorej teleso prevraciame; teleso sa dostane do rovnovážnej polohy vratkej.





Obr. 4-21 Obr. 4-23

Stálosť rovnovážnej polohy podopretého telesa **(stabilita telesa)** sa meria veľkosťou práce, ktorú musíme vykonať, aby sme teleso prevrátili z rovnovážnej polohy stálej do rovnovážnej polohy vratkej (obr. 4-23). Ťažisko pritom vystúpi o výšku $r - h$, kde r je vzdialenosť od hrany, okolo ktorej teleso preklápame, h je pôvodná výška ťažiska nad rovinou podstavy v rovnovážnej polohe stálej. Na zdvihnutie ťažiska telesa o $r - h$, teda na zmenu stálej polohy telesa na vratkú, treba vykonať prácu

$$\boxed{W = F_G(r - h)}$$

Stabilita telesa je tým väčšia, čím väčšiu prácu treba vykonať na preklopenie telesa do vratkej polohy, teda čím väčšia je tiažová sila, čím nižšie je ťažisko v rovnovážnej polohe stálej a čím väčšia je vzdialenosť zvislej ťažnice od hrany, okolo ktorej teleso preklápame. Veľkú stabilitu majú ťažké telesá s veľkou podstavou; napr. závodné automobily majú široký rozchod kolies a ťažisko nízko nad vozovkou. Vysoké stožiare majú malú stabilitu, ktorú môžeme zväčšiť kotviacimi lanami.

Úlohy

1. V ktorej rovnovážnej polohe je vahadlo rovnoramenných váh? Kde leží ťažisko vahadla vzhľadom na brit?
2. Ako treba ukladať rôznorodý materiál na plošinu nákladného automobilu, aby stabilita automobilu bola čo najväčšia?
3. Tehla môže byť položená na troch rôznych plochách. V ktorej polohe má tehla najväčšiu stabilitu? Vypočítajte prácu, ktorú treba vykonať na prevrátenie tehly z rovnovážnej polohy stálej do rovnovážnej polohy vratkej, ak rozmery tehly sú približne 30 cm, 15 cm a 6 cm a jej hmotnosť je 5 kg ($g \doteq 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$). [6,1 J]

4.8 Rovnomerný otáčavý pohyb telesa okolo nehybnej osi

Keď teleso koná rovnomerný otáčavý pohyb okolo nehybnej osi, pohybujú sa všetky jeho body rovnomerne po kružniciach, ktorých roviny sú kolmé na os otáčania a ich stredy ležia na osi otáčania.

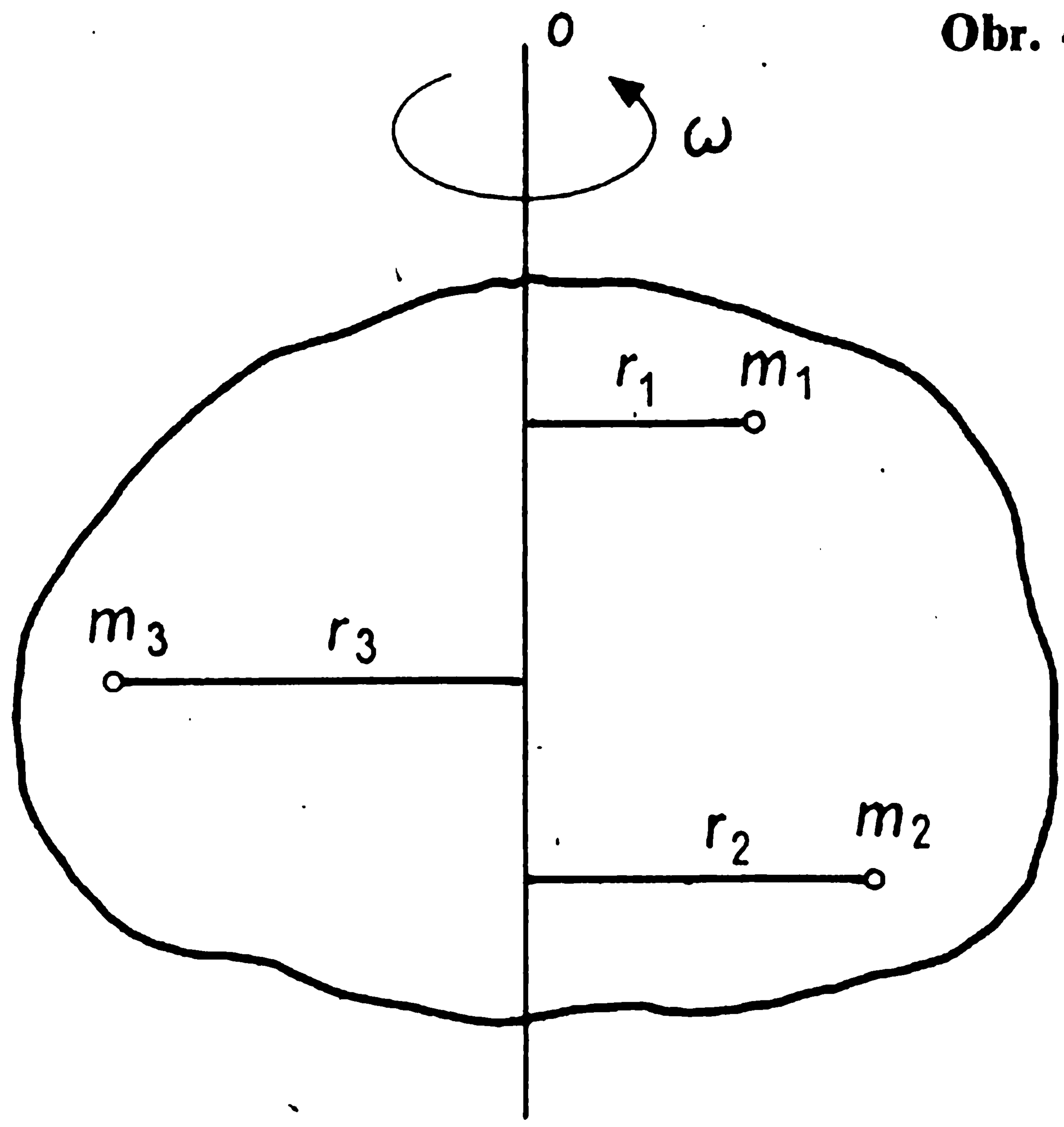
Otáčavý pohyb tuhého telesa podobne ako rovnomerný pohyb hmotného bodu po kružnici môžeme charakterizovať uhlovou rýchlosťou ω, ktorá je pre všetky body telesa rovnaká.

Uvažujme o rovnomernom otáčavom pohybe tuhého telesa okolo voľnej osi, napr. o pohybe kolesa idúceho automobilu alebo rotora elektromotora.

Keď sa tuhé teleso rovnomerne otáča uhlovou rýchlosťou ω, pohybujú sa aj jeho jednotlivé častice, ktoré považujeme za hmotné body (obr. 4-24), uhlovou rýchlosťou ω. Pre veľkosť rýchlostí častíc platí $v_i = r_i \omega$, kde v_i je veľkosť rýchlosti i-tej častice a r_i vzdialenosť i-tej častice od osi otáčania (t. j. polomer kružnice, ktorá je jej trajektóriou).

Kinetická energia i-tej častice je $E_{ki} = \dfrac{m_i v_i^2}{2} = m_i r_i^2 \dfrac{\omega^2}{2}$. Veličina $m_i r_i^2 = J_i$ sa nazýva **moment zotrvačnosti** i-tej častice vzhľadom na os otáčania. Kinetickú energiu i-tej častice môžeme vyjadriť pomocou momentu zotrvačnosti častice vzťahom

$$E_{ki} = \frac{J_i \omega^2}{2}$$



Obr. 4-24

Kinetická energia telesa, ktoré koná rovnomerný otáčavý pohyb okolo nehybnej osi, je určená súčtom kinetických energií jeho častíc

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + \ldots + E_{kn}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \frac{\omega^2}{2} + \ldots + \frac{1}{2} m_n r_n^2 \frac{\omega^2}{2}$$

$$E_k = \frac{J_1 \omega^2}{2} + \frac{J_2 \omega^2}{2} + \ldots + \frac{J_n \omega^2}{2}$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} J \omega^2}$$

kde $J = J_1 + J_2 + \ldots + J_n$ sa nazýva **moment zotrvačnosti telesa** vzhľadom na os otáčania. Rovná sa súčtu momentov zotrvačnosti všetkých jeho častíc

$$\boxed{J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots + m_n r_n^2}$$

Jednotkou momentu zotrvačnosti je kilogram krát meter na druhú, $[J] = kg.m^2$.

Výpočet momentu zotrvačnosti nie je matematicky jednoduchý ani pri telesách, ktoré majú jednoduchý tvar a sú rovnorodé. Moment zotrvačnosti tenkého rovnorodého kruhového kotúča, ktorého os otáčania prechádza stredom kolmo na rovinu kotúča, môžeme vypočítať podľa vzorca $J = \frac{m\,r^2}{2}$, kde m je hmotnosť kotúča a r polomer kotúča. Moment zotrvačnosti rovnorodej gule s hmotnosťou m a polomerom r vzhľadom na os prechádzajúcu stredom gule je $J = \frac{2}{5}\,m\,r^2$.

Moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os závisí od hmotnosti telesa a od rozloženia látky v telese vzhľadom na os otáčania. Ak chceme dosiahnuť, aby teleso malo veľký moment zotrvačnosti, umiesťujeme najviac látky v jeho okrajových častiach, súmerne vzhľadom na os otáčania; takéto telesá nazývame zotrvačníky.

Úlohy

1. Dve duté gule, železná a olovená s rovnakou hmotnosťou a polomerom, sú natreté rovnakou farbou. Akým mechanickým spôsobom (bez porušenia náteru) sa dá určiť, ktorá je železná a ktorá olovená?
2. Aký význam majú zotrvačníky motorov?
3. Zotrvačník má voľný hriadeľ s polomerom 0,005 m. Určte moment zotrvačnosti zotrvačníka, ak sa pôsobením tiažovej sily závažia s hmotnosťou 2 kg, ktoré ťahá za motúz navinutý na hriadeli desaťkrát, roztočí s frekvenciou 20 Hz. (Treba brať do úvahy aj kinetickú energiu závažia). [$7{,}5 \cdot 10^{-4}$ kg.m^2]
4. Rotor elektromotora s hmotnosťou 110 kg má moment zotrvačnosti 2 kg.m^2 a koná 20 otáčok za sekundu. Vypočítajte kinetickú energiu rotora. [16 kJ]

4.9 Porovnanie veličín charakterizujúcich posuvný a otáčavý pohyb tuhého telesa

Porovnaním fyzikálnych vzťahov medzi veličinami, ktoré charakterizujú pohyb hmotného bodu (posuvný pohyb tuhého telesa) a otáčavý pohyb tuhého telesa okolo nehybnej voľnej osi, možno dospieť k istým analógiám; pri otáčavom pohybe tuhých telies sa v príslušných vzťahoch vyskytuje namiesto dráhy uhol otočenia, namiesto rýchlosti uhlová rýchlosť, namiesto hmotnosti moment zotrvačnosti, namiesto sily moment sily.

V nasledujúcej tabuľke sú v jednotlivých riadkoch uvedené príklady veličín, ktoré si pri opise pohybu hmotného bodu (alebo posuvného pohybu tuhého telesa) a otáčavom pohybe tuhého telesa zodpovedajú.

Posuvný pohyb		**Otáčavý pohyb**	
dráha	s	uhol otočenia	φ
rýchlosť	$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	uhlová rýchlosť	$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$
sila	F	moment sily	M
hmotnosť	m	moment zotrvačnosti	J
kinetická energia	$E_k = \frac{m v^2}{2}$	kinetická energia	$E_k = \frac{J \omega^2}{2}$

ZHRNUTIE — MECHANIKA TUHÉHO TELESA

V tuhom telese možno posunúť pôsobisko sily do ľubovoľného bodu jej vektorovej priamky bez toho, že by sa zmenili účinky sily na teleso. To umožňuje určiť výslednicu dvoch rôznobežných síl pomocou vektorového rovnobežníka. Výslednica dvoch rovnobežných síl má pôsobisko v strede rovnobežných síl. Výslednica síl pôsobiacich na teleso má jednak posuvný, jednak otáčavý účinok. Dvojica síl má na tuhé teleso iba otáčavý účinok.

Najjednoduchší otáčavý pohyb koná tuhé teleso otáčavé okolo nehybnej osi. Všetky body tuhého telesa otáčavého okolo nehybnej osi sa pohybujú s rovnakou uhlovou rýchlosťou, ale veľkosť ich okamžitej rýchlosti závisí od ich vzdialenosti od osi otáčania. Otáčavý účinok sily na teleso určuje vektorová veličina moment sily. Pri pôsobení viacerých síl na teleso otáčavý účinok je určený vektorovým súčtom momentov týchto síl vzhľadom na os otáčania.

Zmena otáčania tuhého telesa pri pôsobiacom momente sily závisí od momentu zotrvačnosti telesa vzhľadom na danú nehybnú os.

Ťažisko telesa ako pôsobisko tiažovej sily je určené stredom tiažových síl pôsobiacich na častice tuhého telesa. Rovnovážna poloha tuhého telesa je daná polohou ťažiska vzhľadom na os, okolo ktorej sa tuhé teleso otáča. Stálosť rovnovážnej polohy meriame prácou, ktorú musíme vykonať, aby sme teleso prevrátili z rovnovážnej polohy stálej do rovnovážnej polohy vratkej.

Veličiny	Jednotky	Zákony	Vzťahy
moment sily M	newton meter N.m		$M = F\,r$
rameno sily r	m		
			$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots + \boldsymbol{M}_n$
		momentová veta	$\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots + \boldsymbol{M}_n = \vec{\boldsymbol{0}}$
moment dvojice síl M	N.m		
moment zotrvačnosti telesa J	kg.m^2		$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2$
kinetická energia			$E_k = \frac{J\,\omega^2}{2}$

5. Mechanika kvapalín a plynov

V základnej škole sme sa oboznámili s niektorými poznatkami o kvapalinách a plynoch. Aby sme na tieto poznatky mohli nadviazať, stručne ich zopakujeme a doplníme v statiach 5.1—5.4.

5.1 Tekutiny. Základné vlastnosti kvapalín

Kvapaliny a plyny označujeme spoločným názvom **tekutiny.** Tekutiny nemajú vlastný tvar a sú ľahko deliteľné.

Základnou vlastnosťou kvapalín je ľahká vzájomná posúvateľnosť ich molekúl. Z molekulovej štruktúry kvapalín vyplývajú tieto najdôležitejšie vlastnosti:

a) Kvapaliny sú tekuté, nadobúdajú tvar nádoby, do ktorej boli naliate. Na voľnom povrchu utvárajú voľnú hladinu. Voľná hladina kvapaliny v pokoji je kolmá na tiažovú silu.

b) Príčinou rozdielnej tekutosti kvapalín a odporu proti pohybu a zmene tvaru je **vnútorné trenie** (viskozita) kvapalín.

c) Kvapaliny sú veľmi málo stlačiteľné.

d) V kvapalinách, ktoré sú v pokoji, pôsobia tlakové sily kolmo na ľubovoľnú rovnú plochu.

e) Pri kvapalinách sa vyskytujú **kapilárne javy.**

Pri skúmaní mnohých javov v skutočných kvapalinách môžeme zanedbať niektoré vlastnosti, ktoré nie sú podstatné a utvoriť predstavu kvapaliny s jednoduchými vlastnosťami. Idealizáciou a abstrakciou dostaneme model **ideálnej kvapaliny.** Pri tejto kvapaline zanedbávame molekulovú štruktúru **a považujeme ju za spojitú (kontinuum). Ideálna kvapalina je bez vnútorného trenia, preto je dokonale tekutá; považujeme ju za nestlačiteľnú.**

5.2 Hydrostatika

Hydrostatika skúma podmienky rovnováhy kvapalín a telies do nich ponorených (kvapaliny a telesá sú v relatívnom pokoji).

Stav kvapaliny v pokoji v istom mieste určuje **tlak,** pre ktorý platí

$$\boxed{p = \frac{F}{S}}$$

kde F je veľkosť sily pôsobiacej kolmo na rovinnú plochu s obsahom S. Jednotkou tlaku je **pascal** (Pa), pričom $\mathrm{Pa} = \mathrm{N} \,.\, \mathrm{m}^{-2}$.

Tlak v ideálnej kvapaline je jednoznačne určený svojou hodnotou, je to skalárna veličina. Ak je v istom mieste kvapaliny tlak p, potom na ľubovoľne orientovanú rovinnú plochu, ktorá je v styku s kvapalinou, pôsobí kolmá tlaková sila, pre ktorej veľkosť platí

$$\boxed{F = p\, S}$$

Tlak v kvapaline môže byť vyvolaný vonkajšou silou alebo tiažovou silou, alebo často aj ich súčasným pôsobením.

1. Keď pôsobí vonkajšia sila veľkosti F na povrch rovnej plochy s obsahom S uzavretého objemu kvapaliny a žiadne iné sily na kvapalinu nepôsobia, vznikne v kvapaline tlak, ktorý je vo všetkých miestach kvapaliny rovnaký (Pascalov* zákon)

$$p = \frac{F}{S}$$

* BLAISE PASCAL (čítaj bléz paskal; 1623—1662). Vynikajúci francúzsky matematik, fyzik a filozof.

2. Tiažová sila pôsobiaca na kvapalinu (na povrch kvapaliny nepôsobia vonkajšie sily) vyvoláva hydrostatický tlak, pre ktorý platí

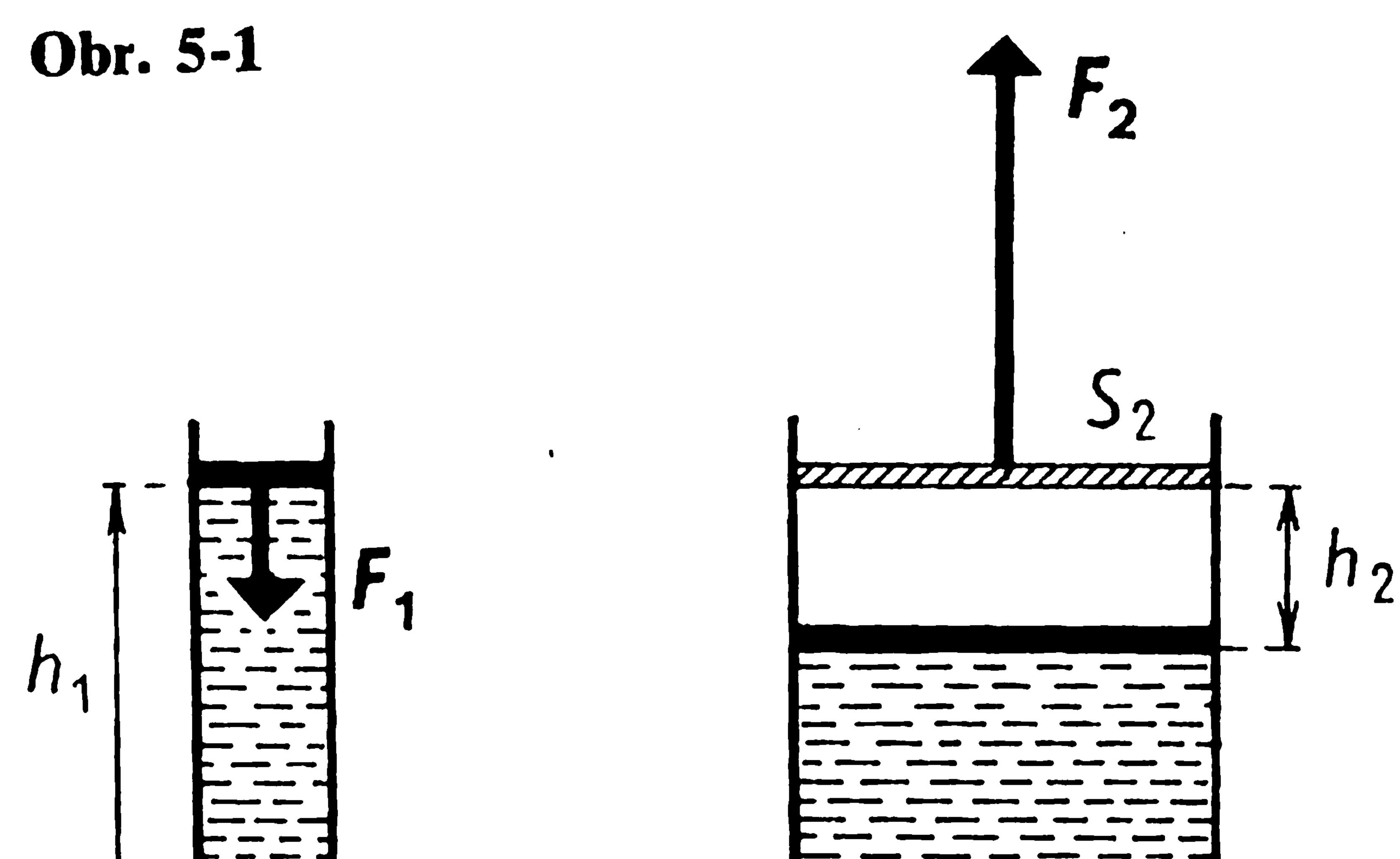
$$\boxed{p = h \varrho g}$$

kde h je hĺbka kvapaliny pod voľným povrchom, ϱ hustota kvapaliny a g je veľkosť tiažového zrýchlenia. Vo všetkých miestach v rovnakej hĺbke h je rovnaký hydrostatický tlak. Plochy s rovnakým hydrostatickým tlakom sa nazývajú **hladiny.** Hladina na voľnom povrchu kvapaliny sa nazýva **voľná hladina.** Každému bodu v kvapaline možno priradiť jedinú hodnotu tlaku. Hovoríme, že tlakové pomery v kvapaline môžeme matematicky opísať (zobraziť) **tlakovým poľom**. Pretože tlak v ideálnej kvapaline je skalár, tlakové pole kvapaliny je **skalárne pole.** Všetky uvedené závery možno aplikovať aj na plyny v pokoji (platia aj v aerostatike).

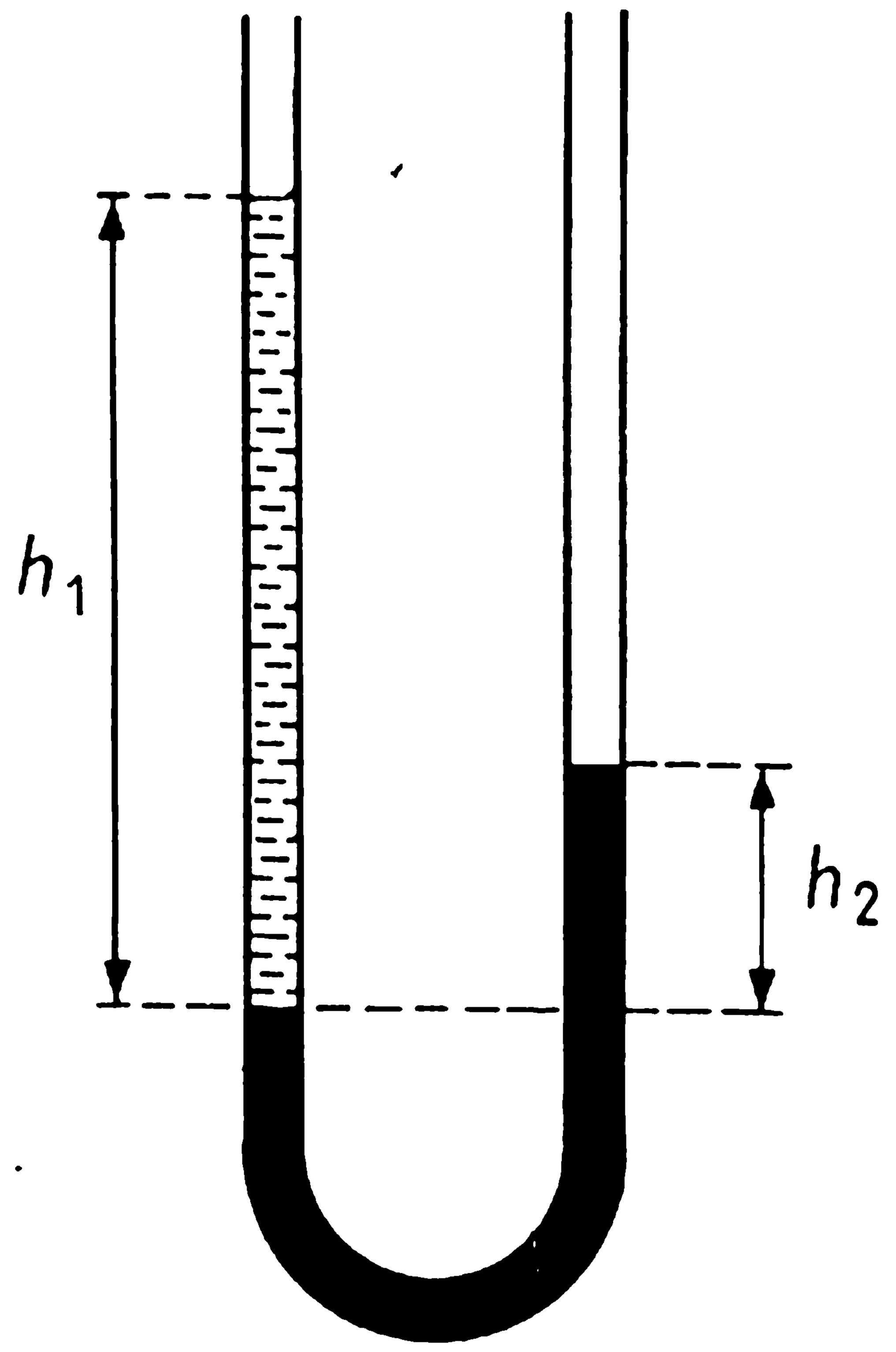
Úlohy

1. a) Podľa obr. 5-1 vysvetlite činnosť hydraulického lisu a odvoďte vzťah medzi veľkosťami pôsobiacich síl a plošnými obsahmi piestov. $\left[\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}\right]$

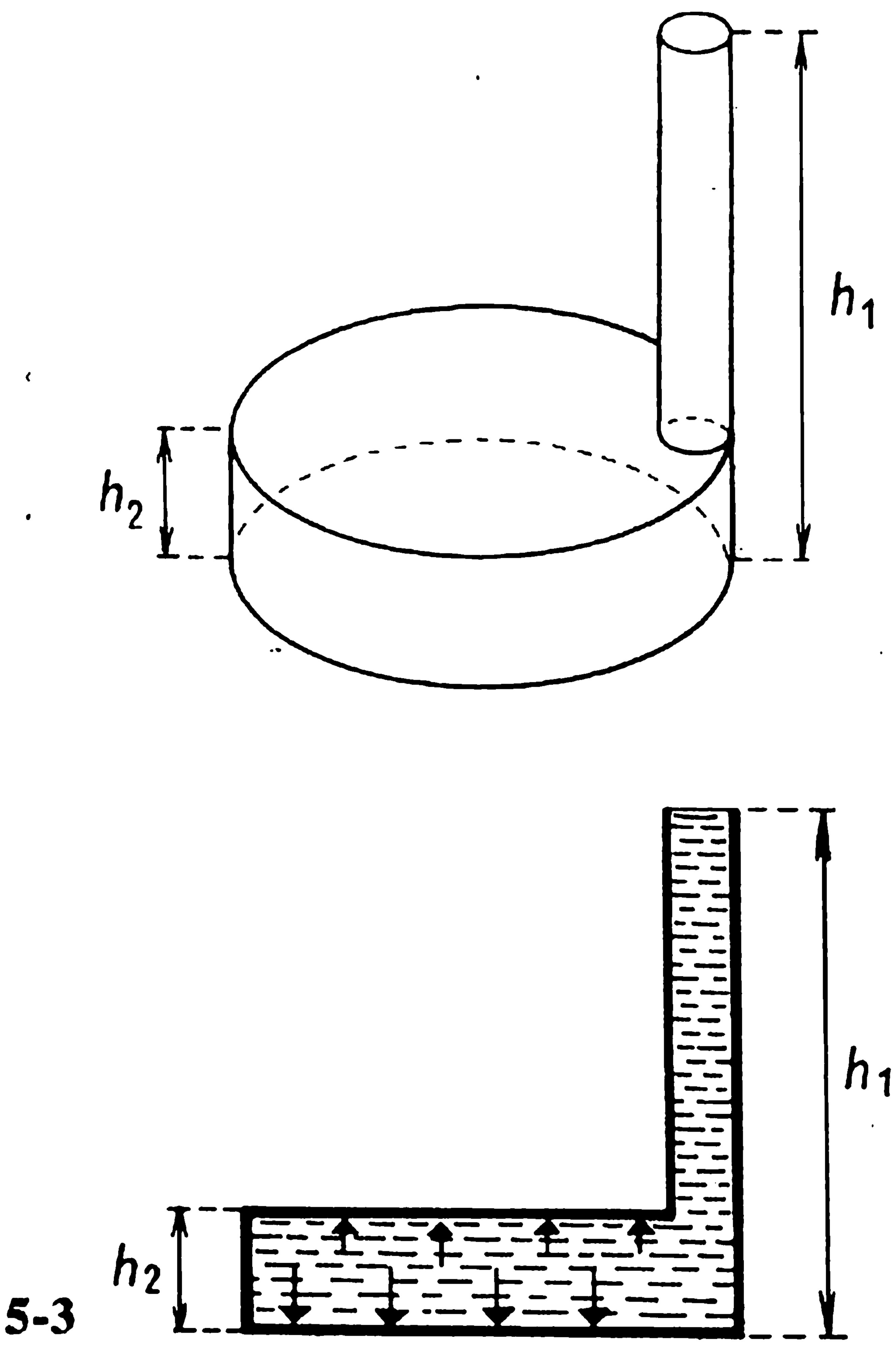
Obr. 5-1



b) Dokážte, že pomocou hydraulického zariadenia možno dosiahnuť niekoľkonásobné zväčšenie sily, ale práca vykonaná hydraulickým lisom nemôže byť väčšia ako práca vykonaná pôsobením vonkajšej sily. (Návod: v obidvoch ramenách sa mení objem kvapaliny o rovnakú hodnotu.)



Obr. 5-2



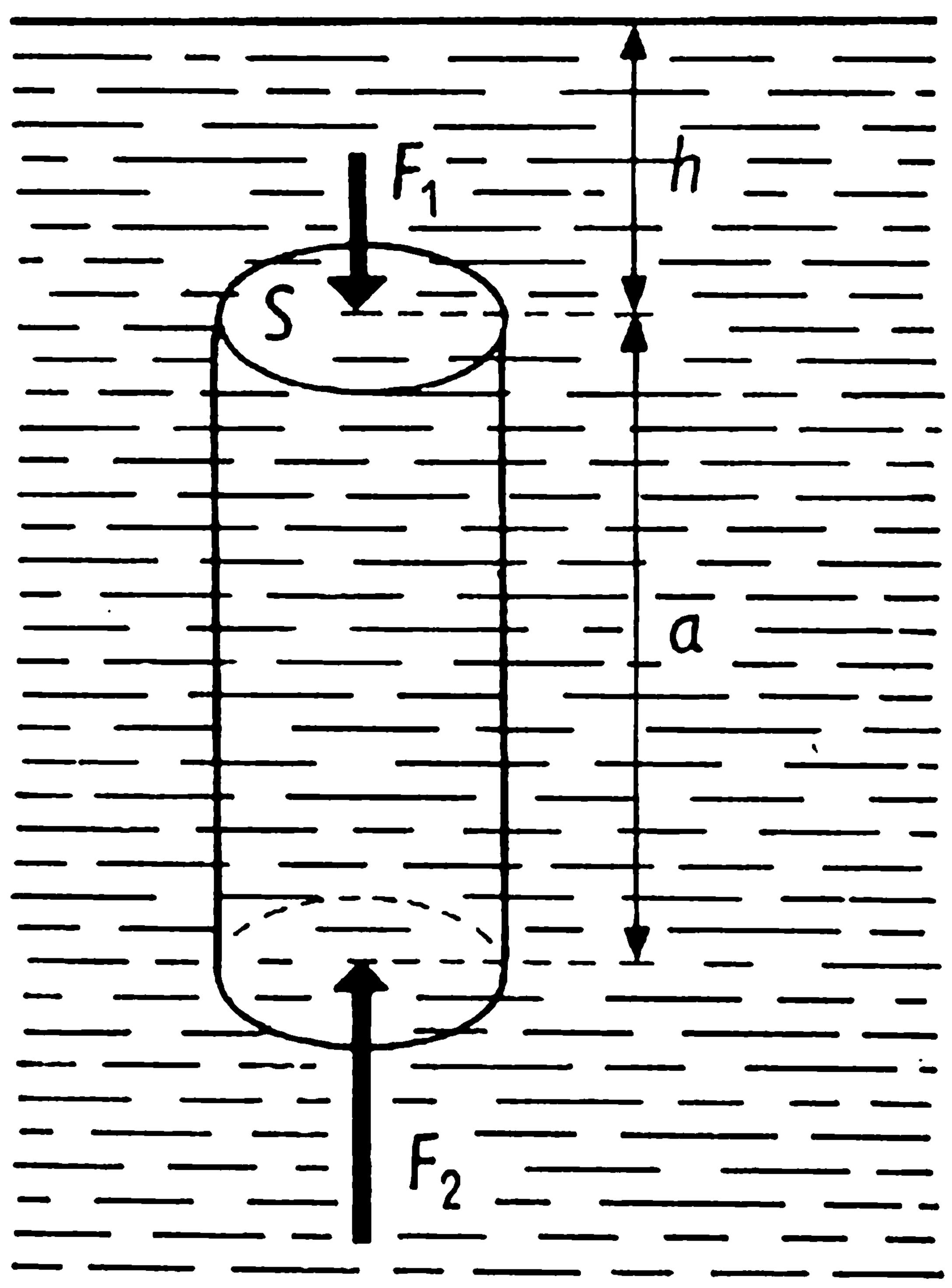
Obr. 5-3

c) Vysvetlite, ako na princípe hydraulického lisu pracujú hydraulické brzdy auta, kovacie lisy, tlakové spínače.

2. Odvoďte vzťah, ktorý platí medzi hustotami a výškami nad spoločným rozhraním dvoch nemiešajúcich sa kvapalín v spojených nádobách (obr. 5-2). [$\varrho_1 : \varrho_2 = h_2 : h_1$]
3. Ako **hydrostatický paradox** sa označuje poznatok, že pre danú kvapalinu veľkosť tlakovej sily na dno nádoby nezávisí od hmotnosti kvapaliny v nádobe, ale iba od výšky kvapalinového stĺpca a plošného obsahu. a) Prečo na tomto poznatku nie je z hľadiska fyziky nič paradoxné (protirečivé)? b) Vysvetlite, prečo tlaková sila na dno nádoby (obr. 5-3) je väčšia ako tiaž kvapaliny. (Návod: kvapalina pôsobí na hornú podstavu istou tlakovou silou, horná podstava v dôsledku svojej pevnosti pôsobí rovnako veľkou silou reakcie na kvapalinu.)

5.3 Archimedov zákon, plávanie telies

Na teleso ponorené do kvapaliny pôsobia v dôsledku hydrostatického tlaku tlakové sily. Vo vodorovnom smere sa tlakové sily navzájom rušia (inak by sme pozorovali samovoľný pohyb ponoreného telesa pozdĺž voľnej hladiny). V zvislom smere sa v dôsledku výšky telesa prejaví odlišný tlak pri hornej a spodnej časti telesa; vzniká hydrostatická **vztlaková sila.** Odvodíme jej veľkosť pre valec s obsahom podstavy S



Obr. 5-4

a výškou a (objem valca je $V = S\ a$; obr. 5-4). Ak je horná podstava valca v hĺbke h a je vodorovná, pôsobí na ňu tlaková sila, ktorá má veľkosť

$$F_1 = S\ h\ \varrho\ g$$

Veľkosť tlakovej sily na spodnú podstavu je

$$F_2 = S\,(h + a)\ \varrho\ g \qquad F_2 > F_1$$

Výsledná hydrostatická vztlaková sila je orientovaná zvislo nahor a pre jej veľkosť platí

$$F_{vz} = F_2 - F_1 = S\,(h + a)\ \varrho\ g - S\ h\ \varrho\ g = V\ \varrho\ g$$

Tento výsledok platí pre telesá ľubovoľného tvaru i pre čiastočne ponorené (potom uvažujeme len o objeme ponorenej časti telesa) a všeobecne ho vyjadruje Archimedov* zákon:

* ARCHIMEDES (287—212 pred n. l.), slávny starogrécky matematik a mechanik.

Teleso ponorené do kvapaliny je nadľahčované vztlakovou hydrostatickou silou, ktorej veľkosť sa rovná tiaži kvapaliny s rovnakým objemom, ako je objem ponorenej časti telesa.

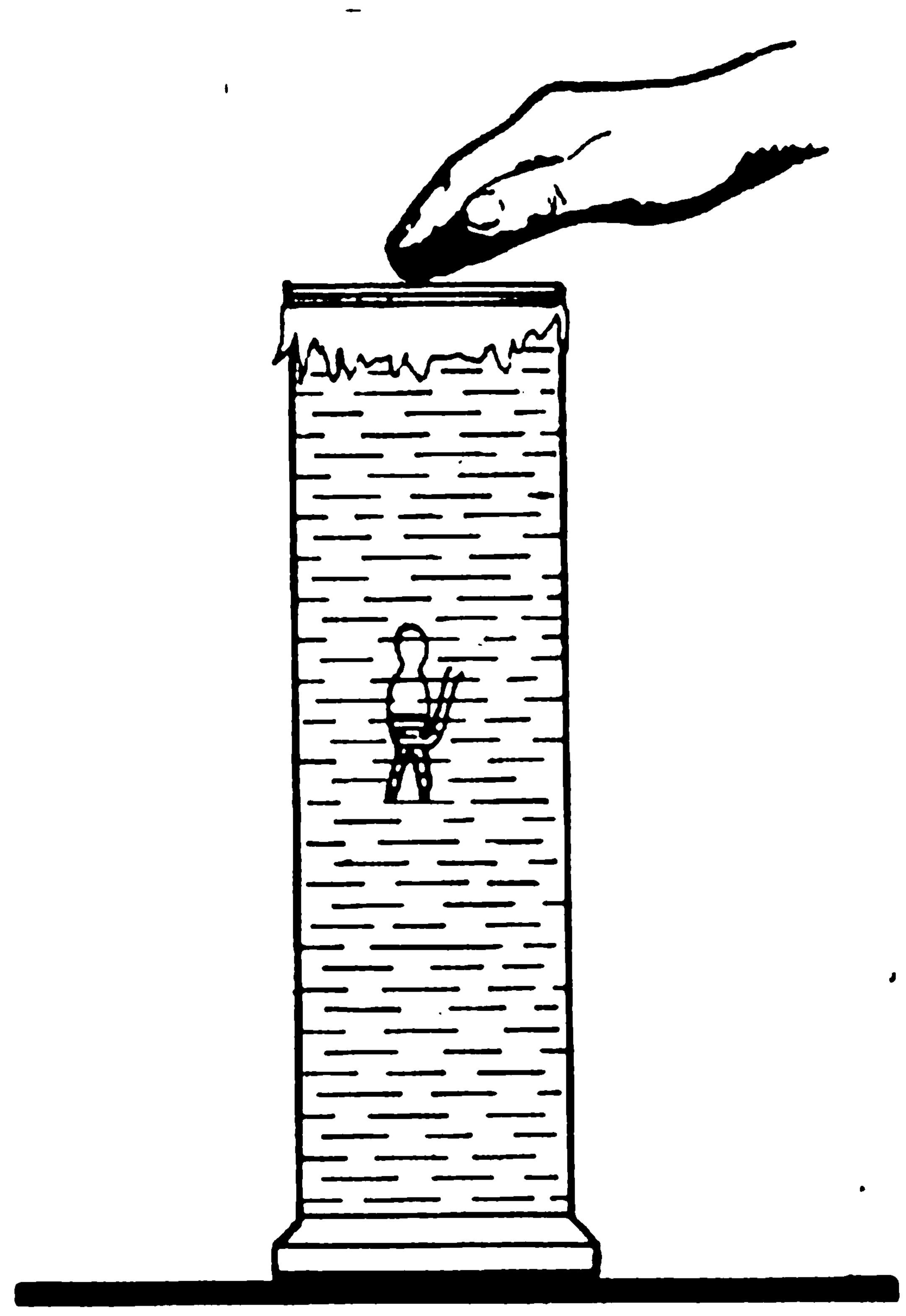
Dôsledkom Archimedovho zákona je i správanie sa telies v kvapaline. Ak je hustota telesa (pri nehomogénnom telese stredná hustota) ϱ_1 a hustota kvapaliny ϱ, na teleso pôsobí tiažová sila $F_g = V \varrho_1 g$ a súčasne vztlaková sila $F_{vz} = V \varrho g$. Môžu nastať tri prípady:

1. Pre $F_g > F_{vz}$ je $\varrho_1 > \varrho$, teleso v kvapaline **klesá** ku dnu.
2. Keď $F_g = F_{vz}$, je $\varrho_1 = \varrho$, celkom ponorené teleso sa v kvapaline **vznáša.**
3. Keď $F_g < F_{vz}$, je $\varrho_1 < \varrho$, teleso celkom ponorené do kvapaliny **stúpa** a čiastočne sa vynorí nad hladinu. Rovnováha nastane, keď pre objem V' ponorenej časti telesa platí: $V \varrho_1 g = V' \varrho g$, čiže $V' = V\frac{\varrho_1}{\varrho}$.

To isté teleso sa v rôznych kvapalinách ponorí tým väčšou časťou svojho objemu, čím je hustota kvapaliny menšia. Na tomto poznatku sú založené **hustomery.**

Úlohy

1. Vysvetlite nezvyčajné správanie sa hračky, ktorá má podobu figúrky nazvanej „karteziánček“. Sklená nádoba celkom naplnená vodou je uzavretá pružným vekom (obr. 5-5).



Obr. 5-5

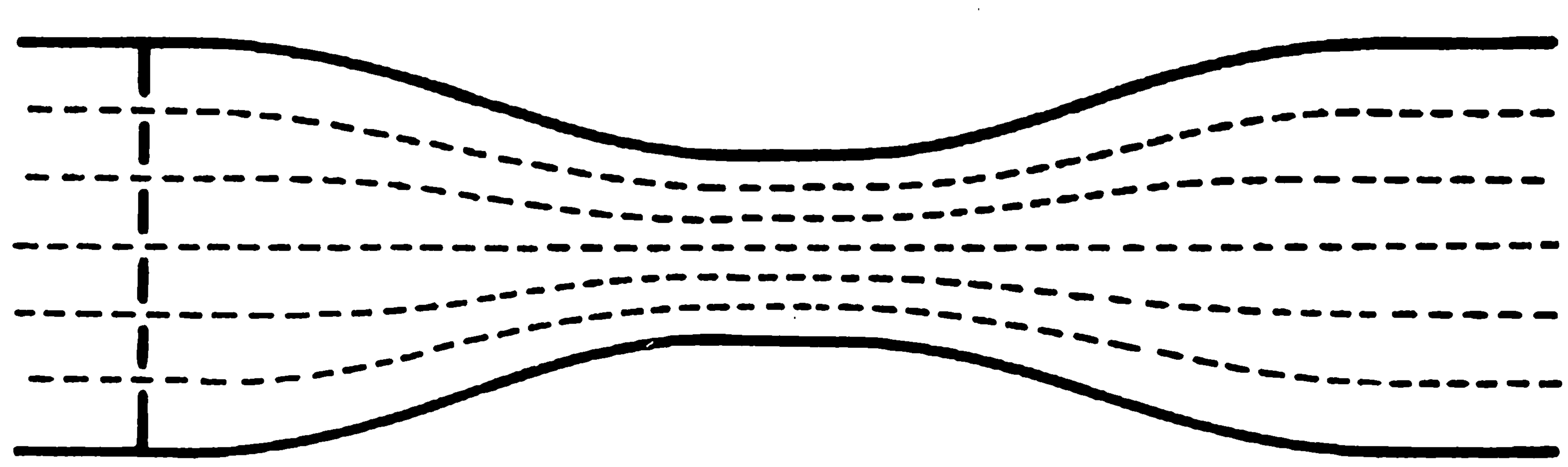
Tlakovou silou ruky dosiahneme, že teliesko klesá ku dnu, stúpa alebo sa vo vode vznáša. (Návod: v ľahkom teliesku je vzduchová bublina.)
Zostrojte použitím očného kvapkadla „karteziánček".

2. Guľa s hmotnosťou 5,67 kg je ponorená do vody. Lano, na ktorom visí, napína silou 50,7 N. Z akého materiálu je guľa zhotovená ($g = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$)? [$\varrho_1 = 11\ 300\ \mathrm{kg.m^{-3}}$, olovo]
3. Hustota ľadu je $917\ \mathrm{kg.m^{-3}}$, hustota morskej vody je $1\ 030\ \mathrm{kg.m^{-3}}$. Koľko % objemu ľadovca je vynorené nad voľnou hladinou? [11 %]

5.4 Ustálené prúdenie ideálnej kvapaliny

Voda a plyn sa privádzajú do domácností a závodov potrubím. Ropovodmi a plynovodmi sa dopravujú do našej republiky ropa a plyn zo Sovietskeho zväzu. Olej potrebný na mazanie súčastí strojov a dopravných prostriedkov sa rozvádza tlakovým potrubím. Tepny a žily v ľudskom tele sú sústavou potrubí, ktorá zabezpečuje krvný obeh. Preto poznanie zákonov prúdenia má veľký význam.

Aby sme získali istú predstavu o pohybe častíc kvapaliny, pridáme do prúdiacej kvapaliny ľahký prášok. Z väčšej vzdialenosti nerozoznáme jednotlivé zrnká prášku a vidíme celé krivky utvorené pohybujúcimi sa zrnkami prášku (obr. 5-6).



Obr. 5-6

Keď voda prúdi rovnomerne, po istom čase sa rozloženie kriviek ustáli. Jednotlivé zrnká sú ľahké, preto prúdia v tom istom mieste rovnakou rýchlosťou ako častice kvapaliny. Krivky utvorené unášaným práškom sú obrazom trajektórie častíc kvapaliny. Častice sa pohybujú istou rýchlosťou, ich smer je určený dotyčnicou v danom mieste trajektórie.

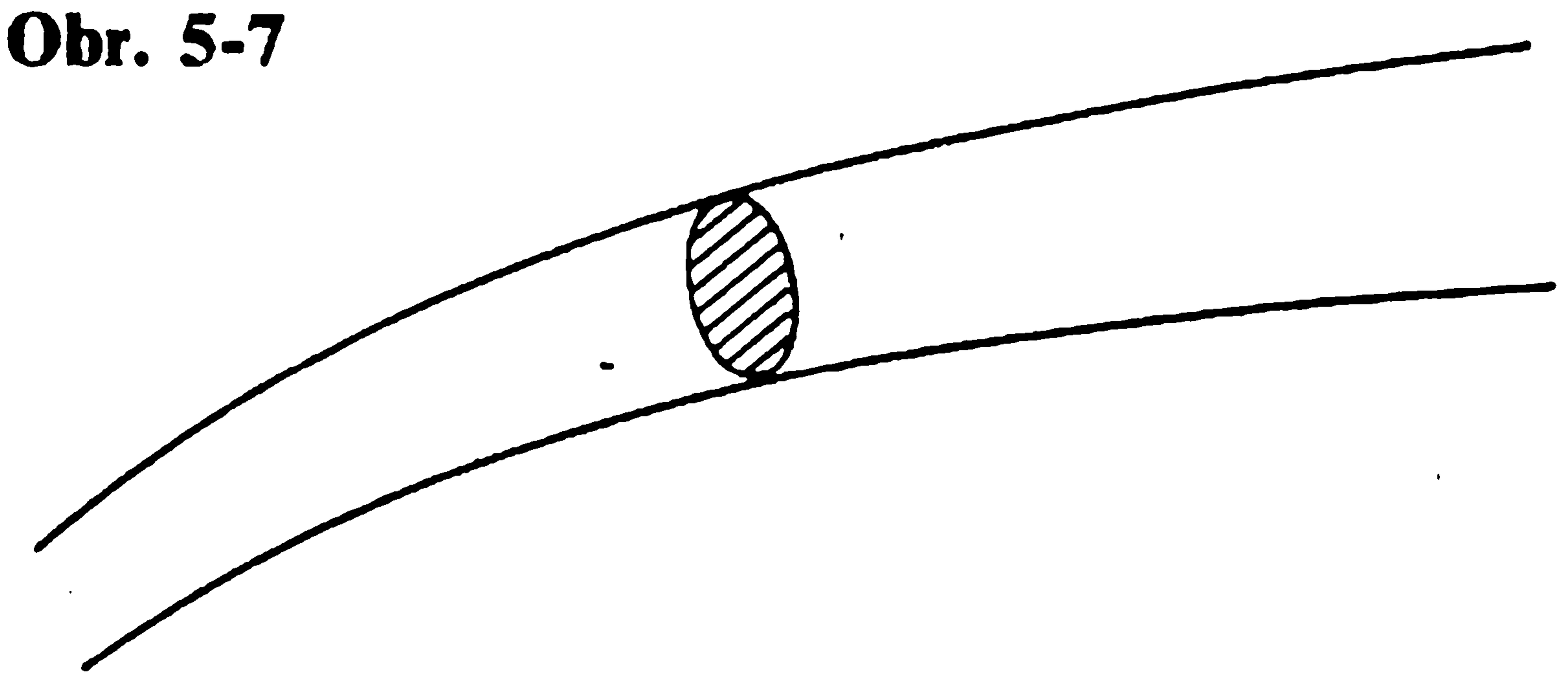
Keď je rýchlosť prúdiacej kvapaliny v danom mieste stála (s časom sa nemení), nazýva sa takéto **prúdenie ustálené (stacionárne).** V opačnom prípade sa prúdenie nazýva **neustálené (nestacionárne).**

Pokus, ktorý sme opísali, vedie k znázorneniu prúdenia kvapaliny pomocou prúdnic.

Prúdnica je taká myslená čiara, ktorej dotyčnica zostrojená v ľubovoľnom bode určuje smer rýchlosti pohybujúcej sa častice kvapaliny. Každým bodom kvapaliny prechádza práve jedna prúdnica. Prúdnice sa nemôžu pretínať.

Predstavme si vnútri prúdiacej hladiny uzavretú krivku (obr. 5-7), ktorej každým bodom prechádza prúdnica. Všetky tieto prúdnice tvoria plochu, ktorá sa nazýva **prúdová trubica.** Kvapalinu ohraničenú touto

Obr. 5-7



trubicou nazývame **prúdové vlákno.** Kvapalina, ktorá prúdi vnútri prúdovej trubice ako potrubím, nemôže z trubice odtiecť ani pritiecť do nej z okolia. Keďže prúdnic je nekonečne veľa, na znázornenie prúdiacej kvapaliny vyberáme napr. iba prúdnice, ktoré prechádzajú osou zvolených prúdových trubíc.

Pretože uvažujeme o prúdení ideálnej kvapaliny, jej rýchlosť je vo všetkých bodoch prierezu prúdovej trubice, kolmej na jej os, rovnaká. Často berieme za prúdovú trubicu povrch kvapaliny v potrubí.

5.5 Rovnica spojitosti (kontinuity)

Uvažujme o ustálenom prúdení kvapaliny v prúdovej trubici s prierezom S (obr. 5-7). Keď je rýchlosť kvapaliny v, za 1 sekundu pretečie prierezom S objem kvapaliny $S\,v$. Keď je hustota kvapaliny ϱ, hmotnosť kvapaliny, ktorá za 1 sekundu pretečie týmto prierezom (**hmotnostný tok**), je $Q_m = S\ v\ \varrho$.

Keďže kvapalina nemôže stenami trubice ani vytiecť, ani pritiecť, musí byť hmotnostný tok v ľubovoľnom priereze prúdovej trubice stály, čiže

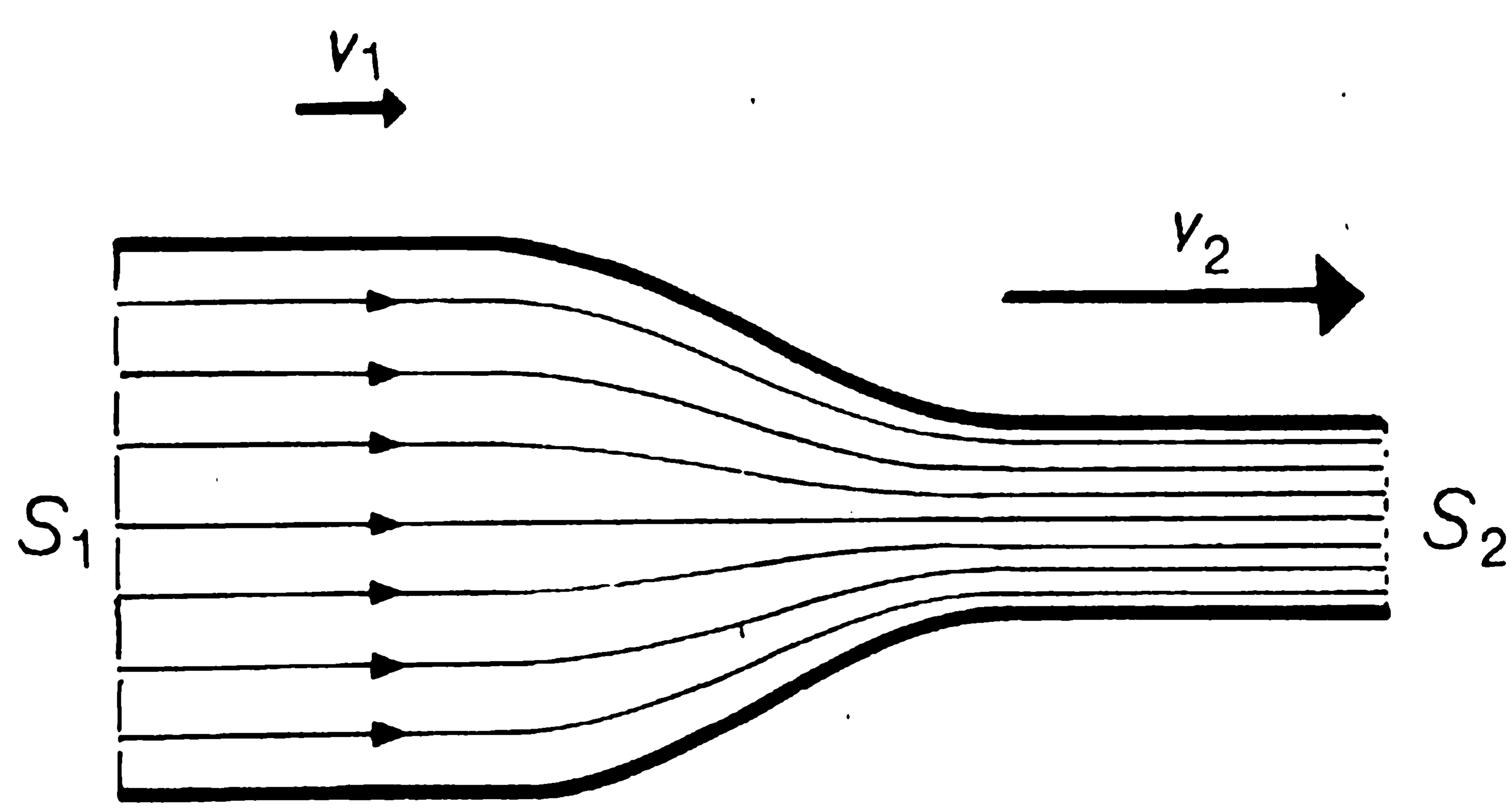
$$\boxed{S\ v\ \varrho = \text{konšt.}}$$

Táto rovnica sa nazýva **rovnica spojitosti alebo kontinuity** a je vyjadrením zákona zachovania hmotnosti pre ustálené prúdenie kvapaliny. Rovnica spojitosti v uvedenom tvare platí aj pre plyny, teda pre všetky tekutiny.

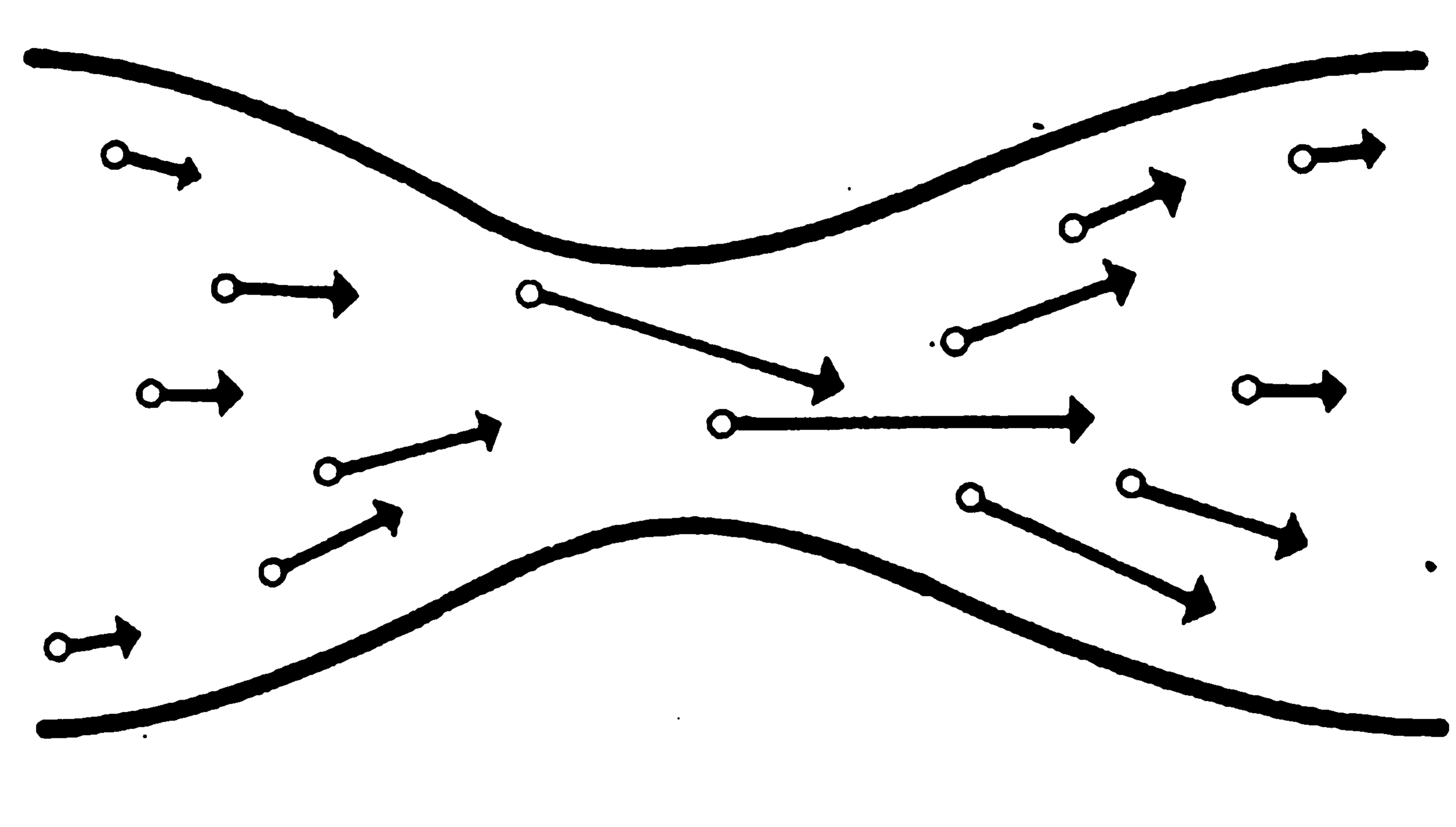
Keď uvažujeme o prúdení nestlačiteľnej kvapaliny, tak pri stálej teplote je stála aj hustota, a preto môžeme rovnicu spojitosti písať v tvare

$$\boxed{S\ v = \text{konšt.}}$$

V danom okamihu možno v každom bode prúdiacej kvapaliny určiť vektor rýchlosti jednotlivých častíc kvapaliny (obr. 5-8). Matematicky

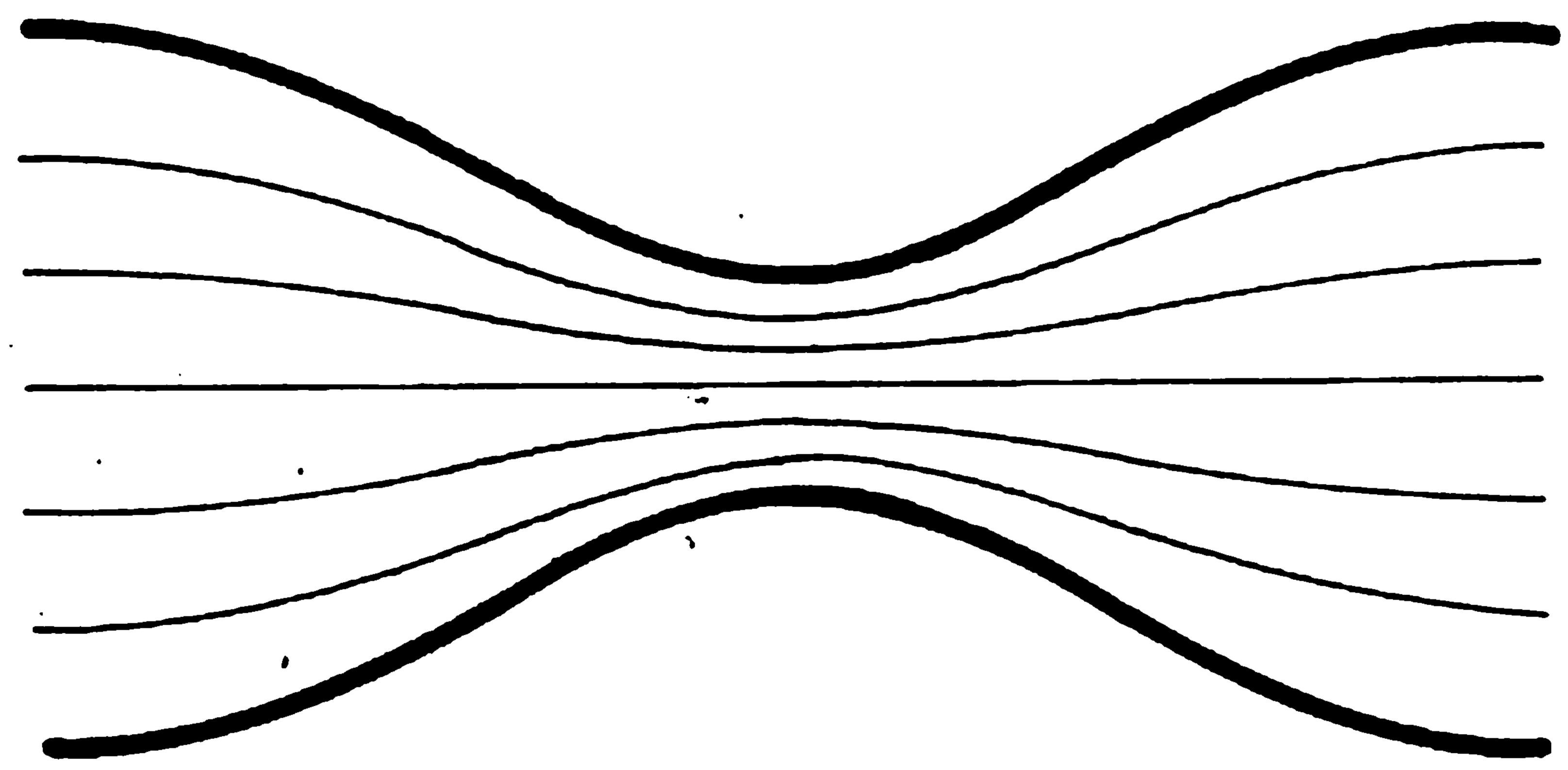


Obr. 5-8



Obr. 5-9

Obr. 5-10



možno prúdiacu kvapalinu opísať **vektorovým poľom rýchlosti.** Graficky zobrazujeme takéto pole pomocou prúdnic (obr. 5-9, 5-10). V takomto zobrazení (grafickom modeli) je veľkosť rýchlosti prúdiacej kvapaliny charakterizovaná hustotou prúdnic a smer rýchlosti prúdenia je určený dotyčnicou k prúdnici v každom mieste.

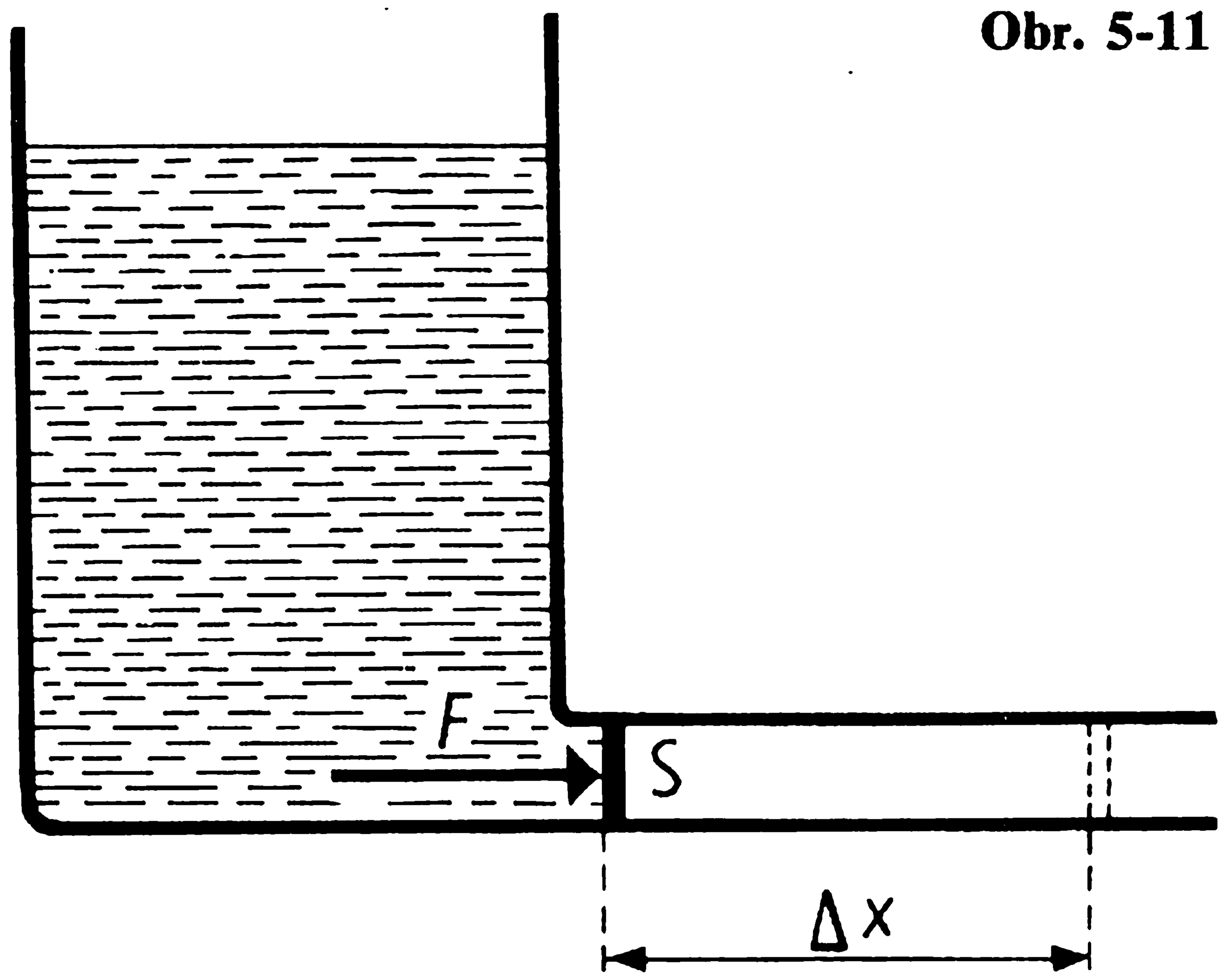
Úlohy

1. Voda preteká potrubím s priemerom 0,1 m rýchlosťou veľkosti 1 m.s^{-1}. Akou veľkou rýchlosťou vyteká voda z výtokového otvoru, ktorý má priemer 0,05 m? [4 m.s^{-1}]
2. Voda priteká potrubím s priemerom 0,04 m rýchlosťou veľkosti 1,25 m.s^{-1} do dýzy, z ktorej vystrekuje rýchlosťou veľkosti 20 m.s^{-1}. Aký veľký priemer má dýza? [0,01 m]
3. Otvorom s plošným obsahom 4 cm^2 vytečie za minútu 12 l vody. Akou veľkou rýchlosťou voda vyteká? [0,5 m.s^{-1}]
4. Čerpadlo načerpá za 1 minútu 300 l vody. Prívodné potrubie má priemer 80 mm, výtokovým potrubím prúdi voda rýchlosťou veľkosti 8,0 m.s^{-1}. Určte veľkosť rýchlosti vody v prívodovom potrubí a priemer výtokového potrubia. [1,0 m.s^{-1}, 28 mm]

5.6 Tlaková energia

Tlak vody vo vodnom potrubí je oveľa väčší ako atmosferický tlak. Niekedy sa stáva, že poškodené potrubie voda roztrhne, odplaví zeminu nad potrubím, poškodí vozovku a pod. Voda pod tlakom môže konať prácu, má energiu, ktorú nazývame **tlaková energia.** Tlakovú energiu má aj ideálna kvapalina.

Hodnotu tlakovej energie určíme úvahou. Predstavme si veľkú nádrž, v ktorej je kvapalina. Predpokladajme, že voľnú hladinu kvapaliny udržujeme v rovnakej výške. Z nádoby vychádza tlaková trubica, v ktorej je piest s plošným obsahom S (obr. 5-11), tlak kvapaliny v potrubí je p.



Obr. 5-11

Keď sa piest pôsobením tlakovej sily kvapaliny $F = p\ S$ posunie o dĺžku Δx, vykoná prácu

$$W = F\ \Delta x = p\ S\ \Delta x = p\ \Delta V$$

Vykonaná práca je určená súčinom tlaku a zmeny objemu kvapaliny v tlakovej trubici. Z uvedeného vzťahu pre tlak kvapaliny vyplýva

$$\boxed{p = \frac{\Delta W}{\Delta V}}$$

Platí

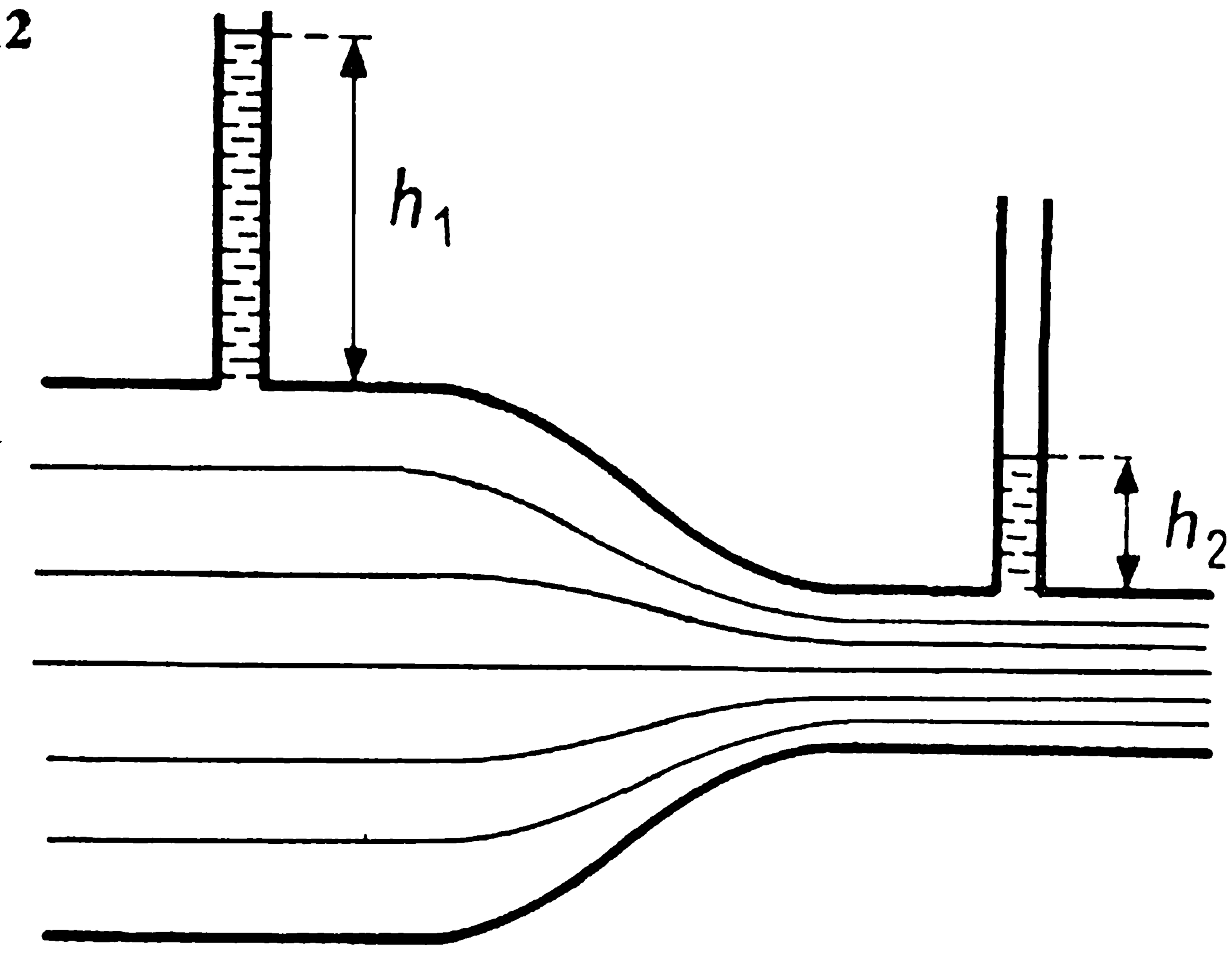
$$[p] = \mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{N.m}}{\mathrm{m}^2.\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$$

Číselná hodnota tlaku kvapaliny určuje číselnú hodnotu tlakovej energie kvapaliny pripadajúcu na jednotkový objem.

5.7 Bernoulliho rovnica

Vodorovnou trubicou s rôznymi prierezmi, na ktorých sú manometrické trubice, necháme prúdiť vodu (obr. 5-12). Výška vody v manometrickej trubici udáva tlak prúdiacej kvapaliny v danom mieste. Zistíme, že

Obr. 5-12



najväčší tlak je v tej časti trubice, ktorá má najväčší prierez, a preto podľa rovnice spojitosti voda v nej prúdi najmenšou rýchlosťou. V miestach, kde je prierez najmenší a rýchlosť prúdenia najväčšia, zistíme najmenší tlak.

Uvažujme o celkovej energii, ktorú má jednotkový objem prúdiacej kvapaliny. Je to jednak tlaková energia p, jednak kinetická energia $\frac{1}{2}\varrho v^2$ (hmotnosť jednotkového objemu je určená hustotou kvapaliny). Pretože v ideálnej kvapaline sa mechanická energia prúdiacej kvapaliny nemôže meniť na iné formy energie, je súčet tlakovej a kinetickej energie v jednotkovom objeme kvapaliny stály

$$\boxed{p + \frac{1}{2}\varrho v^2 = \text{konšt.}}$$

Táto rovnica sa nazýva **Bernoulliho* rovnica.**

* DANIEL BERNOULLI (čítaj bernuji; 1700—1782). Príslušník švajčiarskeho rodu, z ktorého pochádzalo veľa vynikajúcich matematikov a fyzikov.

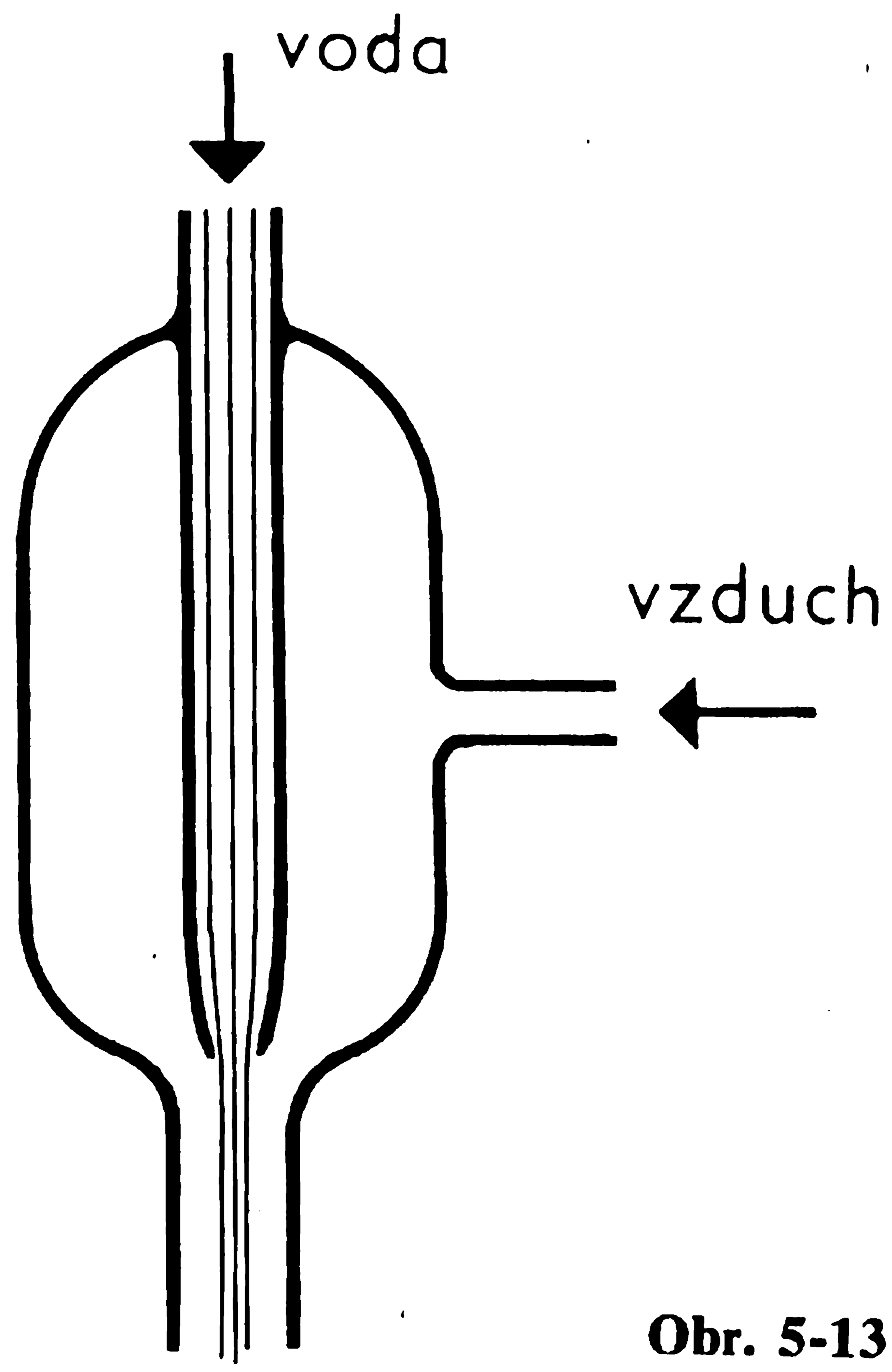
Pre miesta s rozličnými prierezmi vodorovnej trubice teda platí

$$p_1 + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \varrho v_2^2$$

Bernoulliho rovnica vyjadruje zákon zachovania mechanickej energie prúdiacej ideálnej kvapaliny vo vodorovnej trubici.

Pre plyny je táto rovnica zložitejšia, pretože zmenou tlaku mení sa aj hustota plynov. No pre prúdiace plyny tiež platí, že v užších prierezoch trubice sa zväčšuje ich rýchlosť a zmenšuje tlak.

Zúžením prierezu (obr. 5-13) možno dosiahnuť také zväčšenie veľkosti rýchlosti prúdiacej kvapaliny, že tlak v kvapaline klesne v zúženom mieste pod hodnotu atmosferického tlaku a objaví sa podtlak. V takomto mieste potrubia nastáva nasávanie vzduchu.

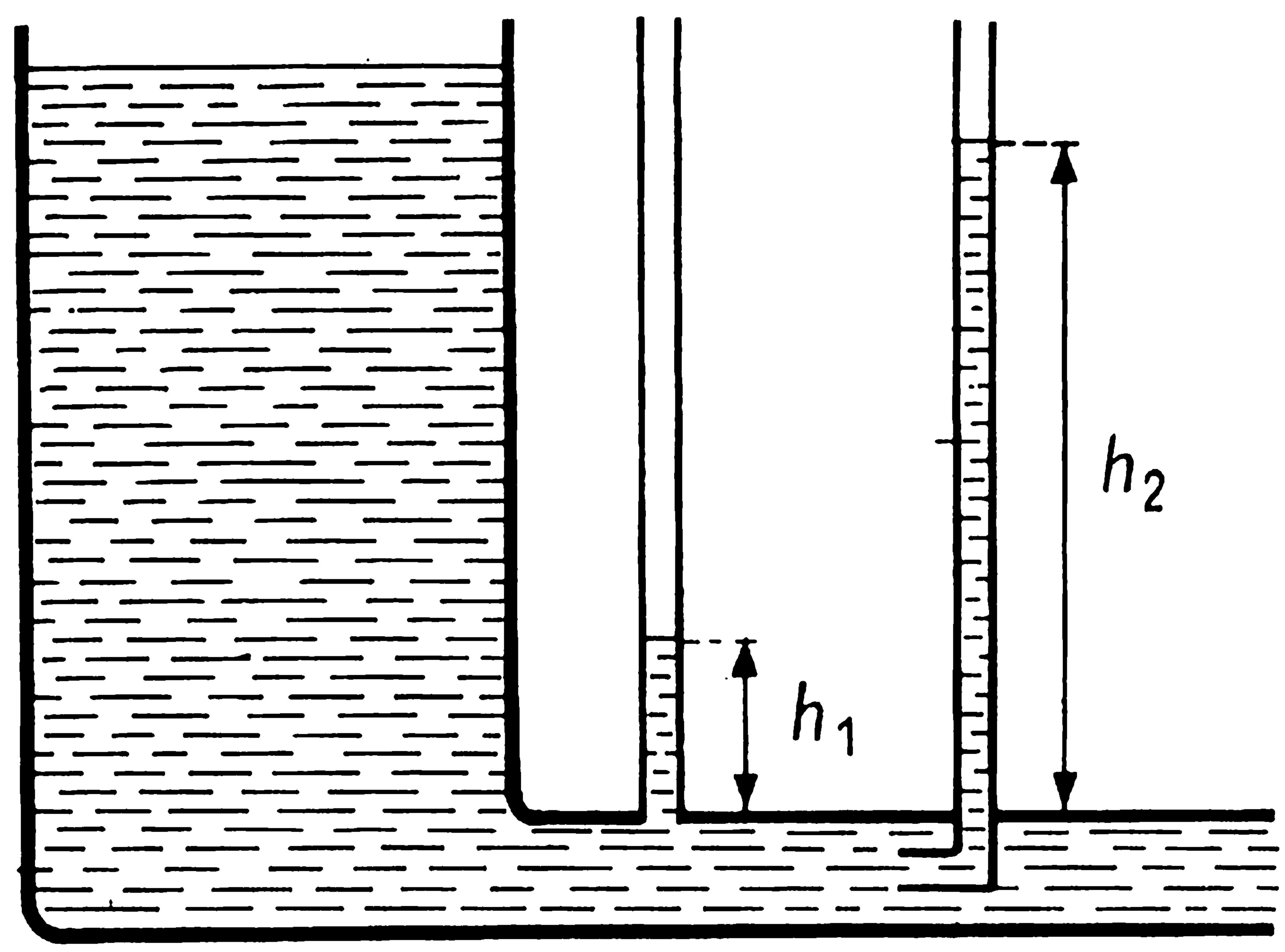


Obr. 5-13

Poznatok, že zúženie trubice, ktorou preteká kvapalina, vyvolá zníženie tlaku v kvapaline, nazýva sa **hydrodynamický paradox.** Tento názov je historický. Z fyzikálneho hľadiska nie je na tomto jave nič paradoxné, je v úplnom súlade s fyzikálnymi zákonmi.

5.8 Použitie Bernoulliho rovnice

Znalosť Bernoulliho rovnice umožňuje merať veľkosť rýchlosti prúdiacej kvapaliny. Napríklad na obr. 5-14 prvá manometrická trubica registruje hodnotu tlaku v prúdiacej kvapaline. V druhej manometrickej trubici, ktorá má otvor obrátený proti prúdu kvapaliny, klesne rýchlosť prúdenia



Obr. 5-14

na nulu, a preto meraný tlak udáva celkovú mechanickú energiu kvapaliny v jednotkovom objeme v trubici.

Platí

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho\, v_1^2 = p_2$$

Odtiaľ pre veľkosť rýchlosti dostaneme $(p_1 < p_2)$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\varrho}} = \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\varrho}}$$

Podobný vzťah odvodíme pre veľkosť rýchlosti kvapaliny vytekajúcej malým otvorom, ktorý je v stene nádoby v hĺbke h pod voľným povrchom kvapaliny.

Pre hladinu kvapalín v hĺbke h platí

$$p_0 = h\,\varrho\, g, \qquad v_0 = 0$$

Po dosadení do Bernoulliho rovnice dostaneme

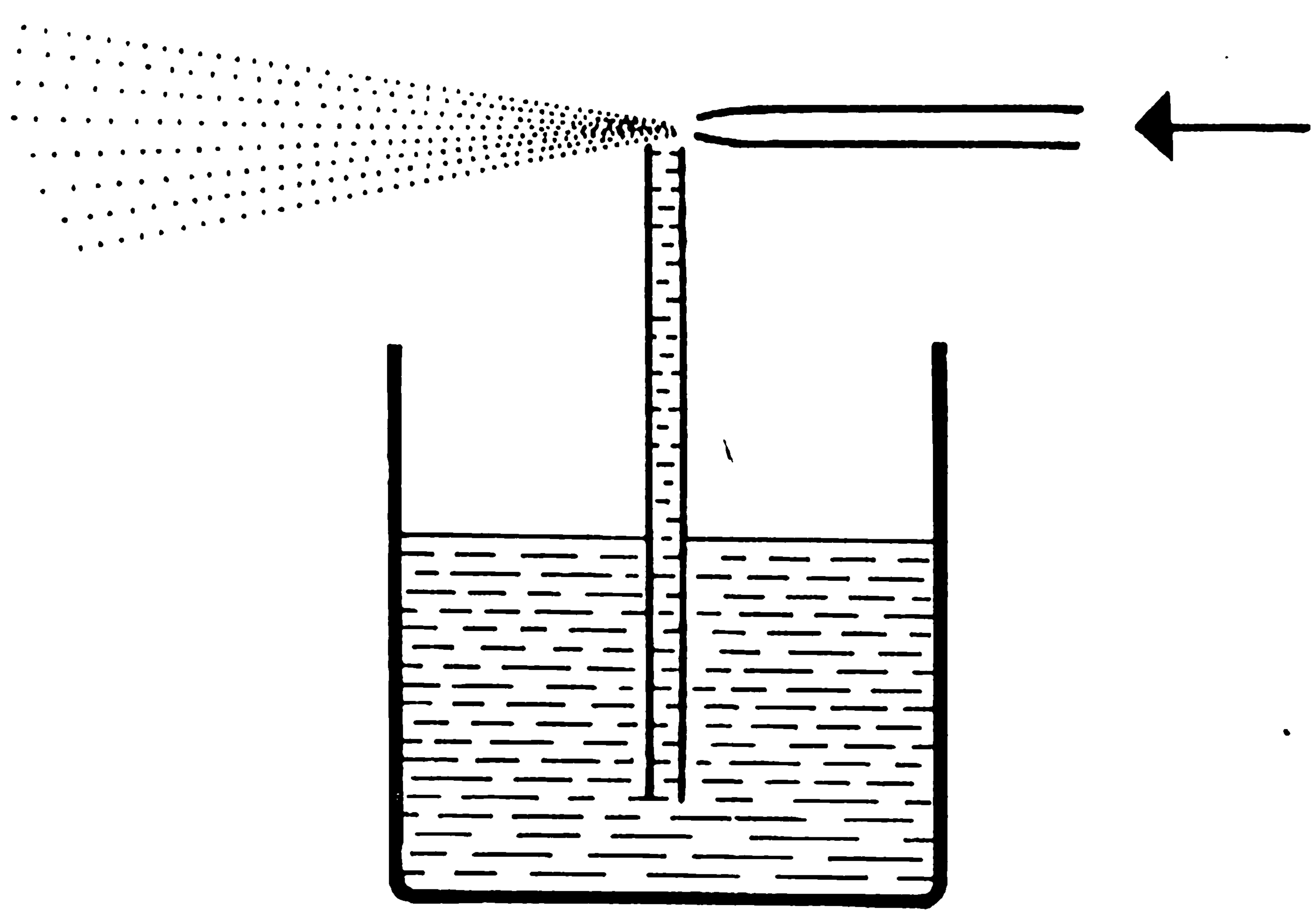
$$h \varrho g = \frac{1}{2} \varrho v^2$$

a pre veľkosť výtokovej rýchlosti platí

$$v = \sqrt{2 h g}$$

Rýchlosť vytekajúcej kvapaliny má práve takú veľkosť, akú by získali častice kvapaliny pri voľnom páde z výšky h.

Pomocou Bernoulliho rovnice môžeme vysvetliť i činnosť rozprašovača (obr. 5-15). Princíp rozprašovača je základom činnosti sprejov, karburátorov a pod.



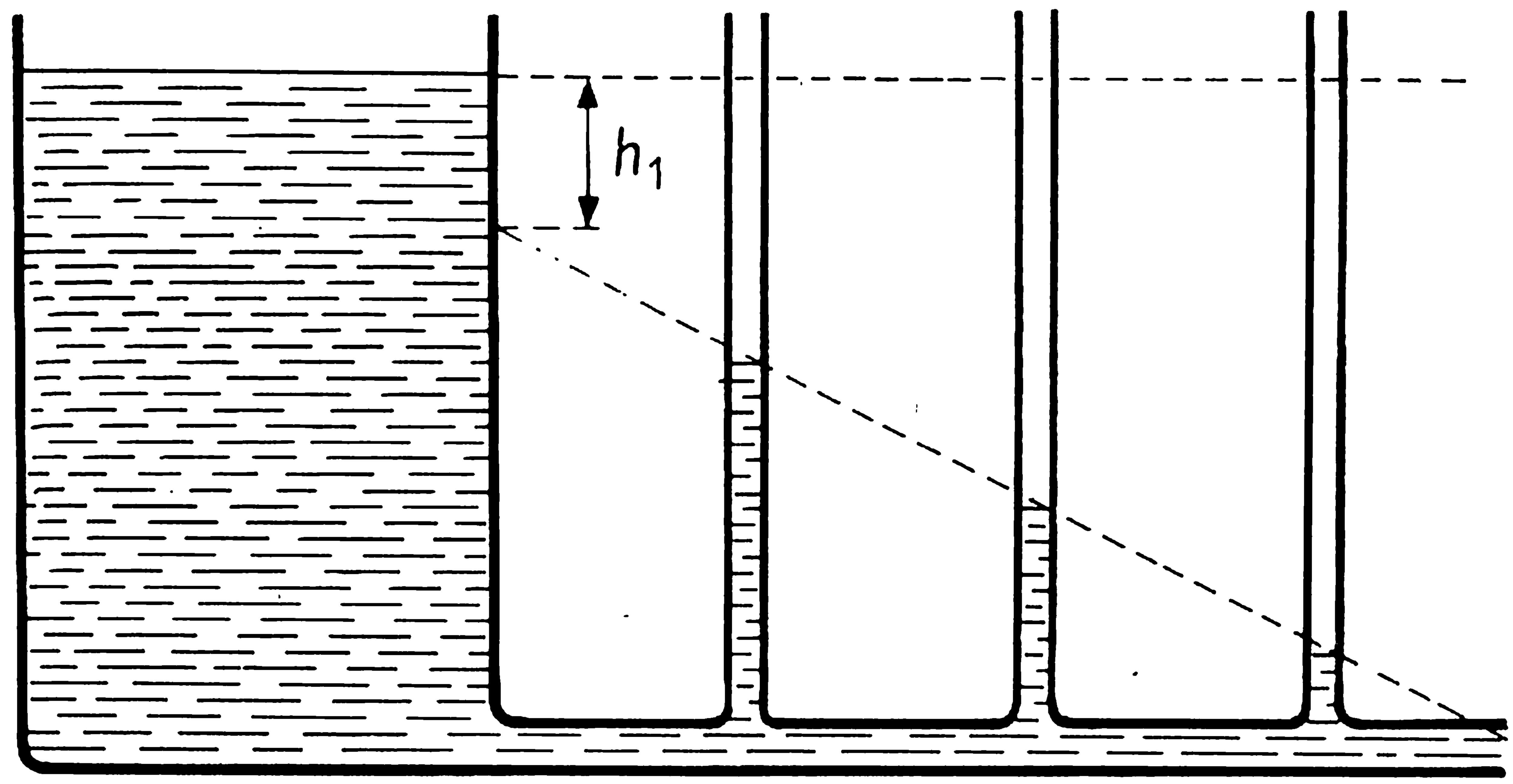
Obr. 5-15

Úlohy

1. Vo vodorovnej trubici prúdi voda rýchlosťou veľkosti 2,24 m.s^{-1} a má tlak 0,10 MPa. Akou veľkou rýchlosťou prúdi voda v zúženom mieste trubice, ak tu nameriame tlak 0,09 MPa? [5,0 m.s^{-1}]
2. Voda prúdi vodorovnou trubicou rýchlosťou veľkosti 2 m.s^{-1}. Aký veľký je výškový rozdiel v manometrických trubiciach podľa obr. 5-13? [20 cm]
3. Akou veľkou rýchlosťou prúdi voda vodorovnou trubicou s prierezom 15 cm^2, keď v zúženom mieste s prierezom 5 cm^2 sa zníži tlak o hodnotu 5 000 Pa? [1,1 m.s^{-1}]
4. Určte tlak vody v potrubí s priemerom 4 cm, ktorým prúdi voda rýchlosťou 1,25 m.s^{-1}, keď z dýzy s priemerom 1 cm vystrekuje rýchlosťou veľkosti 20 m.s^{-1}. (O vplyve atmosferického tlaku a odpore vzduchu neuvažujte.) [199 kPa]
5. Akou veľkou rýchlosťou vyteká voda z výstupného otvoru údolnej priehrady, ak je otvor 20 m pod voľnou hladinou? [20 m.s^{-1}]

5.9 Prúdenie skutočnej (reálnej) kvapaliny

Zo dna nádoby s vodou vychádza vodorovná trubica všade s rovnakým prierezom s manometrickými trubicami (obr. 5-16). Keď uzavrieme výtokový otvor, výška hladín v manometrických trubiciach je taká istá ako v nádobe (spojené nádoby). Po otvorení výtokového otvoru výška stĺpcov v manometrických trubiciach sa ustáli, ako je znázornené na obr. 5-16.



Obr. 5-16

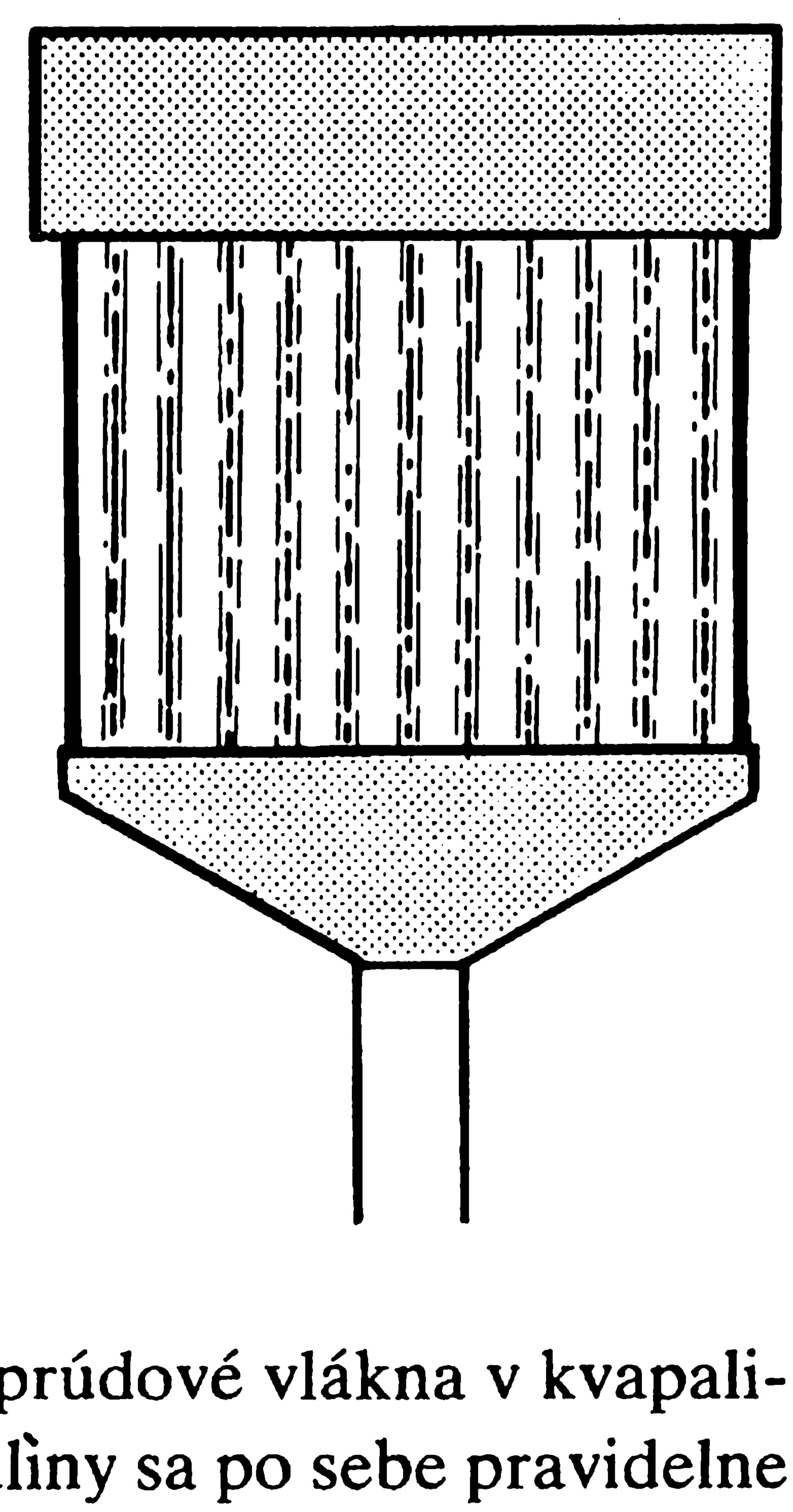
Keby sme do nádoby dali ideálnu kvapalinu, mohli by sme pozorovať, že voda vyteká z nádoby rýchlosťou $v = \sqrt{2\,h\,g}$ a v manometrických trubiciach kvapalina nevystúpi.

Pokus dokazuje, že voda (podobne aj iné kvapaliny) sa pri prúdení nespráva ako ideálna kvapalina. Pri prúdení skutočnej (reálnej) kvapaliny sa objavujú v kvapaline brzdiace sily, ktoré majú pôvod vo vzájomnom silovom pôsobení častíc kvapaliny. Tieto sily nazývame silami vnútorného trenia. Práca vykonaná silami vnútorného trenia v prúdiacej kvapaline určuje, aká časť tlakovej energie sa premenila na vnútornú energiu prúdiacej kvapaliny. Pretože trubica má stály prierez, je podľa rovnice kontinuity veľkosť priemernej rýchlosti prúdiacej kvapaliny po celej dĺžke trubice rovnaká. Je však menšia ako rýchlosť, ktorou by vytekala kvapalina priamo z otvoru v stene. Tlak kvapaliny pri výtokovom otvore sa rovná nule.

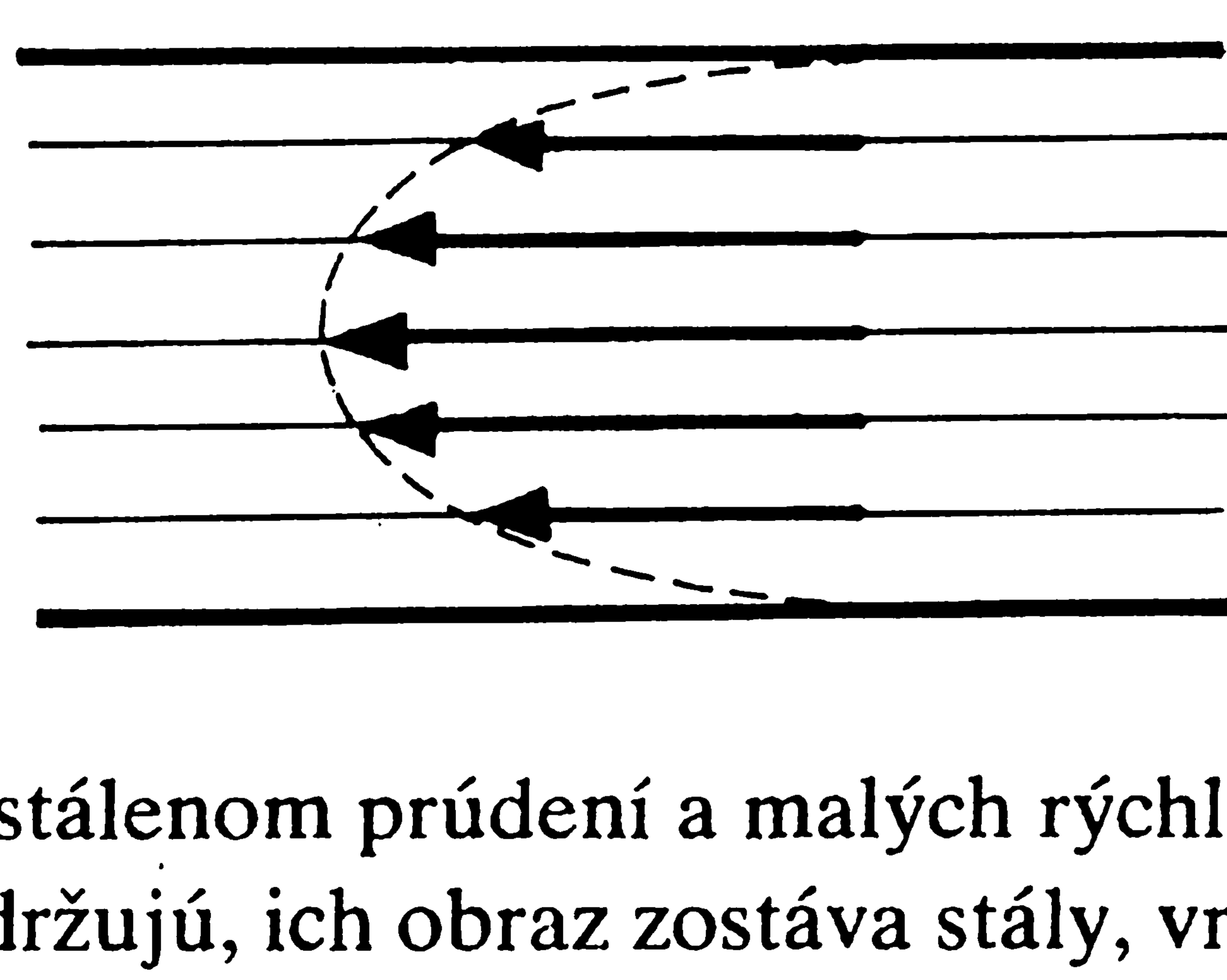
Pokus ukazuje, že pozdĺž trubice nastáva rovnomerný pokles tlaku. Spojnica stredov voľných hladín v manometrických trubiciach pretne stenu nádoby v hĺbke h_1 pod hladinou v nádobe. Táto hĺbka určuje časť tlakovej energie, ktorá sa premenila na kinetickú energiu vytekajúcej kvapaliny. Zostávajúca tlaková energia sa mení postupne pozdĺž celej trubice na vnútornú energiu kvapaliny (zvýši sa teplota vytekajúcej kvapaliny).

Keď skúmame rýchlosti častíc prúdiacej kvapaliny v jednotlivých bodoch istého prierezu trubice, zistíme, že tieto rýchlosti nie sú rovnaké. Kvapalina priľne k stenám a utvorí sa **medzná vrstva kvapaliny,** ktorá je voči stenám v pokoji. Prúdiacu kvapalinu si predstavujeme rozdelenú na vrstvy, ktoré sa po sebe posúvajú rýchlosťou zväčšujúcou sa smerom od steny k osi trubice, kde dosiahne maximálnu hodnotu (obr. 5-17). Prúdenie kvapaliny znázorníme pokusom so zafarbenými prúdovými vláknami (obr. 5-18). Medzi dvoma rovnobežnými sklenými platňami prúdi vrstva kvapaliny, v ktorej sa striedajú zafarbené a nezafarbené prúdové vlákna.

Obr. 5-18

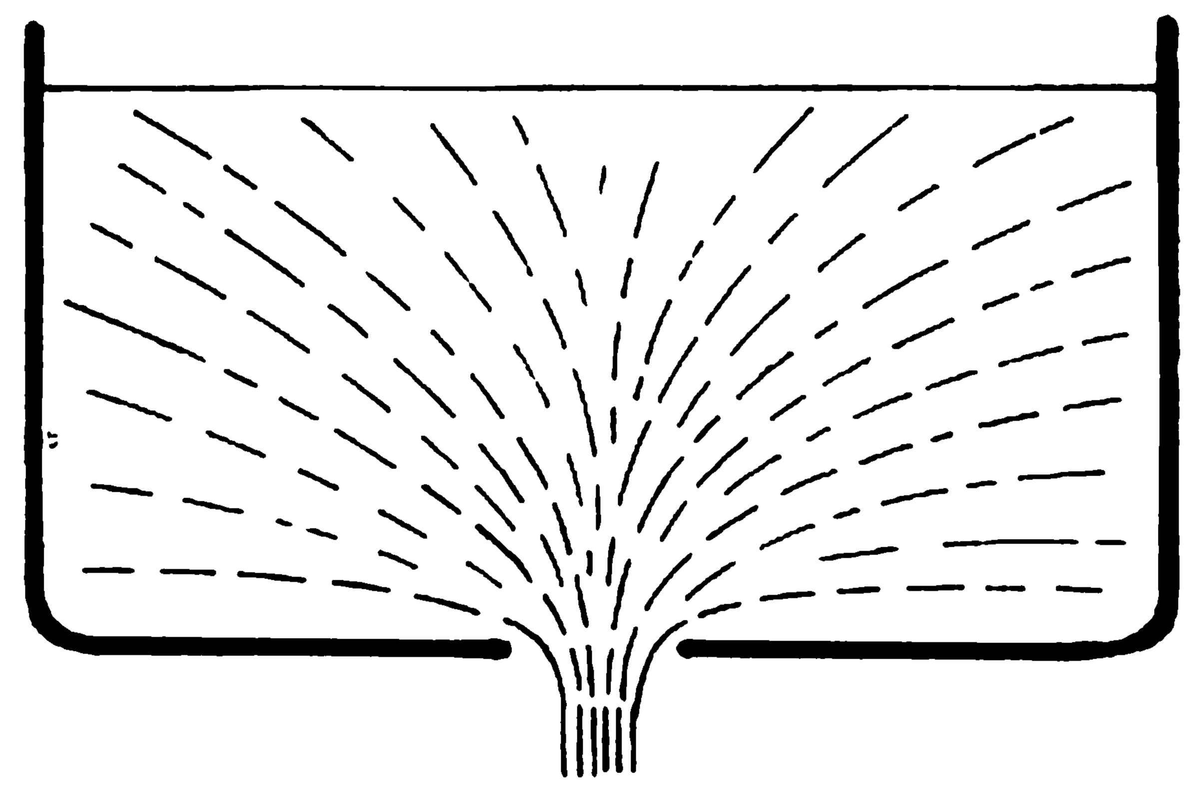


Obr. 5-17



Pri ustálenom prúdení a malých rýchlostiach sa prúdové vlákna v kvapaline udržujú, ich obraz zostáva stály, vrstvy kvapaliny sa po sebe pravidelne posúvajú. Takéto prúdenie kvapaliny sa nazýva **laminárne.**

Keď zvyšujeme rýchlosť prúdiacej kvapaliny, začnú sa pri istej veľkosti rýchlosti zafarbené vlákna rozpadať a nepravidelne prepletať, víriť a miešať s ostatnou kvapalinou. Takéto prúdenie nazývame **turbulentné.** Pri turbulentnom prúdení sa mení mechanická energia prúdiacej kvapaliny vo väčšej miere na vnútornú energiu. Podobné závery platia i pre prúdenie plynov.



Obr. 5-19

Veľkosť rýchlosti výtoku reálnej kvapaliny otvorom v stene je menšia ako pri ideálnej kvapaline (obr. 5-19). Pri ideálnej kvapaline sme predpokladali, že kvapalina vyteká rovnomerne celou plochou otvoru. Pri reálnej kvapaline sa prejaví zúženie lúča.

Úlohy

1. Prečo je potrebné na trasách diaľkových plynovodov budovať kompresorové stanice?
2. Pozorujte dym stúpajúci z komína za pokojného počasia. Najskôr stúpa ako úzky pruh, potom sa rozširuje, preplieta a rozptyľuje vo vzduchu. Vysvetlite, o aké prúdenie ide.
3. Otvorte vodovodný kohútik tak, aby voda vytekala miernym prúdom. V hornej časti je prúd vody číry. Postupne sa zužuje, nastáva „mihotanie" prúdu vody. Vysvetlite.

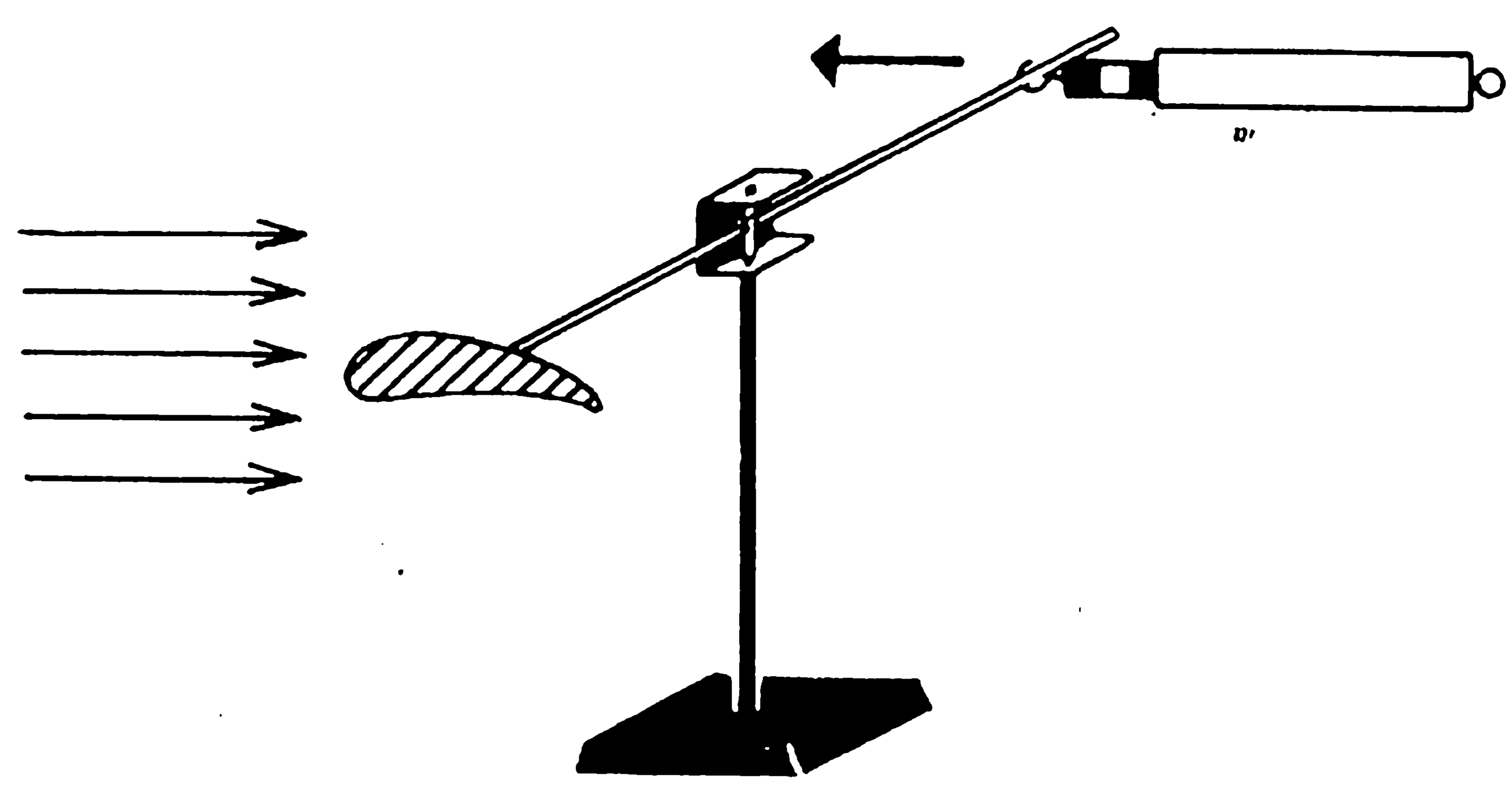
5.10 Obtekanie telies reálnou kvapalinou

Porovnajte energiu, ktorú musíte vynaložiť pri behu na vzduchu a vo vode. Porovnajte tvar tela vtákov a rýb s tvarom moderných lietadiel, lodí a ponoriek.

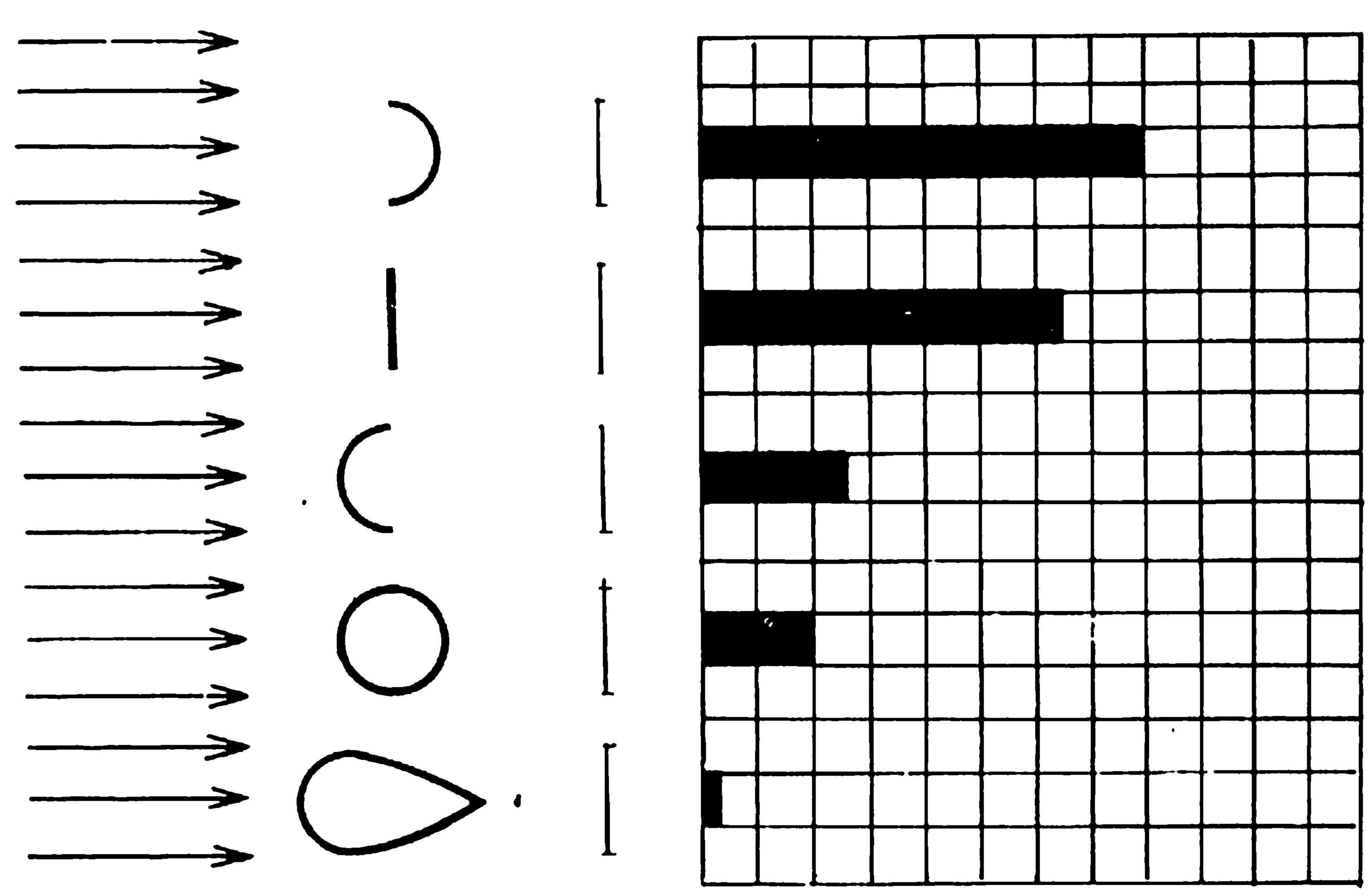
Obtekanie telesa tekutinou je zložitý jav. Pri relatívnom pohybe telesa a tekutiny sa častice telesa premiesťujú a uplatňujú sa sily trenia. Jav nazývame **odpor prostredia.**

Odporovou silou nazývame silu, ktorá vzniká pri vzájomnom pohybe telesa a tekutiny a pôsobí proti pohybu.

Skúmajme, od čoho závisí veľkosť odporovej sily. Na aerodynamické váhy dávame postupne telesá s nerovnakými profilmi a rovnakým prierezom kolmým na smer prúdenia vzduchu (obr. 5-20). Veľkosť odporovej sily meriame pri rovnakej rýchlosti vzduchu. Závislosť veľkosti odporovej sily od tvaru telesa je na obr. 5-21. Najväčšiu odporovú silu má dutá polguľa, najmenšiu teleso **aerodynamického tvaru.**



Obr. 5-20



Obr. 5-21

Keď dáme na váhy isté teleso a potom iné s rovnakým profilom, ale dvojnásobným prierezom, zistíme, že pri stálej rýchlosti vzduchu veľkosť odporovej sily sa zväčšila dvojnásobne.

Pre malé rýchlosti (t. j. rýchlosti, pri ktorých je prúdenie laminárne)

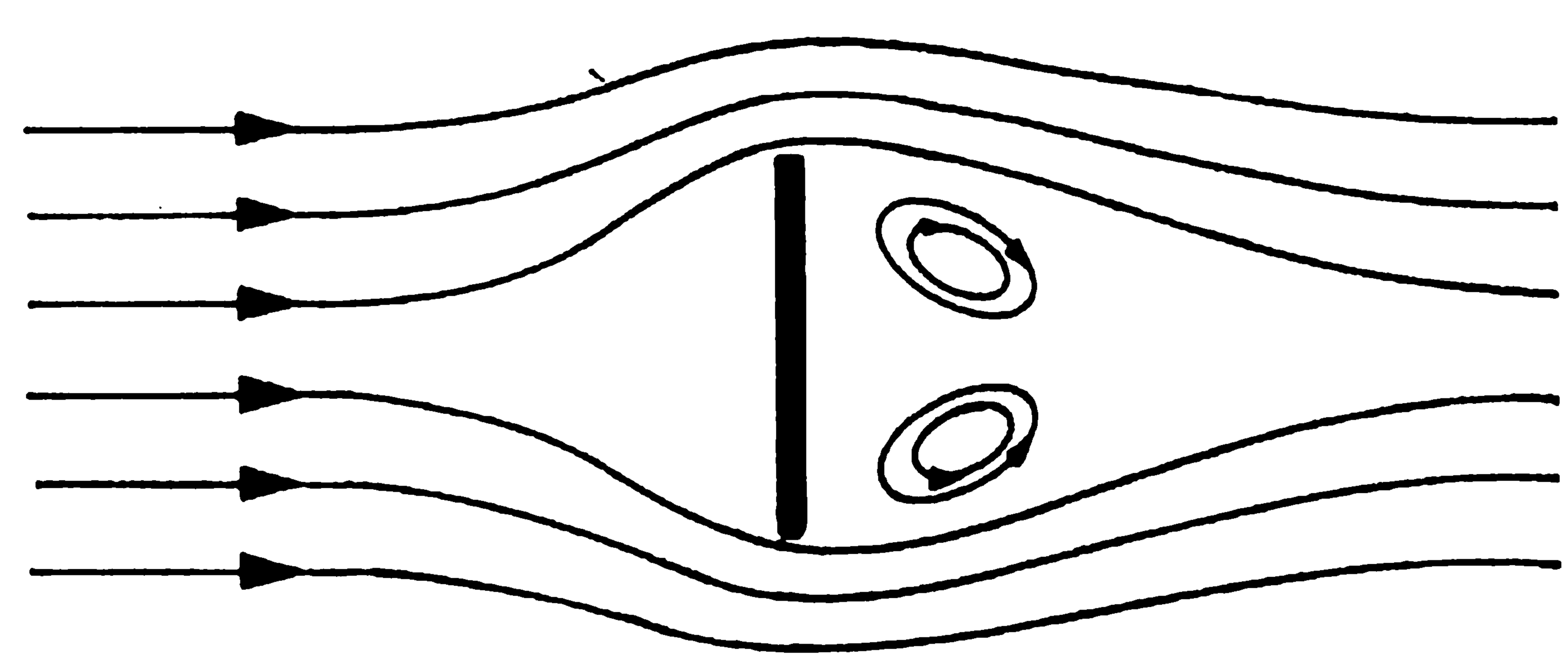
veľkosť odporovej sily je priamo úmerná veľkosti rýchlosti telesa vzhľadom na prostredie. Závislosť od tvaru sa prejavuje menej.

Pri väčších rýchlostiach (pri turbulentnom prúdení) sa odporová sila zväčšuje. Pre oblasť rýchlostí, ktorými lietajú vrtuľové lietadlá, alebo pre oblasť rýchlostí vo vode, ktorými sa pohybujú motorové lode, je veľkosť odporovej sily priamo úmerná druhej mocnine rýchlosti. Newton odvodil pre veľkosť odporovej sily vzťah

$$\boxed{F = C\frac{1}{2}\varrho\, S\, v^2}$$

kde C je **súčiniteľ odporu** a závisí od tvaru telesa (napr. pre dutú polguľu $C \doteq 1{,}4$; pre aerodynamický tvar $C \doteq 0{,}01$).

Aby sme mohli aspoň kvalitatívne vysvetliť to, čo sme povedali, budeme sledovať obtekanie telies kvapalinou so zafarbenými prúdovými vláknami. Do prístroja vložíme platňový profil. Pri prúdení sa tvoria za platňou víry, prúdenie sa stáva turbulentné (obr. 5-22). V oblasti, kde vznikajú víry, nastáva značný pokles tlaku a v dôsledku toho vzniká veľká odporová sila.



Obr. 5-22

Keď vložíme do prístroja namiesto platne aerodynamický profil, vidíme, že tvarom telesa sa zmenšuje možnosť vzniku vírov, a preto je odporová sila relatívne menšia.

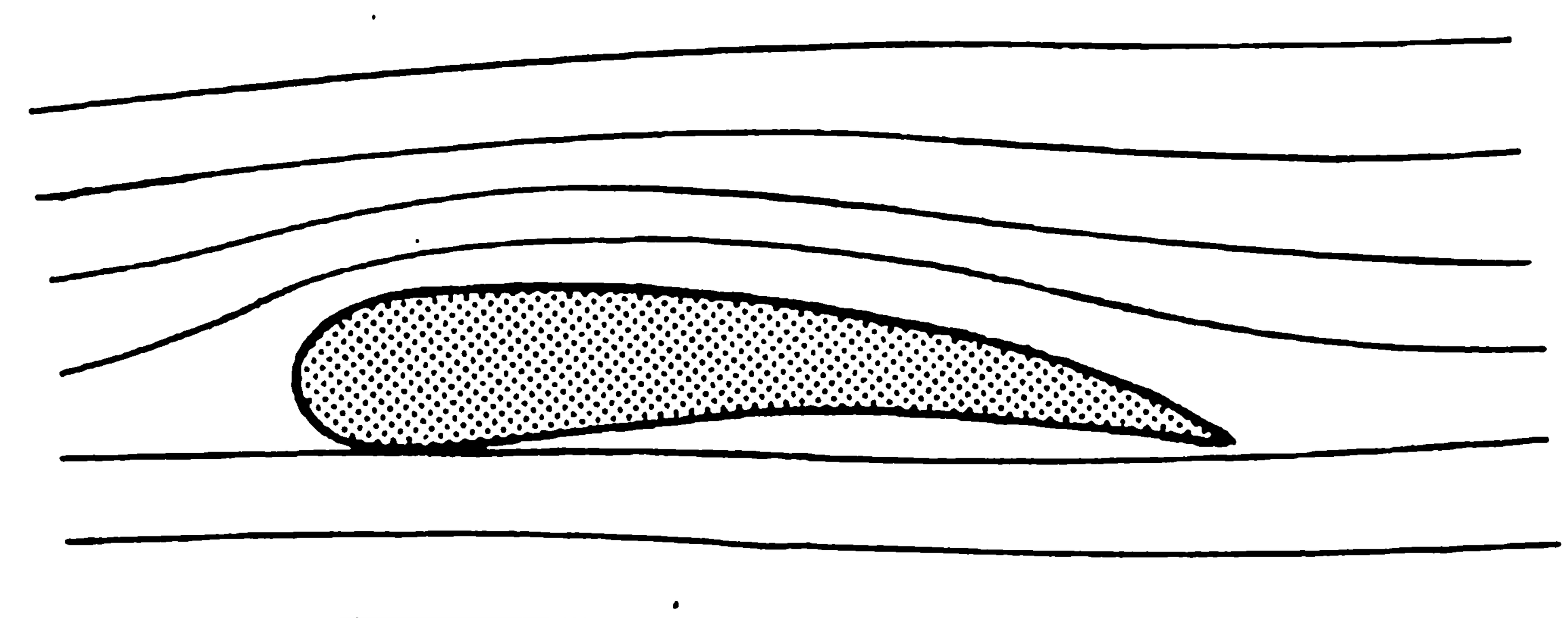
Odpor prostredia umožňuje pohyb plavca alebo lode vo vode, let vtákov alebo lietadiel vo vzduchu a podobne. Pri veľkých rýchlostiach odporová sila výrazne brzdí pohyb. Preto sa karosérie pretekárskych áut, motocyklov, lietadiel, pretekárskych člnov prispôsobujú aerodynamickému tvaru. Niekedy však naopak potrebujeme odporovú silu zväčšiť. Preto majú roztvorené padáky tvar polgule. Výsadkár po roztvorení padáka padá približne rovnomerným pohybom rýchlosťou s veľkosťou iba niekoľko metrov za sekundu, jeho tiaž (aj s výstrojom) je vyrovnaná odporovou silou.

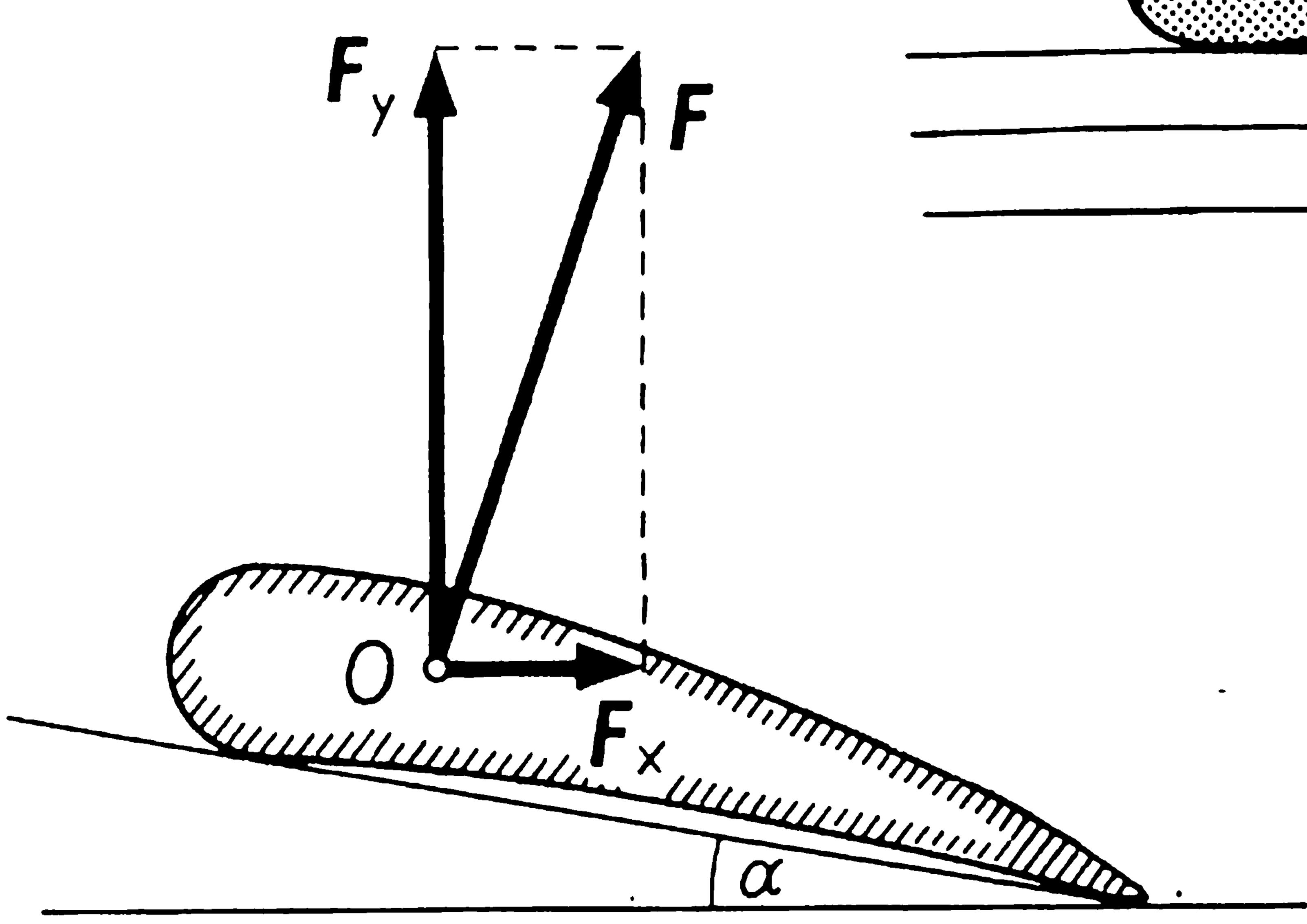
Keď je rýchlosť telesa vzhľadom na prostredie väčšia ako rýchlosť šírenia zvuku v danom prostredí, veľkosť odporovej sily je priamo úmerná tretej mocnine veľkosti rýchlosti a vzniká **rázová vlna,** ktorá je napr. príčinou silných **zvukových treskov** pri nízkom prelete nadzvukových lietadiel. Zákonitosti prúdenia s rýchlosťami väčšími ako rýchlosť zvuku v danom prostredí sa podstatne odlišujú od zákonitostí prúdenia s menšími rýchlosťami.

5.11 Základy fyziky letu

Pozorujme obtekanie profilu krídla kvapalinou (obr. 5-23). Utvorený obraz je modelom priebehu prúdnic. Vidíme, že nad krídlom nastáva zhustenie prúdnic, pod krídlom sa objaví ich zriedenie. Pokus dokazuje, že pri obtekaní profilu krídla sa nad krídlom objaví podtlak, pod krídlom pretlak (absolútna hodnota podtlaku je väčšia ako absolútna hodnota pretlaku).

Obr. 5-23





Obr. 5-24

Pri pohybe nesúmerného telesa vzhľadom na prostredie vzniká **aerodynamická sila** pôsobiaca na teleso. Smer aerodynamickej sily sa odchyľuje od smeru pohybu.

Uvažujme o profile krídla podľa obr. 5-24 (Žukovského* profil). Dotyčnicová rovina spodnej časti krídla zviera so smerom pohybu **uhol nábehu** α. Aerodynamickú silu $\boldsymbol{F}$ s pôsobiskom v bode O môžeme rozložiť na dve navzájom kolmé sily. Sila $\boldsymbol{F}_x$ je súhlasne orientovaná s rýchlosťou prúdiacej tekutiny pred krídlom a nazýva sa **odporová aerodynamická sila.** Sila $\boldsymbol{F}_y$ na ňu kolmá, orientovaná nad krídlo, nazýva sa **vztlaková aerodynamická sila.**

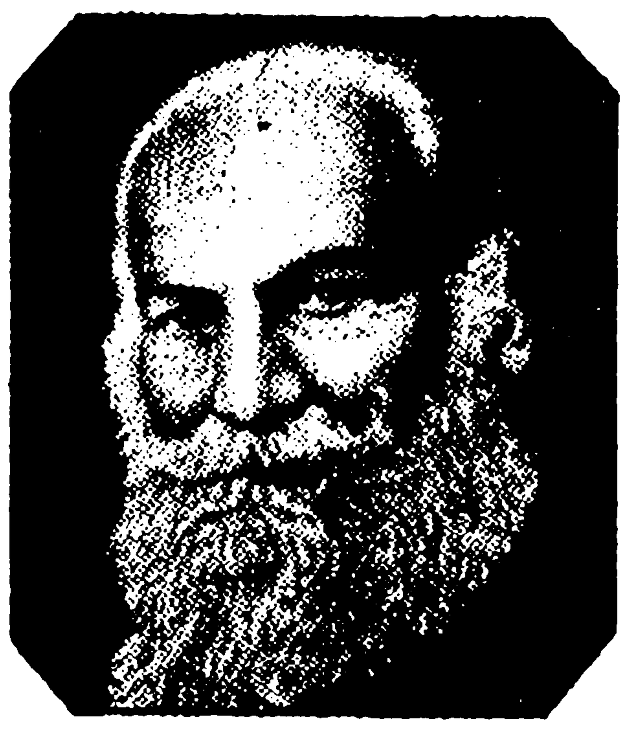
Veľkosti týchto síl vyjadrujú vzťahy

$$\boxed{F_x = C_x \frac{1}{2} \varrho S v^2 \qquad F_y = C_y \frac{1}{2} \varrho S v^2}$$

kde S je obsah kolmého priemetu nosnej plochy krídla na dotyčnicovú rovinu, C_x je **súčiniteľ odporu** a závisí od tvaru krídla, uhla nábehu, spôsobu obtekania krídla a pod.; C_y je **súčiniteľ vztlaku.**

Snahou konštruktérov lietadiel je dosiahnuť čo najväčšiu vztlakovú a čo najmenšiu odporovú aerodynamickú silu.

Pre fyziku letu lietadiel, ktoré lietajú rýchlosťami väčšími, ako je rýchlosť zvuku, platia iné zákonitosti. Preto profily krídel a trupov týchto lietadiel sa odlišujú od lietadiel, ktoré lietajú menšími rýchlosťami.



* NIKOLAJ JEGOROVIČ ŽUKOVSKIJ (1847—1921). Ruský vedec zaoberajúci sa teóriou lietania.

Úlohy

Hustota vzduchu v nasledujúcich úlohách je 1,3 kg.m^{-3}.

1. Akou veľkou odporovou silou je brzdená guľa, ktorá sa pohybuje vo vode rýchlosťou 5 m.s^{-1}, keď polomer gule je 5 cm ($C = 0{,}48$)? [47 N]
2. Výsadkár s hmotnosťou 80 kg zoskočí padákom polguľového tvaru s polomerom 5 m. Na akej rýchlosti sa ustáli rýchlosť jeho pádu ($C = 1{,}33$, $g = 9{,}81$ m.s^{-2})? [3,4 m.s^{-1}]
3. Automobil prekonáva odporovú silu vzduchu pri stálej rýchlosti 90 km.h^{-1} vzhľadom na pokojný vzduch. Obsah čelnej plochy automobilu kolmej na smer jazdy je 4 m^2. Určte vynaložený stratový výkon motora ($C = 0{,}55$). [22,3 kW]
4. Aká veľká je vztlaková aerodynamická sila, keď lietadlo letí rýchlosťou 360 km.h^{-1} a plocha kolmého priemetu nosnej plochy krídel na dotyčnicovú rovinu je 30 m^2? Súčiniteľ vztlaku je 0,45. [88 kN]

ZHRNUTIE — MECHANIKA KVAPALÍN A PLYNOV

Hydrostatický tlak je vyvolaný vlastnou tiažou kvapaliny. Tlak v kvapaline môže byť vyvolaný aj pôsobením vonkajšej sily (platí Pascalov zákon). V rôznych miestach pri povrchu ponoreného telesa je rozličný hydrostatický tlak. Rozdielnosť hydrostatického tlaku vyvoláva hydrostatickú vztlakovú silu (Archimedov zákon, plávanie telies).

Pomery v prúdiacej kvapaline môžeme znázorniť prúdnicami (laminárne a turbulentné prúdenie). Rýchlosť prúdenia ideálnej kvapaliny v trubici je nepriamo úmerná prierezu trubice (rovnica kontinuity — zákon zachovania hmotnosti). Zmena rýchlosti prúdiacej kvapaliny v trubici je sprevádzaná zmenou tlaku (Bernoulliho rovnica — zákon zachovania energie).

Vplyvom vnútorného trenia pri prúdení reálnej kvapaliny sa zmenšuje mechanická energia prúdiacej kvapaliny (prúdiaca kvapalina sa zohrieva). Pri obtekaní telies tekutinou vzniká odporová sila. Odporová sila je orientovaná proti smeru pohybu a jej veľkosť závisí od hustoty prostredia, od tvaru a rozmerov telesa a od relatívnej rýchlosti. Veľkosť odporovej sily so zväčšujúcou sa rýchlosťou sa zväčšuje s vyššími mocninami rýchlosti. Nesymetrický tvar obtekania telesa je príčinou aerodynamickej sily. Vhodný tvar krídel lietadiel umožňuje využiť pri lietaní aerodynamickú vztlakovú silu.

Veličiny	Jednotky	Zákony	Vzťahy
tlak p	Pa	Pascalov zákon	
	$\mathrm{Pa} = \mathrm{kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}}$		$p = \frac{F}{S}$
tlaková sila $\boldsymbol{F}$	N		$F = p\,S$
hydrostatický tlak p	Pa		$p = h\,\varrho\,g$
vztlaková sila $\boldsymbol{F}$		Archimedov zákon	

Veličiny	Jednotky	Zákony	Vzťahy
hmotnostný tok Q_m $[Q_m] = kg \, . \, s^{-1}$	$kg \, . \, s^{-1}$	zákon zachovania hmotnosti pre ideálnu kvapalinu	rovnica spojitosti $S \, v = konšt.$
		zákon zachovania energie pre ideálnu kvapalinu	Bernoulliho rovnica $p + \frac{1}{2} \varrho \, v^2 = konšt.$
odporová sila $\boldsymbol{F}$	N		$F = C \frac{1}{2} \varrho \, S \, v^2$
aerodynamická sila odporová $\boldsymbol{F}_x$	N		$F_x = C_x \frac{1}{2} \varrho \, S \, v^2$
vztlaková $\boldsymbol{F}_y$	N		$F_y = C_y \frac{1}{2} \varrho \, S \, v^2$

6. Gravitačné pole

6.1 Gravitácia. Newtonov gravitačný zákon

Zo skúsenosti vieme, že všetky telesá su priťahované k Zemi. Guľôčka voľne spustená z ruky padá zvislo nadol, lopta vrhnutá nahor sa vracia na Zem, telesá položené na vodorovnej podložke pôsobia na ňu tlakovou silou, zavesené telesá pôsobia ťahovou silou na záves.

Príčinou týchto javov je sila, ktorou pôsobí Zem na každé teleso, ktoré je v jej okolí. Táto sila pôsobí na telesá, ktoré sa bezprostredne stýkajú s povrchom Zeme, ale i na telesá, ktoré sa jej povrchu nedotýkajú.

Silové pôsobenie medzi Zemou a telesom je vzájomné. Podľa tretieho Newtonovho zákona pôsobí Zem na teleso a teleso na Zem. Skutočnosť, že sa prejavuje len pohybový účinok sily, ktorou Zem pôsobí na teleso, je spôsobená tým, že Zem má väčšiu hmotnosť ako teleso.

Vzájomné silové pôsobenie Zeme a telesa je iba jedným z osobitných prípadov všeobecnej vlastnosti všetkých telies. Túto vlastnosť nazývame **gravitácia.** Veľkými príťažlivými **gravitačnými silami** vzájomne na seba pôsobia Zem a Mesiac, Slnko a Zem a ostatné planéty slnečnej sústavy. Vzájomne sa priťahujú ľubovoľné dve telesá kdekoľvek vo svetovom priestore.

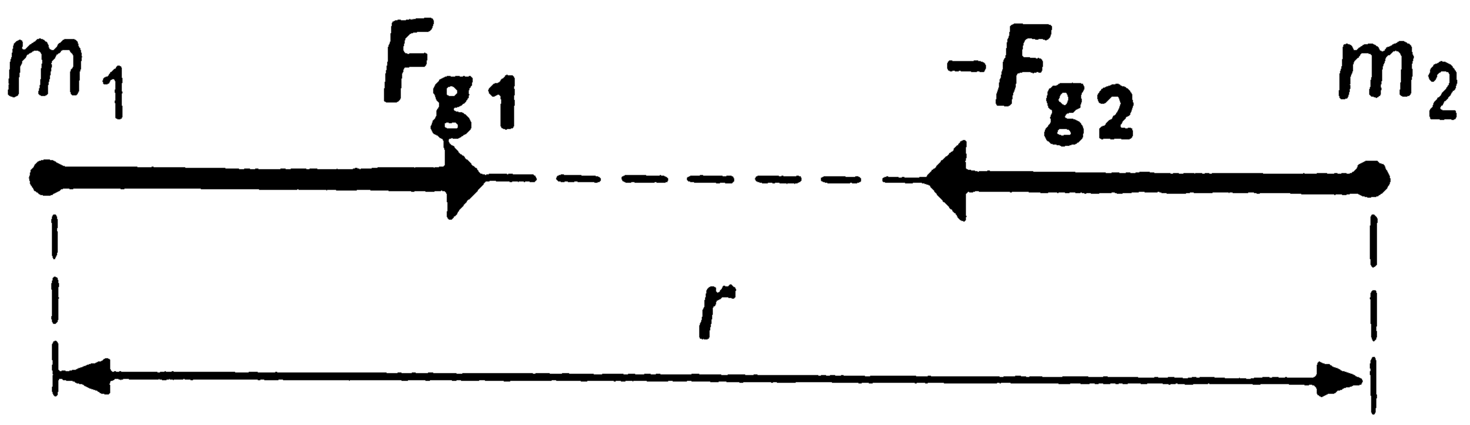
Vzájomnú príťažlivosť telies študoval Isaac Newton. Na základe štúdia pohybu Mesiaca okolo Zeme a pohybu planét okolo Slnka sformuloval **všeobecný gravitačný zákon.** Je to jeden z najdôležitejších fyzikálnych zákonov:

Dva hmotné body sa navzájom priťahujú rovnako veľkými gravitačnými silami, ale opačného smeru. Podľa obr. 6-1 platí $\boldsymbol{F}_{g1} = -\boldsymbol{F}_{g2}$, $F_g = |\boldsymbol{F}_{g1}| = |\boldsymbol{F}_{g2}|$. Veľkosť gravitačnej sily F_g je priamo úmerná súčinu hmotnosti m_1, m_2 hmotných bodov a nepriamo úmerná druhej mocnine ich vzdialenosti r. Platí teda

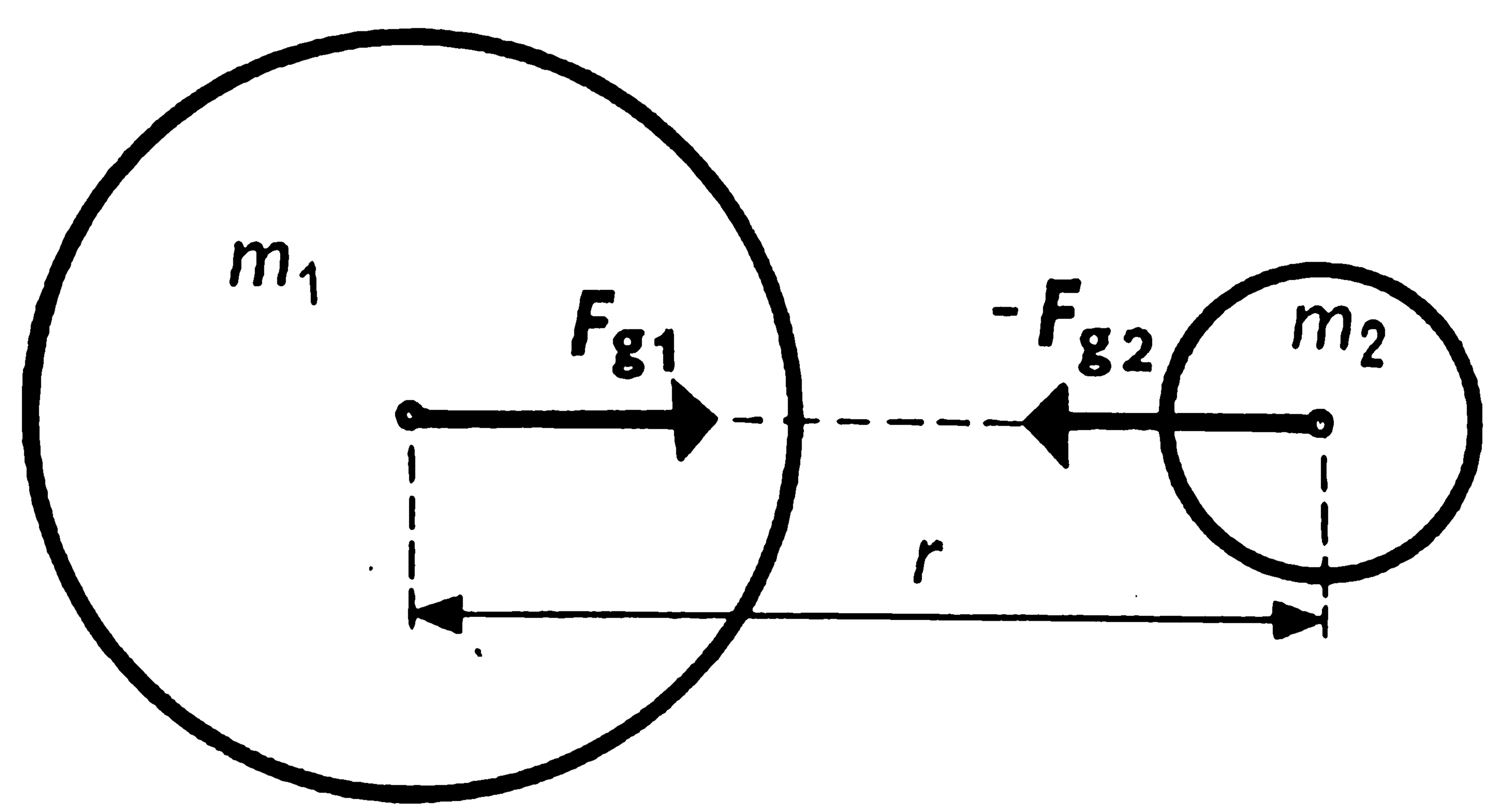
$$\boxed{F_g = |\boldsymbol{F}_g| = \varkappa \frac{m_1 m_2}{r^2}}$$

kde $\varkappa$ je **gravitačná konštanta.** Jej veľkosť určili experimentálne. Hodnota konštanty $\varkappa = 6,67 . 10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}.

Uvedený vzťah pre F_g platí pre dva hmotné body (obr. 6-1) alebo pre dve rovnorodé gule, ktorých stredy majú vzdialenosť r (obr. 6-2). Gravitačný zákon môžeme však použiť aj pre dve telesá, ktorých rozmery sú zanedbateľné vzhľadom na vzdialenosť medzi nimi, napr. pre dvojicu telies Zem—Mesiac, Slnko—Zem.



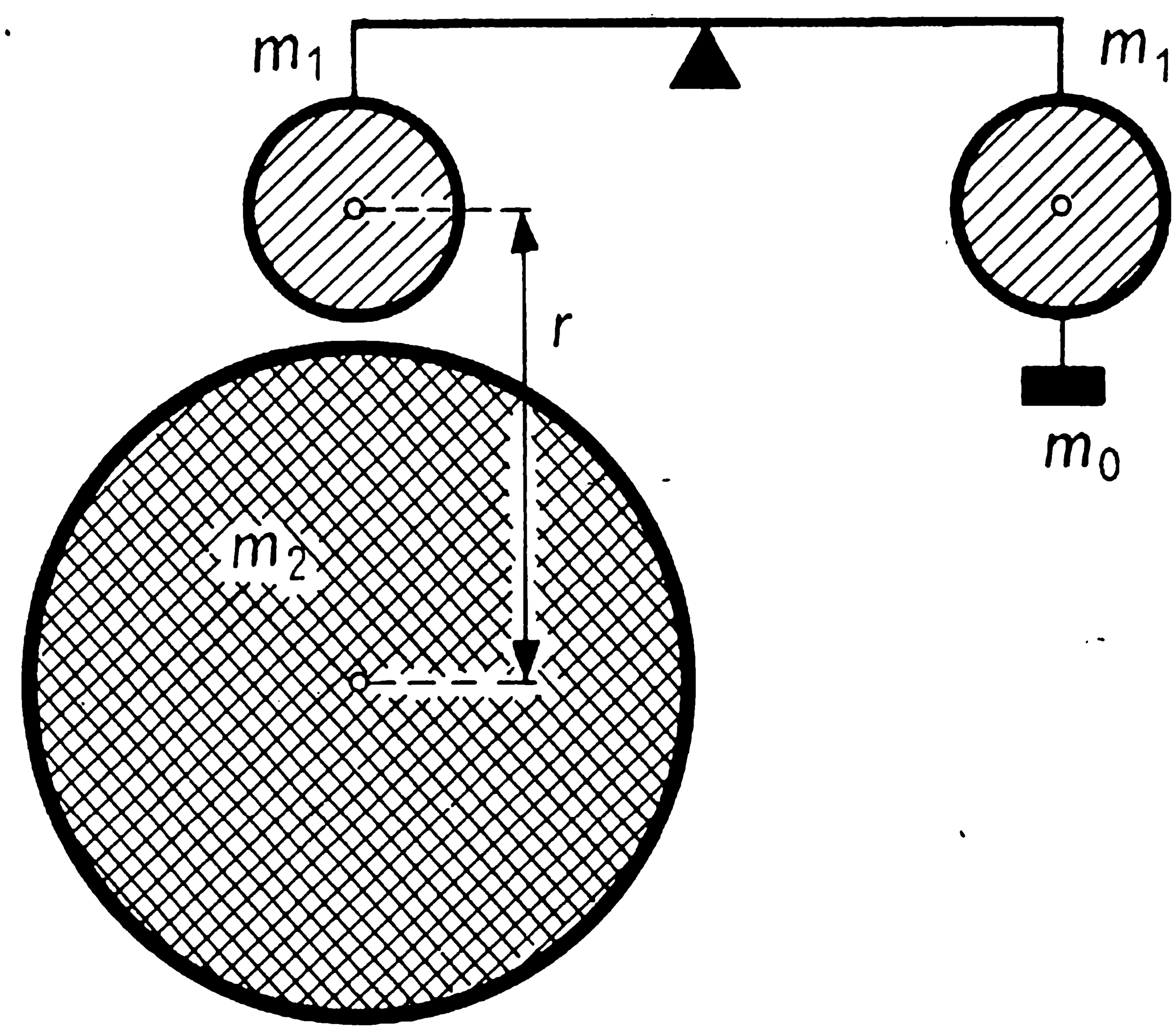
Obr. 6-1



Obr. 6-2

Z veľmi malej číselnej hodnoty gravitačnej konštanty vyplýva, že vzájomné gravitačné sily medzi telesami bežných hmotností sú také malé, že bez použitia citlivých prístrojov ich nemôžeme zistiť. Napríklad dve rovnorodé gule s hmotnosťami $m_1 = m_2 = 1$ kg sa navzájom priťahujú pri vzdialenosti $r = 1$ m gravitačnou silou veľkosti $F_g \doteq 6,67 . 10^{-11}$ N. Gravitačné sily sa prejavujú iba vtedy, keď hmotnosť aspoň jedného telesa je veľmi veľká.

Malá hodnota gravitačnej konštanty spôsobuje, že jej presné meranie je veľmi ťažké. Preto ju zmerali až takmer o 100 rokov po vyslovení gravitačného zákona. Jednu z metód merania gravitačnej konštanty znázorňuje obr. 6-3: Na vahadle citlivých rovnoramenných váh vyvážime dve rovnorodé gule s rovnakými hmotnosťami m_1. Keď umiestime pod



Obr. 6-3

guľu vľavo olovenú guľu s hmotnosťou m_2, vahadlo klesne vľavo. Rovnovážnu polohu vahadla obnovíme, keď ku guli vpravo pridáme teliesko s hmotnosťou m_0. Keď poznáme hmotnosť guli m_1 a m_2, vzdialenosť ich stredov r a veľkosť gravitačnej sily F_g, ľahko určíme z gravitačného zákona konštantu $\varkappa$.

Úlohy

1. Z gravitačného zákona odvoďte: a) vzťah na výpočet gravitačnej konštanty, b) jednotku gravitačnej konštanty.
2. Prečo nepozorujeme vzájomné gravitačné silové pôsobenie medzi telesami, ktoré nás obklopujú?
3. Dva hmotné body, z ktorých každý má hmotnosť m, priťahujú sa zo vzdialenosti r gravitačnou silou 12 N. Akou veľkou gravitačnou silou sa priťahujú hmotné body: a) zo vzdialenosti $2r$; b) zo vzdialenosti $\frac{r}{2}$; c) zo vzdialenosti r, keď hmotnosť jedného bodu je $2m$; d) zo vzdialenosti $2r$, keď hmotnosť každého bodu je $2m$? [3 N; 48 N; 24 N; 12 N]
4. Akou veľkou gravitačnou silou pôsobí Zem na Mesiac, keď stredná vzdialenosť Mesiaca od Zeme je 385 000 km? Hmotnosť Zeme $M_Z = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, hmotnosť Mesiaca $m = 7{,}38 \cdot 10^{22}$ kg. [asi $2 \cdot 10^{20}$ N]
5. Vysvetlite príčinu vzniku prílivu a odlivu na morskom pobreží.

6.2 Intenzita gravitačného poľa

Vzájomné gravitačné pôsobenie telies je sprostredkované gravitačným poľom. **Gravitačné pole** existuje v okolí každého telesa. Svoje gravitačné pole má Zem, Mesiac, Slnko, hviezdy vo vesmíre, ale aj všetky telesá na povrchu Zeme.

Zdrojom gravitačného poľa sú hmotné telesá. Gravitačné pole sa prejavuje silovým pôsobením na iné hmotné telesá. **Gravitačné pole má hmotnú povahu. Je určitou formou hmoty,** ktorá existuje nezávisle od nášho vedomia.

Poznámka: Vo fyzike rozlišujeme **dve základné formy hmoty:** látku a pole. V základnej škole ste sa oboznámili s pevnými, kvapalnými a plynnými látkami a okrem gravitačného poľa aj s magnetickým a elektrickým poľom.

Silové pôsobenie gravitačného poľa v danom mieste poľa charakterizuje fyzikálna veličina **intenzita gravitačného poľa $\boldsymbol{K}$. Definujeme ju ako podiel gravitačnej sily $\boldsymbol{F}_g$, ktorá pôsobí na teleso s hmotnosťou m v danom mieste poľa a hmotnosti m tohto telesa.** Teda

$$\boxed{\boldsymbol{K} = \frac{\boldsymbol{F}_g}{m}}$$

Intenzita gravitačného poľa $\boldsymbol{K}$ je vektorová veličina. Má rovnaký smer ako gravitačná sila, ktorou gravitačné pole pôsobí v danom mieste na teleso. Jednotkou intenzity je $N.kg^{-1}$. Gravitačné pole má v danom mieste poľa intenzitu $1\ N.kg^{-1}$, keď gravitačné pole pôsobí v tomto mieste poľa na teleso s hmotnosťou 1 kg gravitačnou silou 1 N.

Z definície intenzity gravitačného poľa vyplýva vzťah $\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{K}$. Podľa druhého pohybového zákona platí pre gravitačnú silu aj vzťah $\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{a}_g$, kde $\boldsymbol{a}_g$ je zrýchlenie, ktoré udeľuje telesu v danom mieste gravitačná sila $\boldsymbol{F}_g$. Zrýchlenie $\boldsymbol{a}_g$ sa nazýva gravitačné zrýchlenie.

Porovnaním vzťahov $\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{K}$ a $\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{a}_g$ dostaneme vzťah

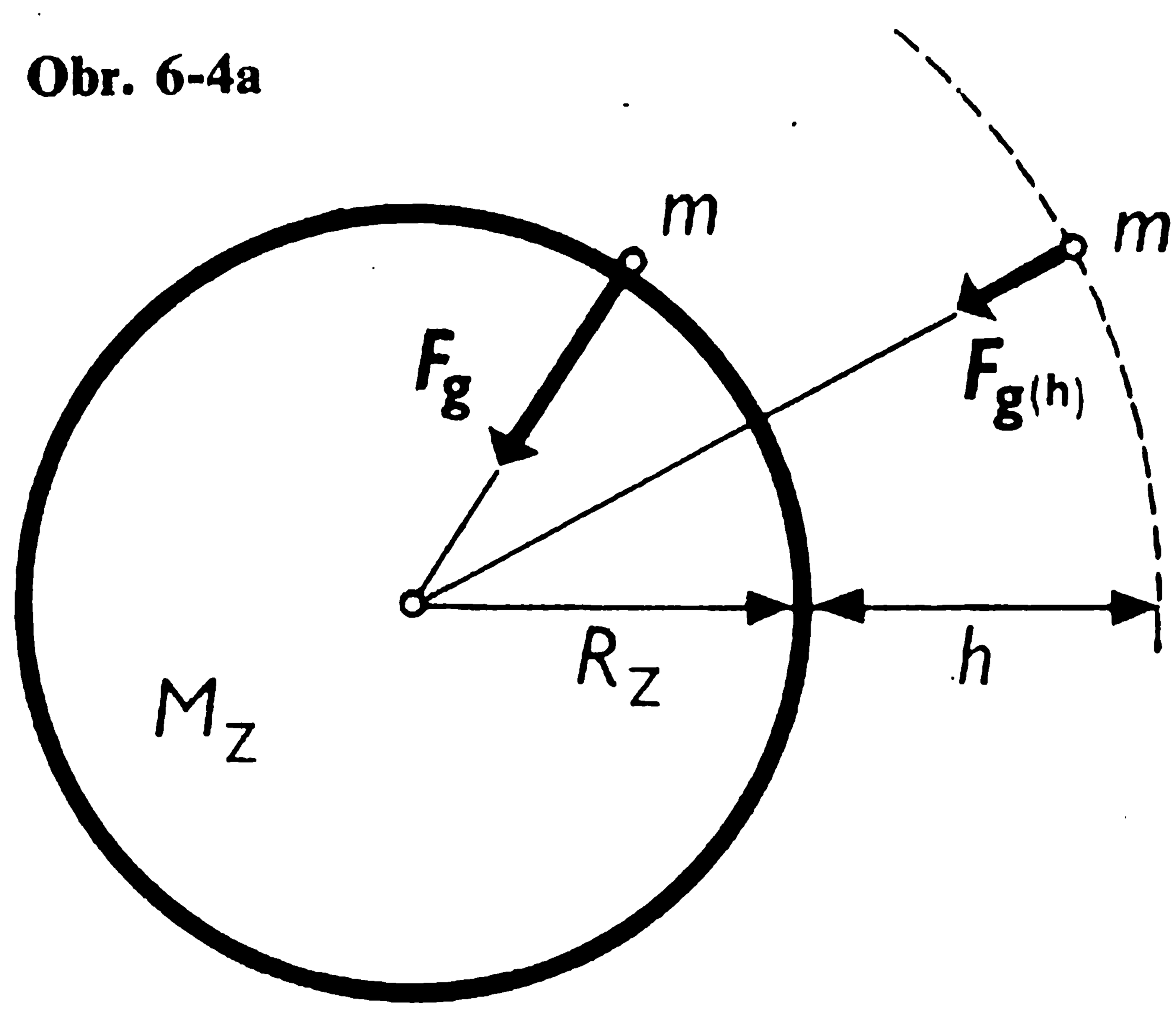
$$\boxed{\boldsymbol{K} = \boldsymbol{a}_g}$$

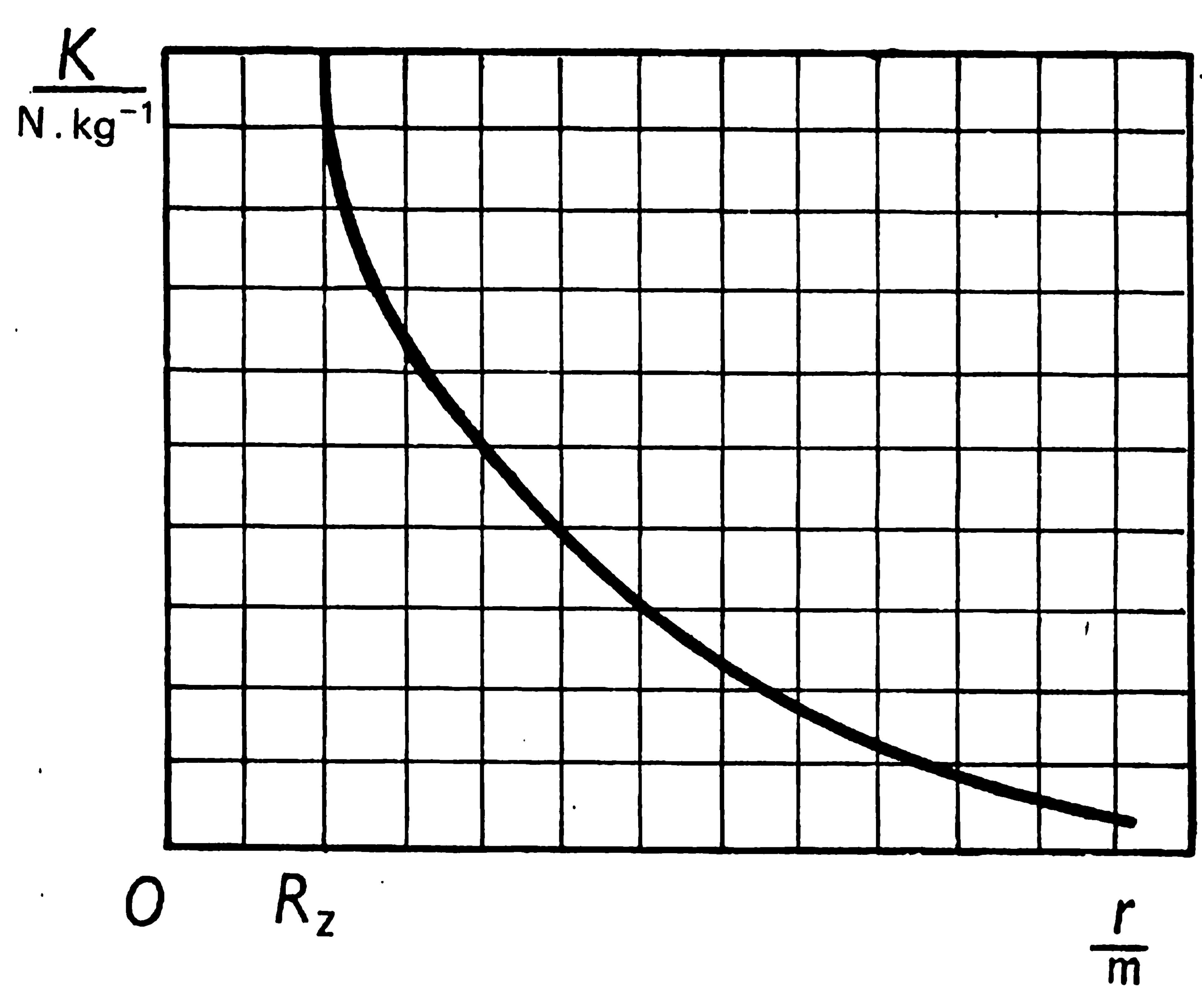
Intenzita gravitačného poľa v danom mieste poľa sa rovná gravitačnému zrýchleniu.

Pozorujme gravitačné pole Zeme. Zem považujme za rovnorodú guľu s hmotnosťou M_Z a polomerom R_Z. Podľa Newtonovho gravitačného zákona pôsobí na teleso s hmotnosťou m vo výške h nad zemským povrchom (obr. 6-4a) gravitačná sila veľkosti

$$F_{g(h)} = \varkappa \frac{m\, M_Z}{(R_Z + h)^2}$$

Obr. 6-4a





Obr. 6-4b

Na to isté teleso na povrchu Zeme ($h = 0$) pôsobí gravitačná sila veľkosti

$$F_g = \varkappa \frac{m\, M_Z}{R_Z^2}$$

Intenzita gravitačného poľa Zeme má v týchto miestach veľkosť

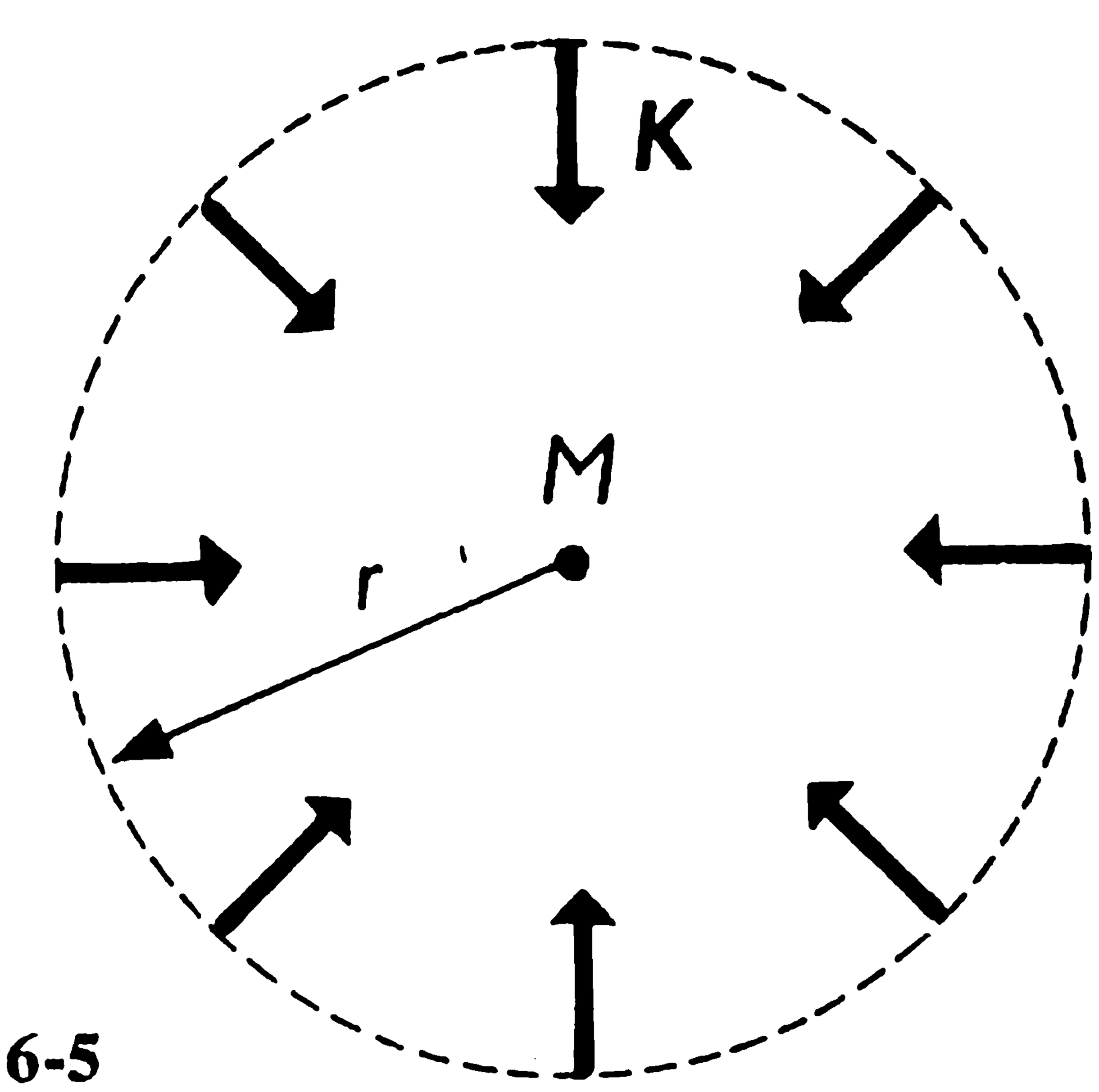
$$K_{(h)} = \frac{\varkappa\, M_Z}{(R_Z + h)^2} \quad \text{a} \quad K = \frac{\varkappa\, M_Z}{R_Z^2}$$

Pretože $R_Z + h > R_Z$, je $K_{(h)} < K$. Veľkosť intenzity gravitačného poľa sa so zväčšujúcou vzdialenosťou od povrchu Zeme zmenšuje. Gravitačné pole Zeme má najväčšiu intenzitu tesne nad povrchom Zeme (obr. 6-4b).

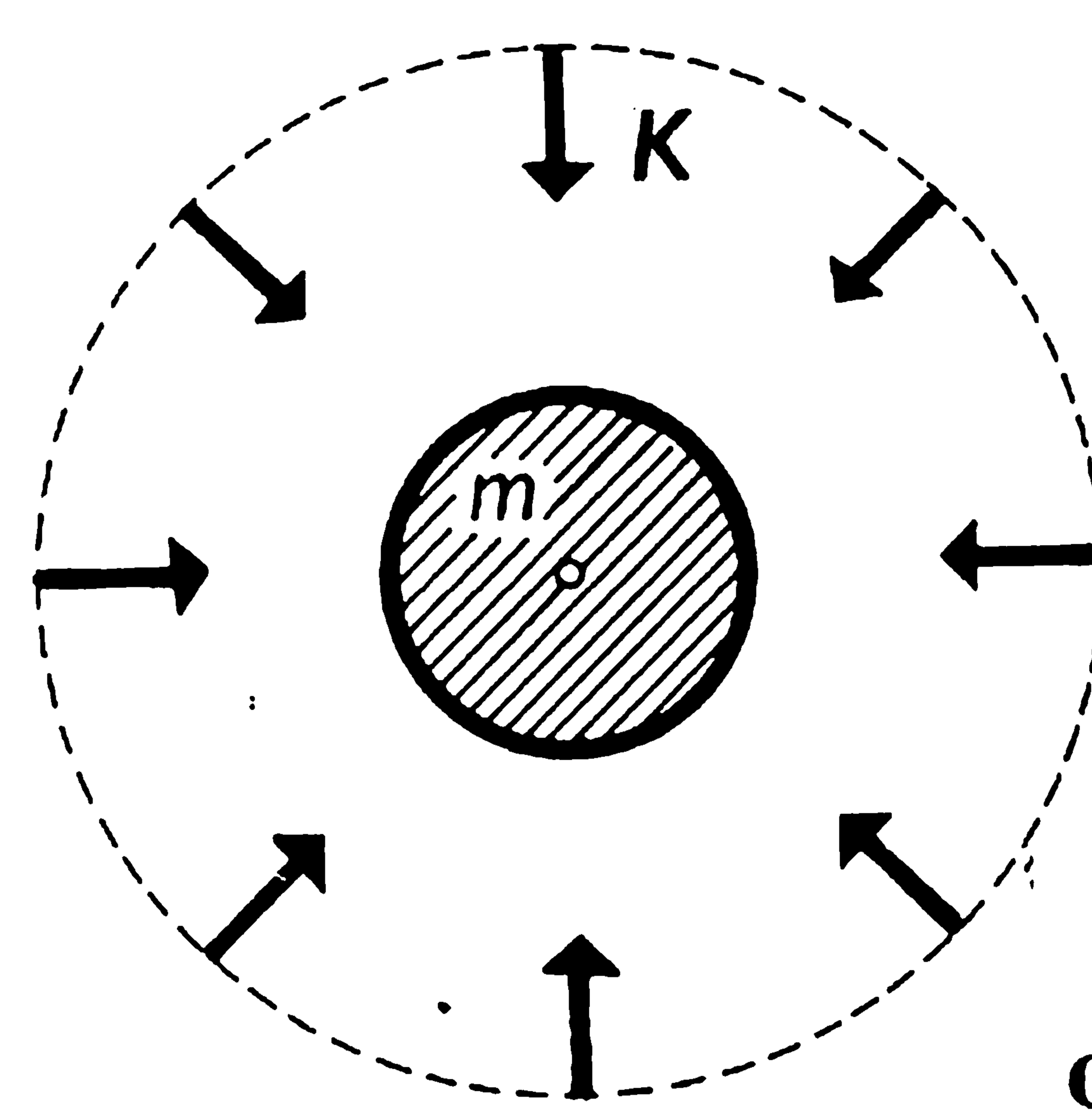
Posledné vzťahy pre intenzitu gravitačného poľa súčasne určujú veľkosť gravitačného zrýchlenia a_g, ktoré udeľuje telesu v daných miestach gravitačná sila.

Gravitačné pole Zeme je približne radiálne. **Radiálne** alebo **centrálne gravitačné pole** je v okolí hmotného bodu (obr. 6-5) alebo v okolí rovnorodej gule (obr. 6-6). Hmotný bod alebo stred gule predstavuje gravitačný stred poľa. Pre radiálne gravitačné pole je charakteristické to, že intenzita $\boldsymbol{K}$ vo všetkých miestach poľa smeruje do gravitačného stredu.

Pri skúmaní pohybov, ktoré prebiehajú vo vymedzenej oblasti gravitačného poľa (napr. v kocke s hranou 1 km), sa intenzity gravitačného poľa v jednotlivých bodoch tejto oblasti od seba odlišujú čo do veľkosti a smeru len nepatrne. Tieto malé rozdiely môžeme zanedbať a intenzitu gravitačného poľa v tejto oblasti môžeme považovať za konštantnú. Takéto



Obr. 6-5

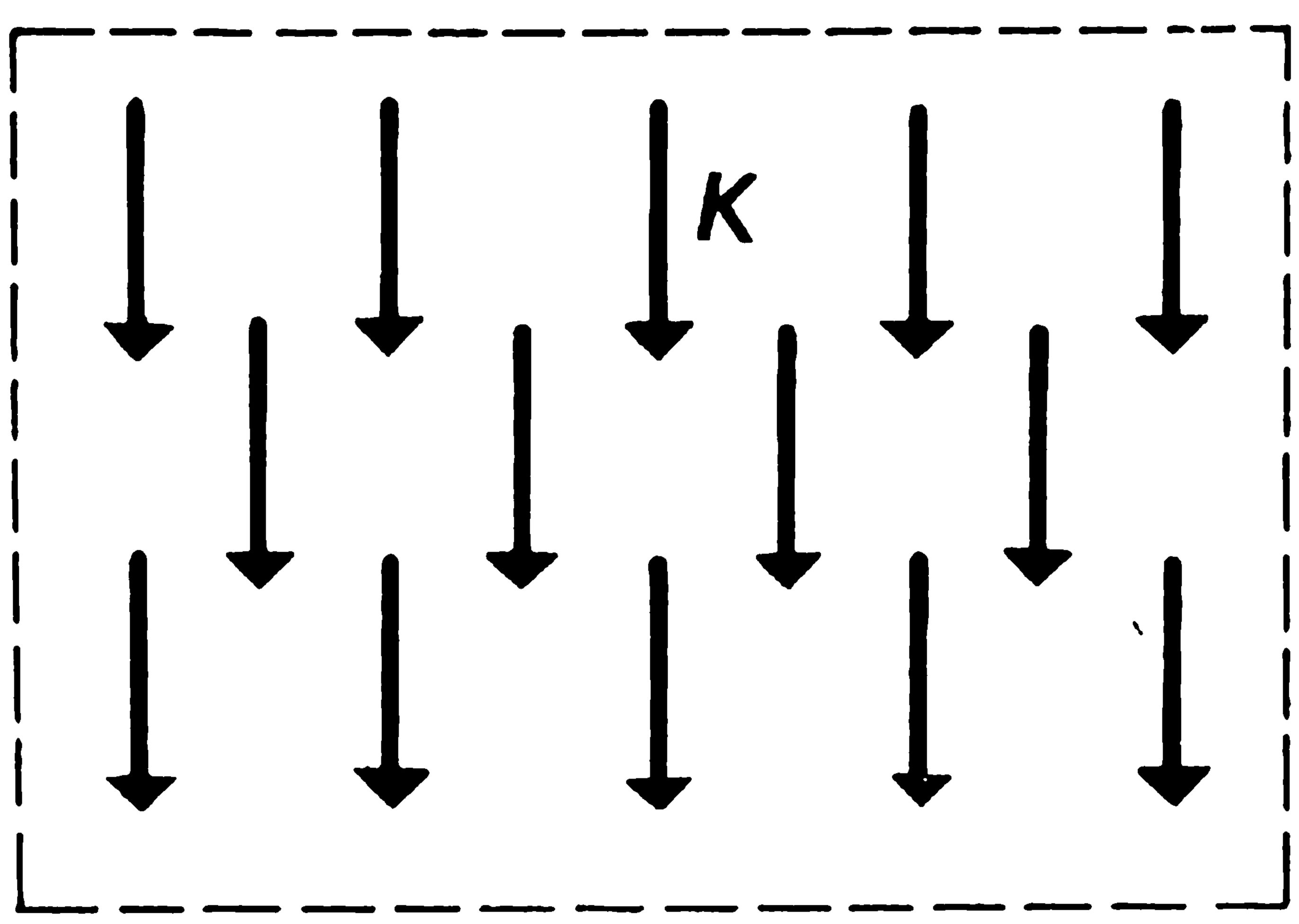


Obr. 6-6

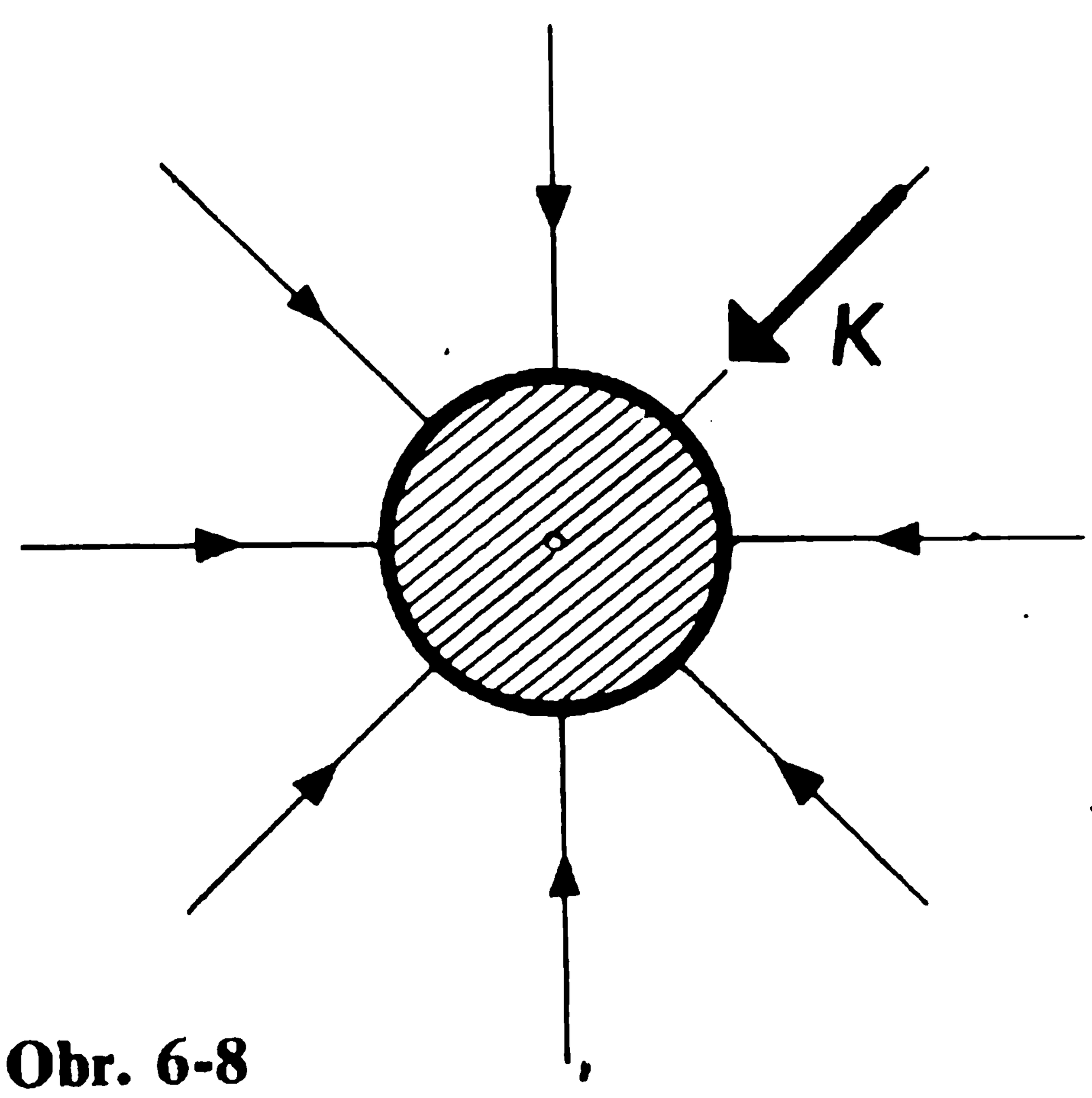
zidealizované gravitačné pole nazývame **homogénne gravitačné pole.** Homogénne gravitačné pole má vo všetkých miestach konštantný vektor intenzity (obr. 6-7).

Keď opisujeme gravitačné pole pomocou intenzity ***K***, utvárame jeho matematický model, ktorým je **vektorové pole.** Každému bodu gravitačného poľa je jednoznačne priradený príslušný vektor intenzity ***K***. Na obr. 6-5 a 6-6 sú zobrazené matematické modely radiálneho gravitačného poľa, vektorové pole na obr. 6-7 je matematickým modelom homogénneho gravitačného poľa (vektory sú zakreslené len v niektorých bodoch).

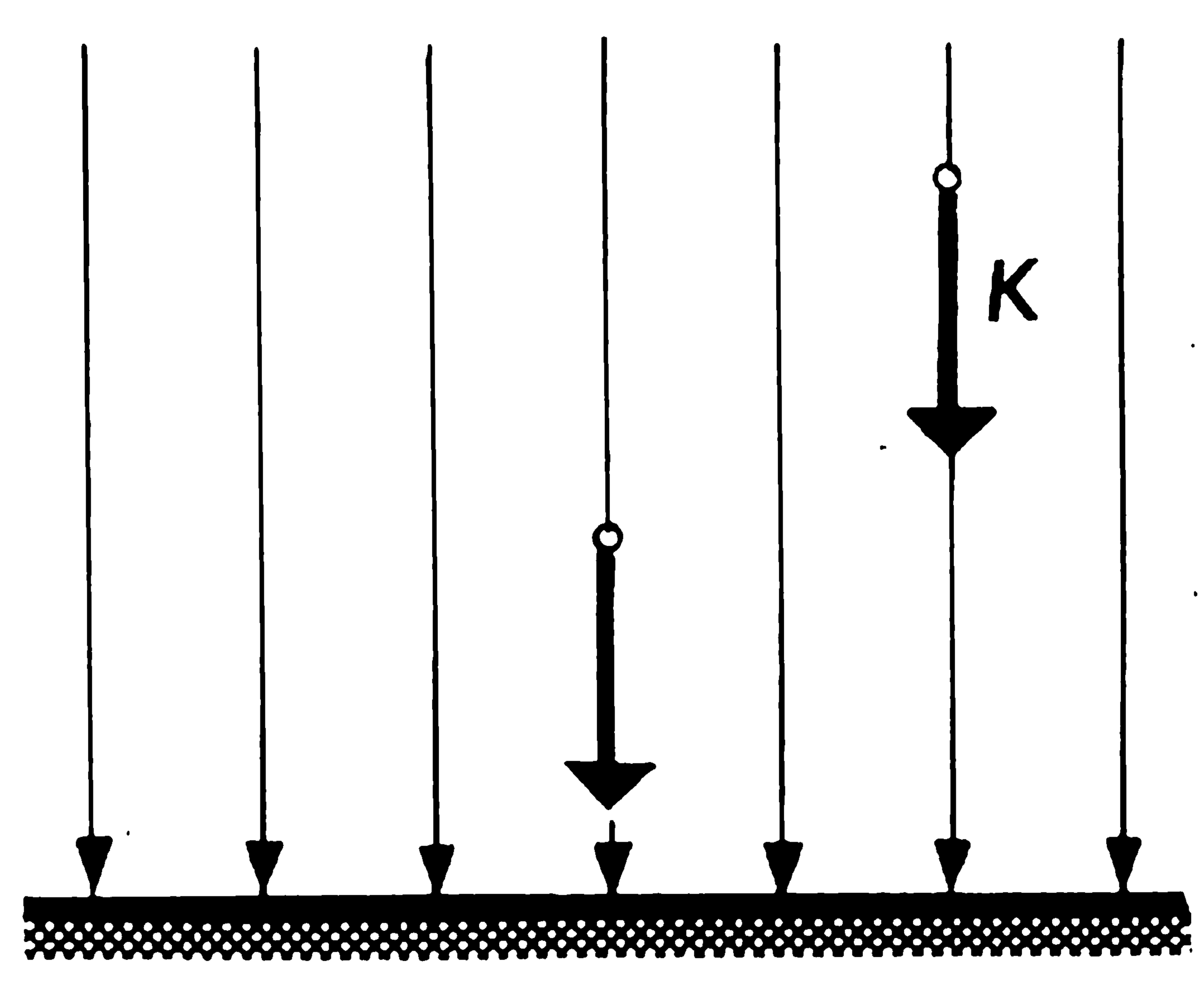
Iným modelom gravitačného poľa je siločiarový model založený na predstave siločiar. **Siločiara** je myslená čiara, ktorej dotyčnica zostrojená v každom jej bode určuje smer intenzity gravitačného poľa ***K***. Siločiarový model radiálneho poľa je na obr. 6-8, siločiarový model homogénneho poľa je na obr. 6-9.



Obr. 6-7



Obr. 6-8



Obr. 6-9

Úlohy

1. Vyjadrite jednotku intenzity gravitačného poľa pomocou základných jednotiek a porovnajte ju s jednotkou zrýchlenia.
2. Intenzita gravitačného poľa pri povrchu Zeme je približne $10\ \mathrm{N.kg^{-1}}$. Určte veľkosť intenzity vo vzdialenosti h od povrchu Zeme, ak: a) $h = R_Z$; b) $h = 4R_Z$. [$2{,}5\ \mathrm{N.kg^{-1}}$; $0{,}4\ \mathrm{N.kg^{-1}}$]
3. V akej vzdialenosti od povrchu Zeme je intenzita gravitačného poľa 100-krát menšia ako na jej povrchu? [$2R_Z$]
4. Intenzita gravitačného poľa Mesiaca je pri jeho povrchu $1{,}6\ \mathrm{N.kg^{-1}}$. Aká veľká gravitačná sila pôsobí na povrchu Mesiaca na teleso s hmotnosťou: a) 1 kg; b) 70 kg? [1,6 N; 112 N]
5. Určte hmotnosť Zeme za predpokladu guľového modelu Zeme s polomerom 6 400 km, ak veľkosť gravitačného zrýchlenia na povrchu Zeme je $9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$. [$6{,}0.10^{24}$ kg]

6.3 Gravitačné a tiažové zrýchlenie na povrchu Zeme

Z dynamiky viete, že v mnohých úvahách môžeme považovať sústavu súradníc spojenú s povrchom Zeme za inerciálnu vzťažnú sústavu. V skutočnosti však Zem obieha okolo Slnka a zároveň sa otáča okolo vlastnej osi. Z hľadiska vzťažnej sústavy, ktorá je spojená s otáčajúcou sa Zemou, je sústava súradníc spojená s jej povrchom neinerciálnou vzťažnou sústavou, ktorá sa vzhľadom na inerciálnu vzťažnú sústavu otáča stálou uhlovou rýchlosťou ω (vplyv obehu Zeme okolo Slnka zanedbáme). V takomto prípade pôsobí na všetky telesá, ktoré neležia na osi otáčania, zotrvačná odstredivá sila $\boldsymbol{F}_0$, ktorá smeruje od tejto osi. Pre veľkosť tejto sily platí

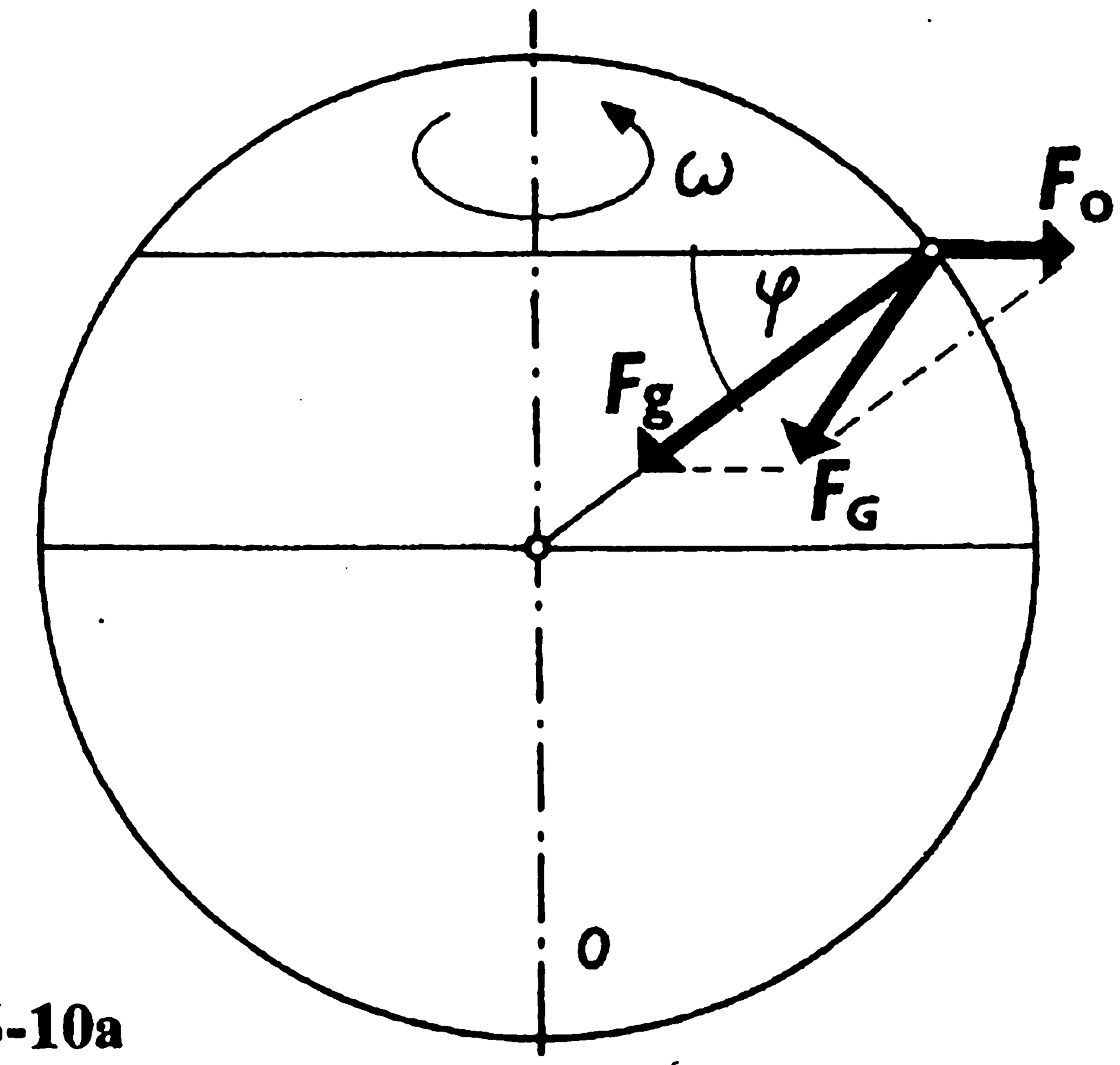
$$F_0 = m\omega^2 r = m\omega^2 R_Z \cos\varphi,$$

kde m je hmotnosť telesa, r vzdialenosť telesa od osi rotácie, ω uhlová rýchlosť otáčania Zeme a φ zemepisná šírka.

Na teleso s hmotnosťou m, ktoré je na povrchu Zeme, pôsobia dve sily: gravitačná sila $\boldsymbol{F}_g$, ktorá smeruje do stredu Zeme a odstredivá sila $\boldsymbol{F}_0$, ktorá je kolmá na rotačnú os (obr. 6-10a).

V neinerciálnej sústave, ktorá je spojená so Zemou, pôsobí teda na teleso s hmotnosťou m výslednica gravitačnej sily $\boldsymbol{F}_g$ a zotrvačnej odstredivej sily $\boldsymbol{F}_0$. Nazýva sa **tiažová sila** $\boldsymbol{F}_G$

$$\boxed{\boldsymbol{F}_G = \boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{F}_0}$$



Obr. 6-10a

Pôsobením tiažovej sily koná voľne spustené teleso vo vákuu voľný pád so zrýchlením g. Toto zrýchlenie sa nazýva tiažové zrýchlenie (pozri s. 66).

$$\boxed{\boldsymbol{F}_G = m\,\boldsymbol{g}}$$

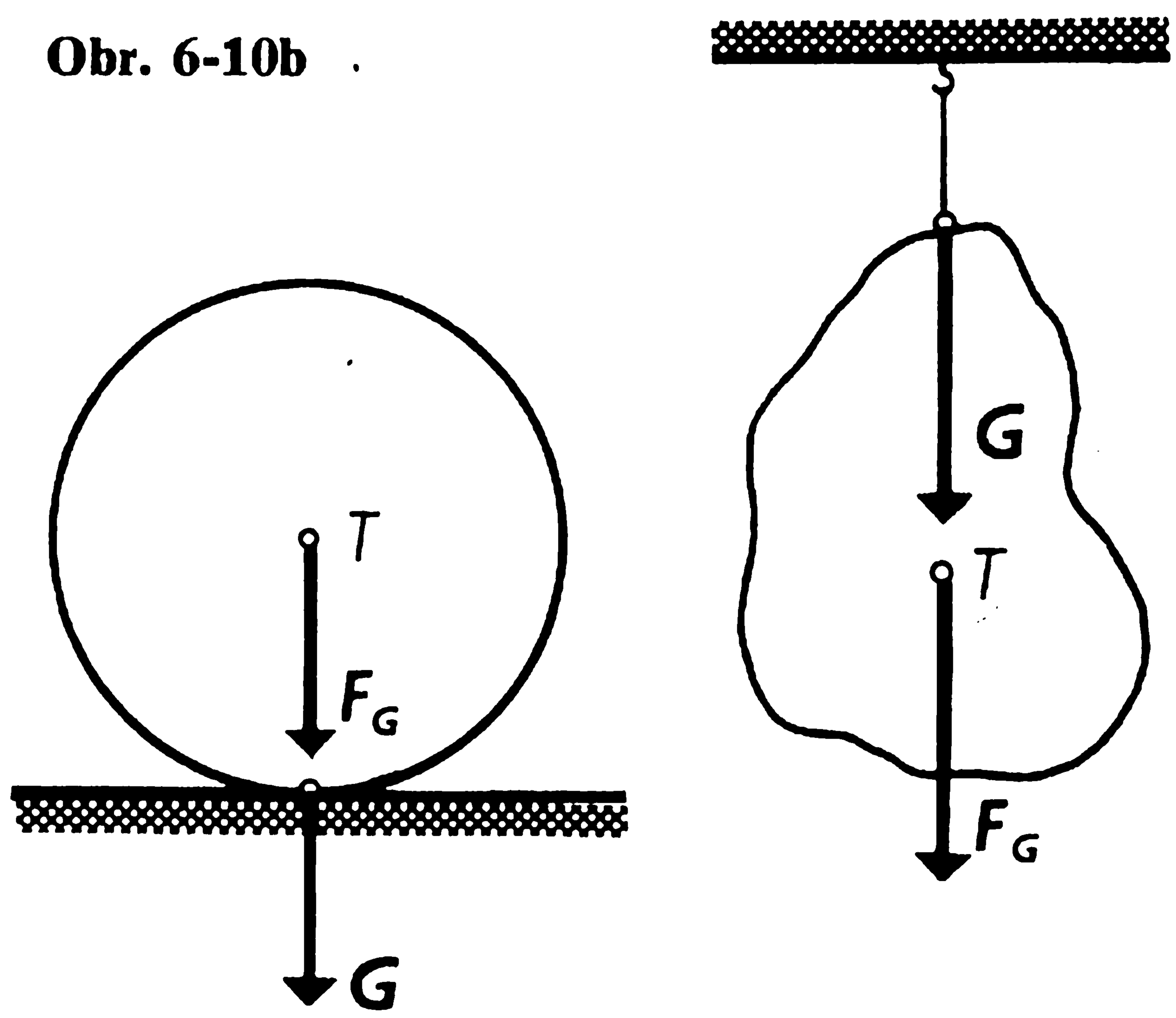
Smer tiažovej sily $\boldsymbol{F}_G$ a smer tiažového zrýchlenia $\boldsymbol{g}$ sa volá zvislý smer a určíme ho podľa smeru napnutej nite voľne zavesenej olovnice. Priestor okolo Zeme, v ktorom sa prejavujú účinky tiažovej sily, volá sa aj **tiažové pole.**

Keďže veľkosť zotrvačnej odstredivej sily $\boldsymbol{F}_0$ sa mení so zemepisnou šírkou polohy telesa na povrchu Zeme (najväčšia je na rovníku, nulová na zemepisných póloch), mení sa so zemepisnou šírkou i veľkosť tiažovej sily $\boldsymbol{F}_G$ a tiažového zrýchlenia $\boldsymbol{g}$. Na rovníku má tiažové zrýchlenie veľkosť 9,780 $m.s^{-2}$, na póloch 9,833 $m.s^{-2}$. U nás má tiažové zrýchlenie hodnotu približne 9,81 $m.s^{-2}$. Na metrologické účely (náuka o meraní) sa zavádza normálne tiažové zrýchlenie s veľkosťou $g_n = 9{,}806\,65$ m . s^{-2} (pozri s. 45).

Okrem pojmu tiažová sila používame aj pojem **tiaž telesa** G. Tento pojem poznáte zo základnej školy. Je to sila, ktorá má pôvod v tiažovom poli Zeme. Tiaž telesa sa prejavuje napr. ako tlaková sila, ktorou pôsobí teleso na nehybnú vodorovnú podložku, alebo ako ťažná sila, ktorou pôsobí teleso na nehybný zvislý záves (pozri s. 66).

Pôsobisko tiažovej sily leží v ťažisku telesa (pozri s. 127). Pôsobisko tiaže telesa dávame do dotykovej plochy telesa s podložkou alebo do pevného bodu závesu (obr. 6-10b). Tiaž telesa v pokoji má na istom mieste na povrchu Zeme rovnakú veľkosť i smer ako tiažová sila: $F_G = G$; $\boldsymbol{F}_G \parallel \boldsymbol{G}$.

Obr. 6-10b



Keď sa prejavuje účinok tiaže telesa na podložku alebo na záves, teleso je **v stave tiaže.** Ak sa tento účinok neprejavuje, hovoríme o **beztiažovom stave.** V beztiažovom stave je napr. telo kozmonauta vzhľadom na kozmickú loď, kým táto voľne padá v gravitačnom poli.

Existencia tiažového poľa Zeme umožňuje **určiť hmotnosť telies** vážením na rovnoramenných váhach. Pri vážení pôsobí na jednu misku váh tiaž telesa $\boldsymbol{G}_1 = m_1 \boldsymbol{g}$, na druhú misku tiaž závažia $\boldsymbol{G}_2 = m_2 \boldsymbol{g}$. Rovnováha na váhach nastane, ak $\boldsymbol{G}_1 = \boldsymbol{G}_2$, a teda $m_1 \boldsymbol{g} = m_2 \boldsymbol{g}$. Keďže tiažové zrýchlenie $\boldsymbol{g}$ je pre obidve misky rovnaké, platí $m_1 = m_2$. Z rovnosti tiaže telesa a tiaže závažia vyplýva rovnosť hmotností obidvoch telies (pozri s. 68).

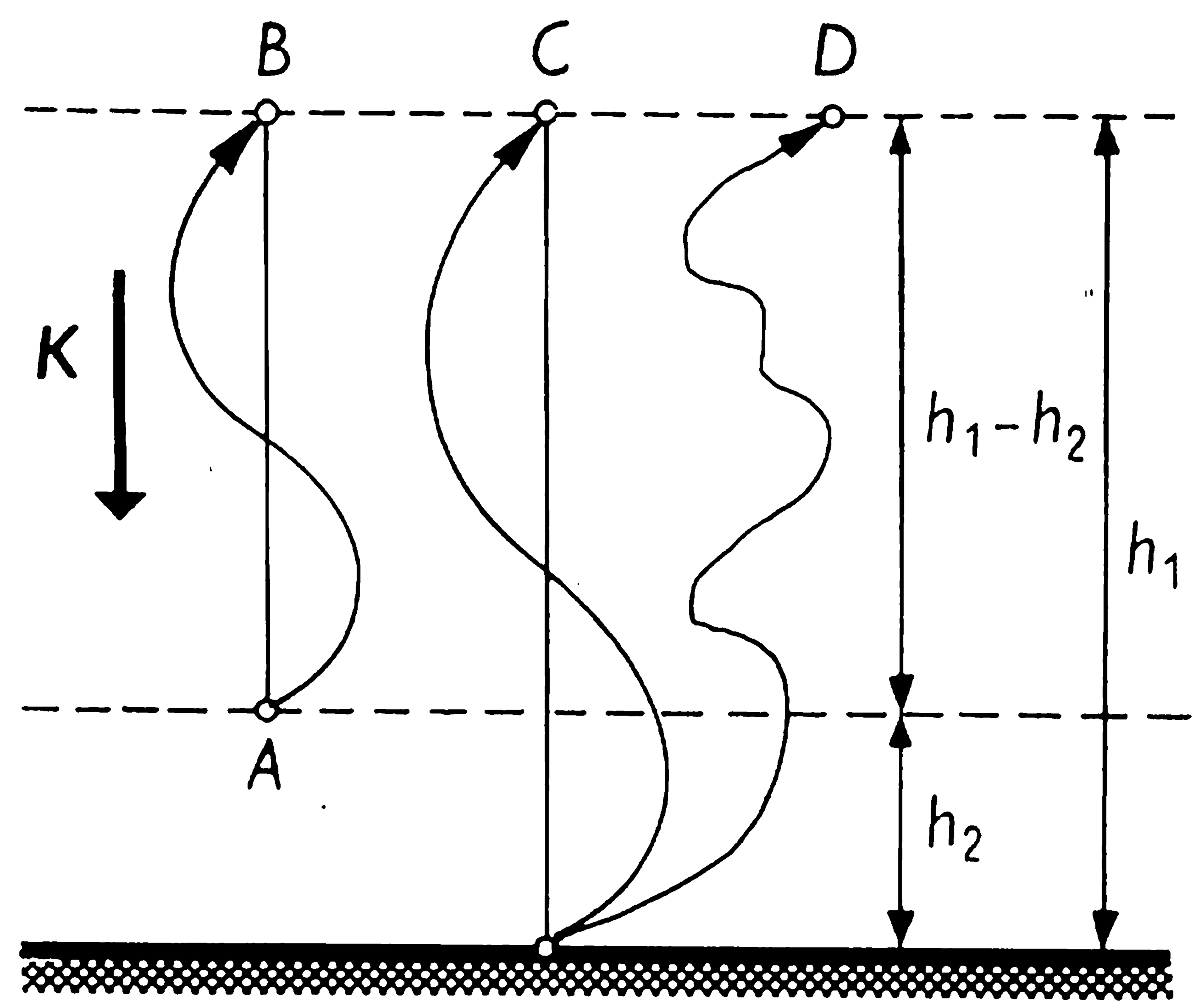
Úlohy

1. Aká veľká tiažová sila pôsobí na teleso s hmotnosťou 10 kg a) na rovníku; b) na zemepisných póloch? [97,8 N; 98,3 N]
2. Smeruje voľne spustená olovnica do geometrického stredu Zeme? Odpoveď zdôvodnite.
3. Vysvetlite, ako sa prejavujú účinky tiažového poľa Zeme a) na kvapaliny; b) na naše telo a vnútorné orgány; c) na rast rastlín.
4. Možno presne určiť hmotnosť telies vážením na rovnoramenných váhach a) na povrchu Mesiaca; b) vnútri kozmickej lode, ktorá sa pohybuje rovnomerne po kružnici okolo Zeme?

6.4 Práca v homogénnom gravitačnom poli

V stati 3.4 na s. 102 ste sa oboznámili s tiažovou potenciálnou (polohovou) energiou telesa. Podobne zavedieme pojem gravitačnej potenciálnej energie.

Predpokladajme, že vo všetkých bodoch trajektórie, po ktorej sa teleso pohybuje, je intenzita gravitačného poľa $\boldsymbol{K}$ konštantná. Pole je homogénne, na teleso pôsobí teda stála gravitačná sila $\boldsymbol{F}_g = m\,\boldsymbol{K}$. Keď sa bude teleso voľne pohybovať pôsobením gravitačnej sily (teda po siločiare)



Obr. 6-11

z miesta B, ktoré je vo výške h_1 nad Zemou, do miesta A, ktoré je vo výške h_2 nad Zemou (obr. 6-11), gravitačná sila vykoná prácu

$$\boxed{W = F_g(h_1 - h_2) = m\,K(h_1 - h_2)}$$

Pre gravitačnú silu, podobne ako pre tiažovú platí (pozri s. 103), **že práca, ktorú vykonajú gravitačné sily medzi bodmi A a B, nezávisí od trajektórie, po ktorej sa teleso pohybuje, ale iba od začiatočnej a konečnej výšky telesa vzhľadom na Zem.**

Za predpokladu, že gravitačné pole je homogénne ($\boldsymbol{K}$ = konštanta), vzťah

$$\boxed{E_p = m\,K\,h}$$

určuje **gravitačnú potenciálnu energiu** telesa s hmotnosťou m vo výške h nad Zemou. Povrch Zeme si zvolíme za miesto s nulovou hladinou gravitačnej potenciálnej energie.

Pri premiesťovaní telesa v nehomogénnom gravitačnom poli sú vzťahy na výpočet práce, ktorú vykonajú gravitačné sily, oveľa zložitejšie (pozri napr. úlohu 3). Všeobecne platí (ak zvolíme povrch Zeme za hladinu s nulovou gravitačnou potenciálnou energiou):

Gravitačná potenciálna energia telesa s hmotnosťou m v istom mieste gravitačného poľa je určená prácou, ktorú vykoná gravitačná sila pri premiestení tohto telesa z daného miesta na povrch Zeme (nezávisle od trajektórie). Platí

$$E_p = W$$

Podobne ako pri potenciálnej tiažovej energii (pozri s. 104), aj teraz platí, že gravitačnú potenciálnu energiu nemá samotné teleso, ale iba sústava teleso—Zem. Keď je hladina gravitačnej potenciálnej energie nulová a vzťažná sústava je spojená s povrchom Zeme, môžeme zjednodušene hovoriť, že teleso má gravitačnú potenciálnu energiu.

Úlohy

1. Raketa s hmotnosťou 1 000 kg vystúpila do výšky 2 000 m nad povrch Zeme. Vypočítajte prácu, ktorú pritom vykonali raketové motory, keď predpokladáme rovnomerný pohyb rakety v homogénnom poli s intenzitou 9,80 N.kg^{-1}. [1,96.10^7 J]
2. Vypočítajte gravitačnú potenciálnu energiu závažia s hmotnosťou 100 g vzhľadom na povrch Zeme, ak je vo výške 10 m, 20 m, ..., 50 m. Intenzita gravitačného poľa Zeme je 10 N.kg^{-1}. Vo vhodnej mierke zostrojte graf funkcie $E_p = f(h)$. [10 J, 20 J, ..., 50 J]
3. Gravitačnú potenciálnu energiu telesa vzhľadom na povrch Zeme vo vzdialenosti r od gravitačného stredu Zeme môžeme vypočítať podľa vzťahu $E_p = \varkappa\, m\, M_Z\left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{r}\right)$. ($M_Z$ je hmotnosť Zeme, R_Z polomer Zeme.) Dokážte, že pre teleso, ktoré je blízko povrchu Zeme, t. j. vo výške $h \ll R_Z$, uvedený vzťah prejde na zjednodušený vzťah $E_p = m\, g\, h$. $\left(\text{Dosadzujte } r = R_Z + h,\ g = \frac{\varkappa M_Z}{R_Z^2}.\right)$

6.5 Gravitačný potenciál

Zo state 6.2 viete, že gravitačné pole možno charakterizovať intenzitou gravitačného poľa a utvoriť tak matematický model gravitačného poľa v tvare vektorového poľa.

Druhá veličina, ktorá charakterizuje gravitačné pole, je **gravitačný potenciál** φ_g.

Gravitačný potenciál v danom bode poľa definujeme ako podiel gravitačnej potenciálnej energie telesa s hmotnosťou m **v tomto bode poľa a hmotnosti tohto telesa**

$$\boxed{\varphi_g = \frac{E_p}{m}}$$

Pretože platí $E_p = W$, môžeme tiež napísať

$$\varphi_g = \frac{W}{m}$$

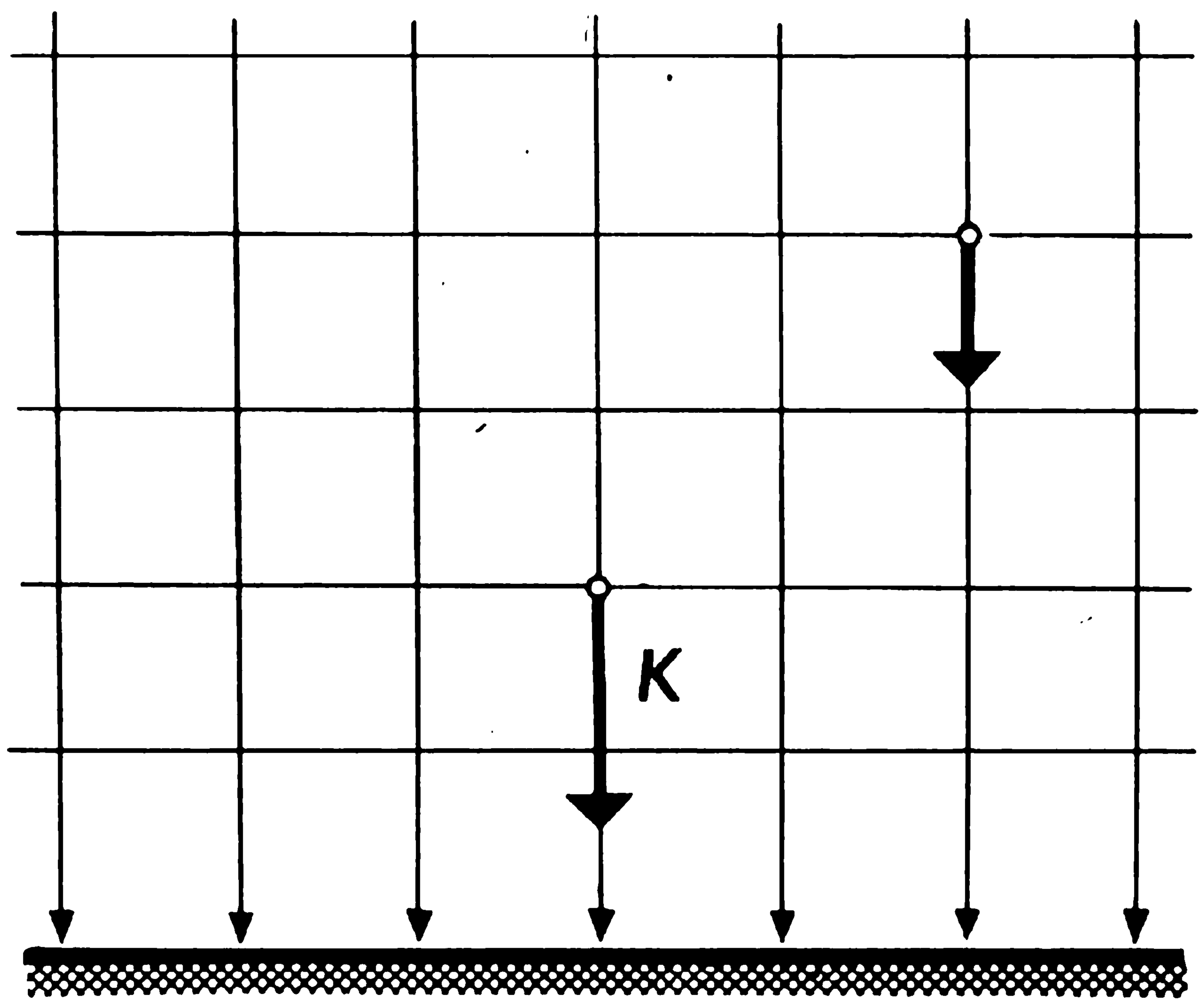
Potenciál gravitačného poľa v istom bode je určený podielom práce, ktorú vykoná gravitačná sila pri premiestení telesa s hmotnosťou m z daného bodu poľa na povrch Zeme a hmotnosti tohto telesa m.

Jednotkou gravitačného potenciálu je $J.kg^{-1}$. Gravitačný potenciál v danom mieste poľa je 1 $J.kg^{-1}$, keď gravitačná sila pri premiestení telesa s hmotnosťou 1 kg z daného bodu na povrch Zeme vykoná prácu 1 J.

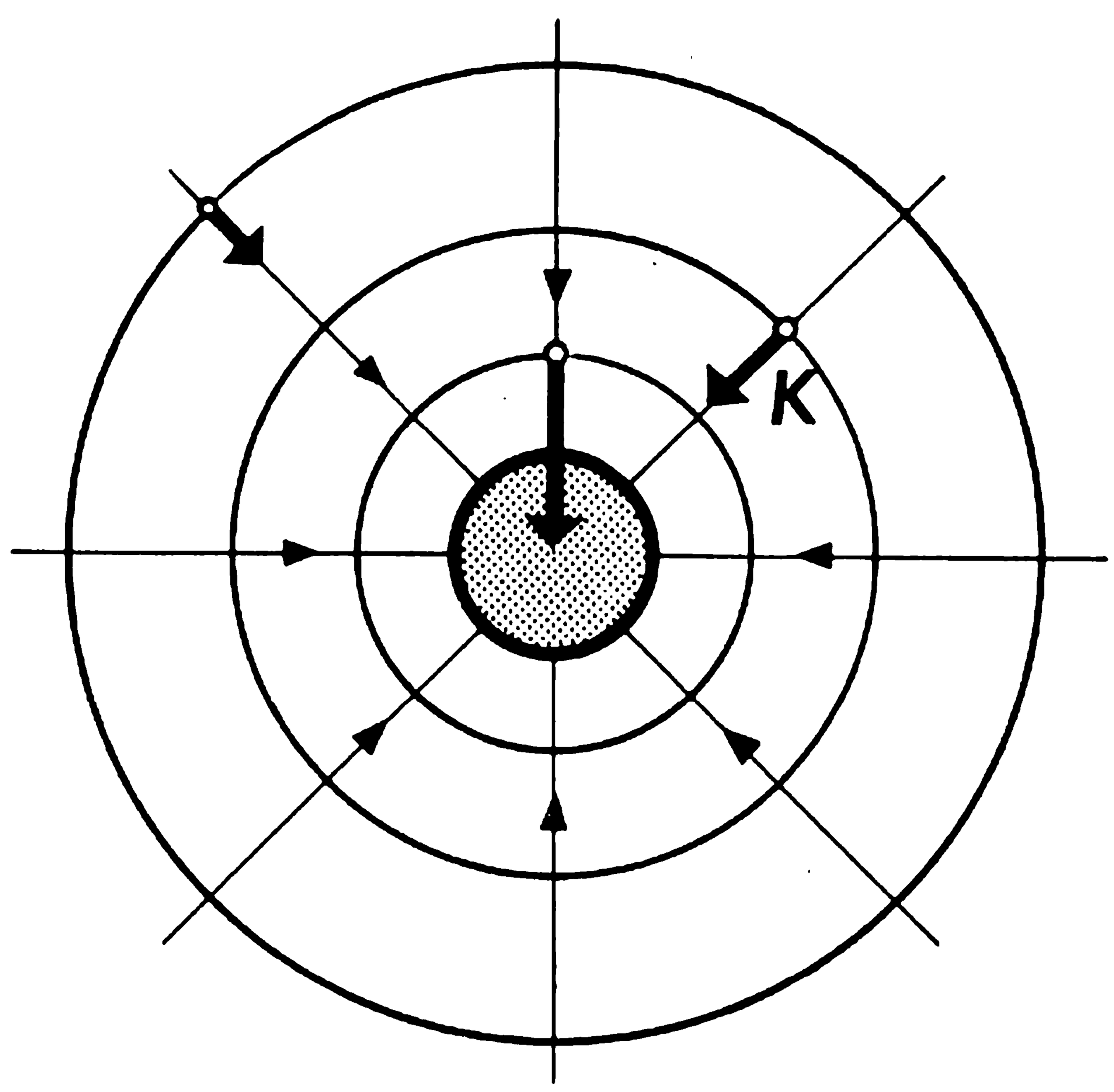
Pomocou potenciálu utvárame **skalárne pole** ako ďalší matematický model gravitačného poľa.

Keď spojíme v gravitačnom poli všetky body s rovnakou hodnotou gravitačného potenciálu, dostaneme **hladinu potenciálu** alebo **ekvipotenciálnu plochu.** V homogénnom gravitačnom poli tvoria ekvipotenciálne plochy sústavu navzájom rovnobežných rovín (obr. 6-12), v radiálnom gravitačnom poli sústavu sústredných guľových plôch (obr. 6-13).

Na obr. 6-12 a 6-13 sú vyznačené okrem ekvipotenciálnych plôch (vidíme iba ich prierezy) aj siločiary gravitačných polí. Vidíme, že siločiary homogénneho i radiálneho poľa sú všade kolmé na hladiny potenciálu.



Obr. 6-12



Obr. 6-13

Pretože siločiary v danom mieste určujú smer intenzity gravitačného poľa, na hladinu potenciálu sú kolmé aj vektory intenzity gravitačného poľa $\boldsymbol{K}$.

Zhrnieme teraz poznatky o dvoch základných charakteristikách gravitačného poľa. Prvá charakteristika vyjadruje, že silové pôsobenie poľa na iné telesá je priamo úmerné hmotnosti týchto telies. Gravitačné pole môžeme charakterizovať intenzitou $\boldsymbol{K}$. Druhá charakteristika súvisí s konaním mechanickej práce pri premiestňovaní telesa v poli, pričom veľkosť práce nezávisí od trajektórie, ale iba od začiatočnej a konečnej polohy telesa. Gravitačné pole môžeme charakterizovať potenciálom φ_g.

Prvá charakteristika vedie k utvoreniu vektorového poľa intenzity, druhá k utvoreniu skalárneho poľa potenciálu ako matematických modelov gravitačného poľa; prvá umožňuje znázorniť gravitačné pole pomocou siločiar, druhá pomocou ekvipotenciálnych plôch.

Úlohy

1. Určte gravitačný potenciál miesta vo výške 2 000 m nad povrchom Zeme, ak predpokladáme, že gravitačné pole je homogénne a má intenzitu 9,80 N.kg^{-1}. [1,96.10^4 J.kg^{-1}]
2. Určte gravitačný potenciál bodu nekonečne vzdialeného od Zeme vzhľadom na jej povrch. Použite vzťah z úlohy 3 v stati 6.4. Hmotnosť Zeme $M_Z = 6.10^{24}$ kg, polomer Zeme $R_Z = 6{,}4.10^6$ m. [6,3.10^7 J.kg^{-1}]

ZHRNUTIE — GRAVITAČNÉ POLE

Gravitačné pôsobenie je príkladom univerzálnej (všade sa uplatňujúcej) fyzikálnej interakcie. Jej mierou je gravitačná sila, ktorá určuje vzájomné pôsobenie medzi telesami. Veľkosť sily, ktorou pôsobia na seba hmotné body, vyjadruje Newtonov gravitačný zákon. Gravitačné pôsobenie medzi telesami je sprostredkované gravitačným poľom. Toto pole možno opísať vektorovou veličinou intenzita gravitačného poľa alebo skalárnou veličinou potenciál. Na grafické znázornenie gravitačného poľa ako vektorového poľa používame siločiary, ako skalárneho poľa ekvipotenciálne plochy. Gravitačné pole hmotného bodu je vždy radiálne (centrálne). V malej vzdialenosti od Zeme môžeme gravitačné pole Zeme považovať za homogénne.

Pri pohybe telesa v gravitačnom poli (bez úbytku mechanickej energie) závisí práca, ktorú vykonajú sily poľa, len od začiatočného a koncového bodu posunutia telesa v tomto poli; nezávisí od trajektórie, od veľkosti dráhy, ani od spôsobu konania práce.

V neinerciálnej sústave, ktorá je spojená s istým miestom na povrchu Zeme, zisťujeme, že na telesá pôsobí tiažová sila $\boldsymbol{F}_G$, ktorá je výslednicou gravitačnej sily $\boldsymbol{F}_g$ a zotrvačnej odstredivej sily $\boldsymbol{F}_0$. Tiaž telesa vyjadruje silové pôsobenie tiažovej sily na teleso. Tiažová sila a tiaž sú sily rovnako veľké, majú rovnaký smer, odlišujú sa iba pôsobiskom. Tiažová sila má pôsobisko v ťažisku telesa. Tiaž ako tlaková sila na plochu je plošná sila; ako ťahová sila má pôsobisko v pevnom bode závesu.

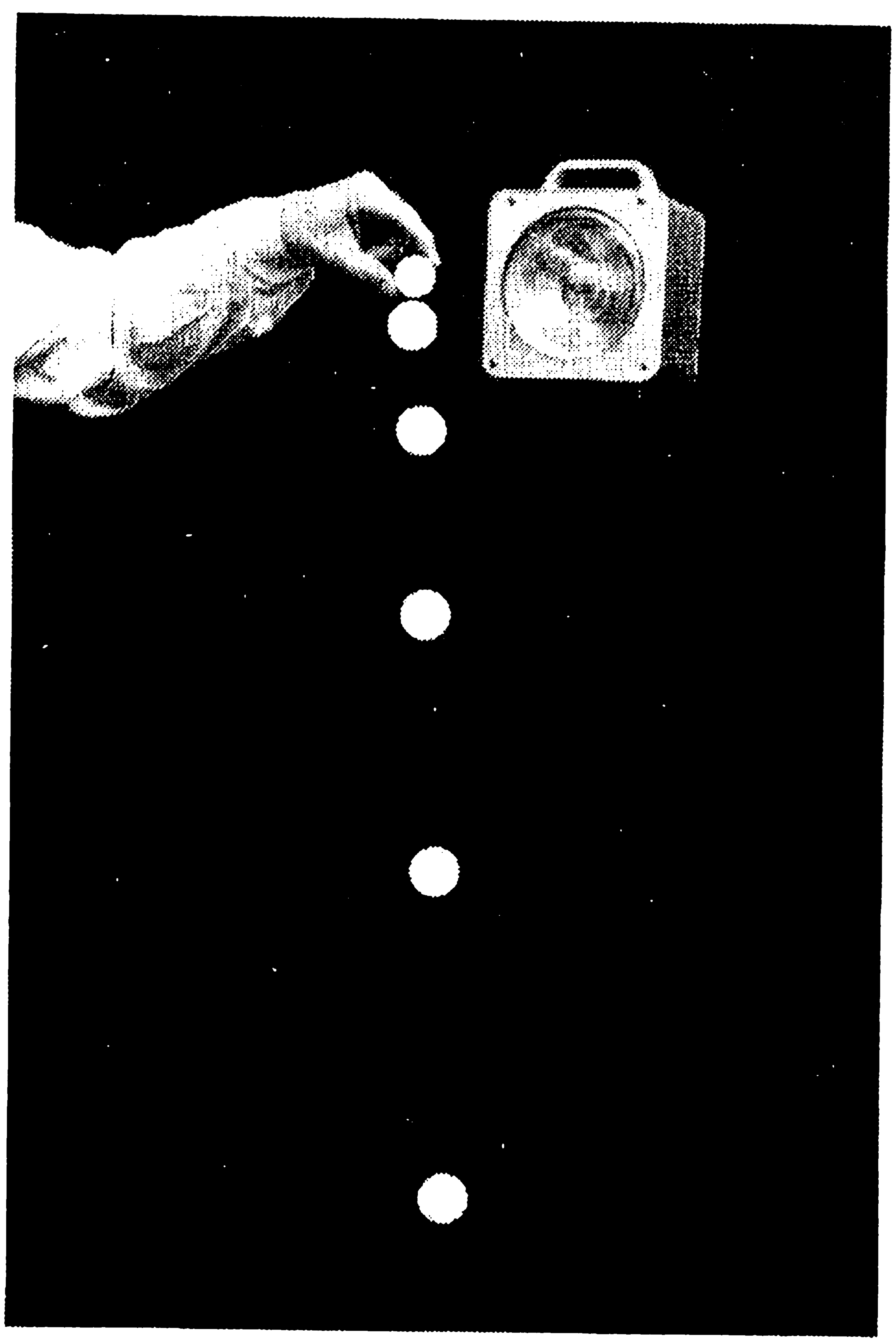
Veličiny	Jednotky	Zákony	Vzťahy
gravitačná sila $\boldsymbol{F}_g$	N	Newtonov gravitačný zákon	$F_g = \varkappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$
gravitačná konštanta $\varkappa$	$N.m^2.kg^{-2}$		$\varkappa = 6{,}67.10^{-11}.N.m^2.kg^{-2}$

Veličiny	Jednotky	Zákony	Vzťahy
intenzita gravitačného poľa $\boldsymbol{K}$	$N.kg^{-1}$		$\boldsymbol{K}=\frac{\boldsymbol{F}_g}{m}$ $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{a}_g$ veľkosť intenzity radiálneho gravitačného poľa $K=\varkappa\frac{M}{r^2}$ homogénneho $\boldsymbol{K}=$ konšt.
tiažová sila $\boldsymbol{F}_G$	N		$\boldsymbol{F}_G=\boldsymbol{F}_g+\boldsymbol{F}_0$ $\boldsymbol{F}_G=m\,\boldsymbol{g}$
tiaž $\boldsymbol{G}$	N		$G=F_G$; $\boldsymbol{F}_G \parallel \boldsymbol{G}$ $\boldsymbol{G}=m\,\boldsymbol{g}$
práca v homogénnom gravitačnom poli	J		$W=m\,K(h_1-h_2)$
potenciálna gravitačná energia E_p	J		v homogénnom poli $E_p=m\,K\,h$
potenciál gravitačného poľa φ_g	$J.kg^{-1}$		$\varphi_g=\frac{E_p}{m}$

7. Pohyby telies v gravitačnom poli

7.1 Pohyby telies v homogénnom tiažovom poli Zeme

Jednoduchým pohybom v homogénnom tiažovom poli Zeme je **voľný pád** (obr. 7-1). Voľným pádom sa pohybuje každé voľné teleso s nulovou začiatočnou rýchlosťou vo vákuu, ak naň pôsobí len tiažová sila. Voľný pád je pohyb rovnomerne zrýchlený priamočiary s konštantným zrýchlením $\boldsymbol{g}$. Zo state 1.12 viete, že voľne padajúce teleso prejde za čas t dráhu $s = \frac{1}{2} g t^2$ a získa rýchlosť veľkosti $v = g t$.



Obr. 7-1
Voľný pád loptičky. Polohy zodpovedajú dráham, ktoré loptička prejde vždy po 0,1 s. Fotografia je zhotovená pomocou zábleskového stroboskopu

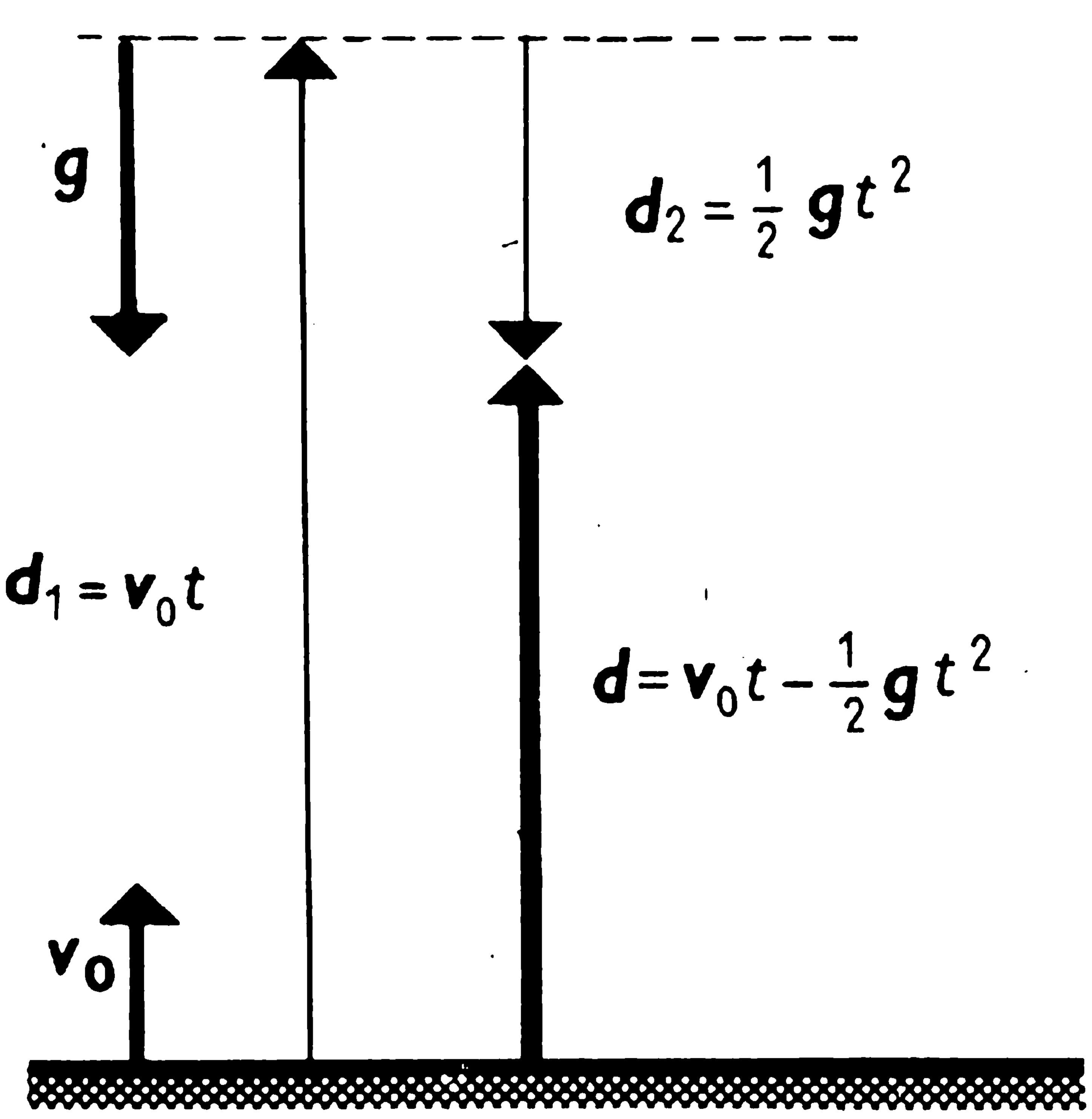
Keď udelíme telesu vo vákuu v homogénnom tiažovom poli Zeme začiatočnú rýchlosť $\boldsymbol{v}_0$, možno si jeho pohyb predstaviť ako pohyb zložený z priamočiareho rovnomerného pohybu v smere rýchlosti $\boldsymbol{v}_0$ a z voľného pádu v smere tiažového zrýchlenia $\boldsymbol{g}$. Tieto zložené pohyby voláme **vrhy.**

Výsledné posunutie $\boldsymbol{d}$ vrhnutého telesa určíme ako vektorový súčet posunutia $\boldsymbol{d}_1$ pri rovnomernom pohybe a posunutia $\boldsymbol{d}_2$ pri voľnom páde. Teda $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2$. Veľkosti posunutí $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$ v čase t od začiatku pohybu sú

$$d_1 = v_0 t, \quad d_2 = \frac{1}{2} g t^2$$

Podľa smeru začiatočnej rýchlosti $\boldsymbol{v}_0$ rozlišujeme zvislý vrh, vodorovný vrh a šikmý vrh.

Zvislý vrh nahor koná teleso vtedy, keď má jeho začiatočná rýchlosť $\boldsymbol{v}_0$ vzhľadom na tiažové zrýchlenie $\boldsymbol{g}$ opačný smer. Ide o pohyb priamočiary rovnomerne spomalený. Výška vrhu, ktorú teleso dosiahne za čas t, je daná veľkosťou posunutia $\boldsymbol{d}$, ktoré určíme zložením posunutia $\boldsymbol{d}_1$ pri



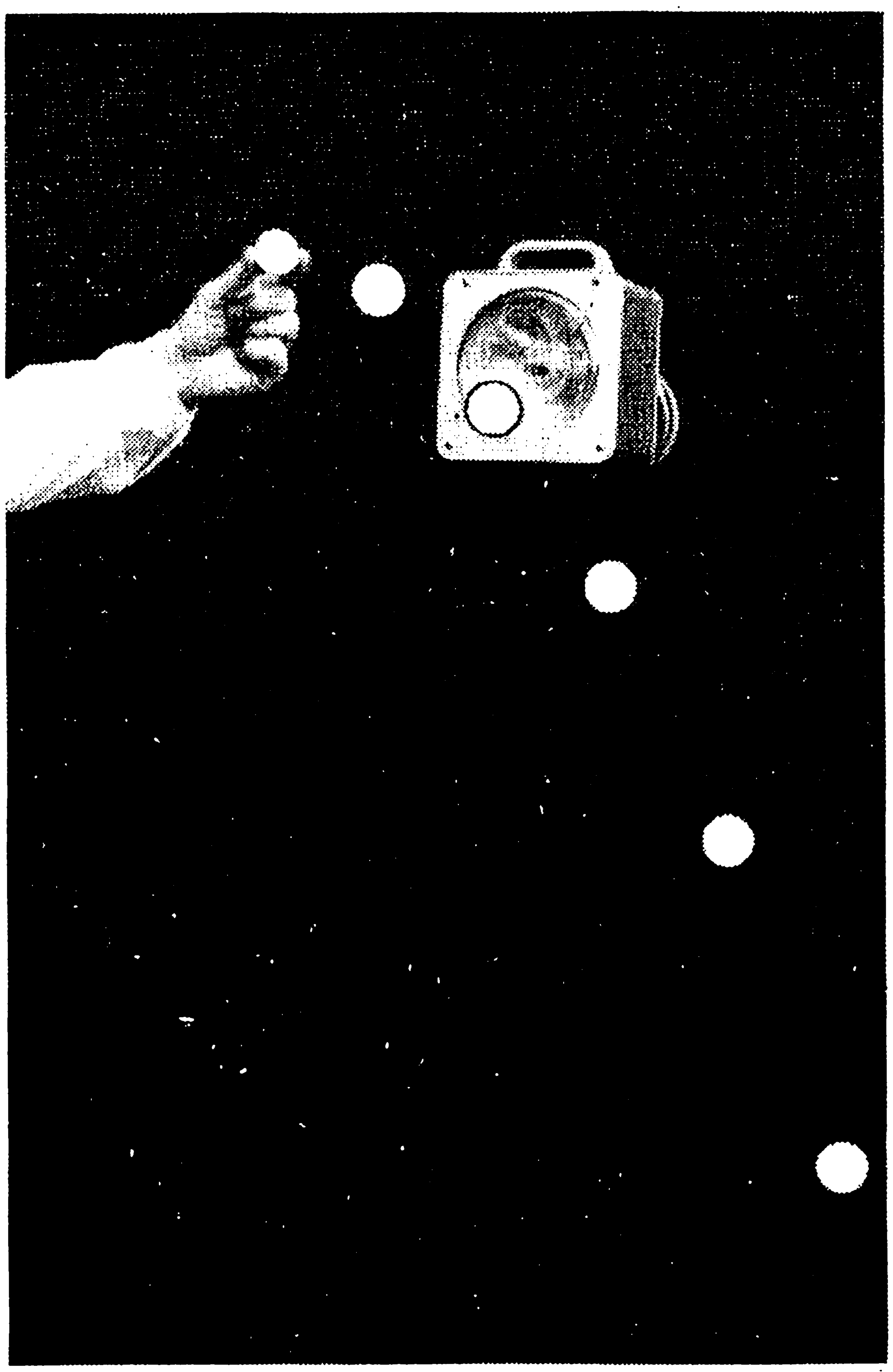
Obr. 7-2

rovnomernom pohybe zvislo nahor a posunutia $\boldsymbol{d}_2$ pri voľnom páde zvislo nadol (obr. 7-2). Pretože obidve posunutia ležia na tej istej priamke, ale majú opačný smer, veľkosť výsledného posunutia je

$$d = d_1 - d_2 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Podobne určíme veľkosť výslednej rýchlosti $\boldsymbol{v}$ telesa za čas t ako rozdiel začiatočnej rýchlosti $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0$ a rýchlosti voľného pádu $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{g}\, t$. Teda

$$v = |v_1 - v_2| = |v_0 - g\, t|$$



Obr. 7-3
Vodorovný vrh loptičky. Polohy loptičky v čase zväčšujúcom sa po 0,1 s. Začiatočná rýchlosť vo vodorovnom smere má veľkosť 1,5 m.s^{-1}

Rýchlosti $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ nie sú rýchlosti v rozličných časoch t_1, t_2, sú to zložky výslednej rýchlosti $\boldsymbol{v}$ v danom čase do zvislého smeru.

Najväčšie posunutie, ktoré teleso pri zvislom vrhu nahor dosiahne, je **výška výstupu** h. V tejto výške sa rýchlosť telesa rovná nule, preto $v_0 - g\, t_h = 0$. Odtiaľ čas výstupu $t_h = \dfrac{v_0}{g}$ a po dosadení do vzťahu pre výsledné posunutie dostaneme pre výšku výstupu

$$h = v_0 t_h - \frac{1}{2}\, g\, t_h^2 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

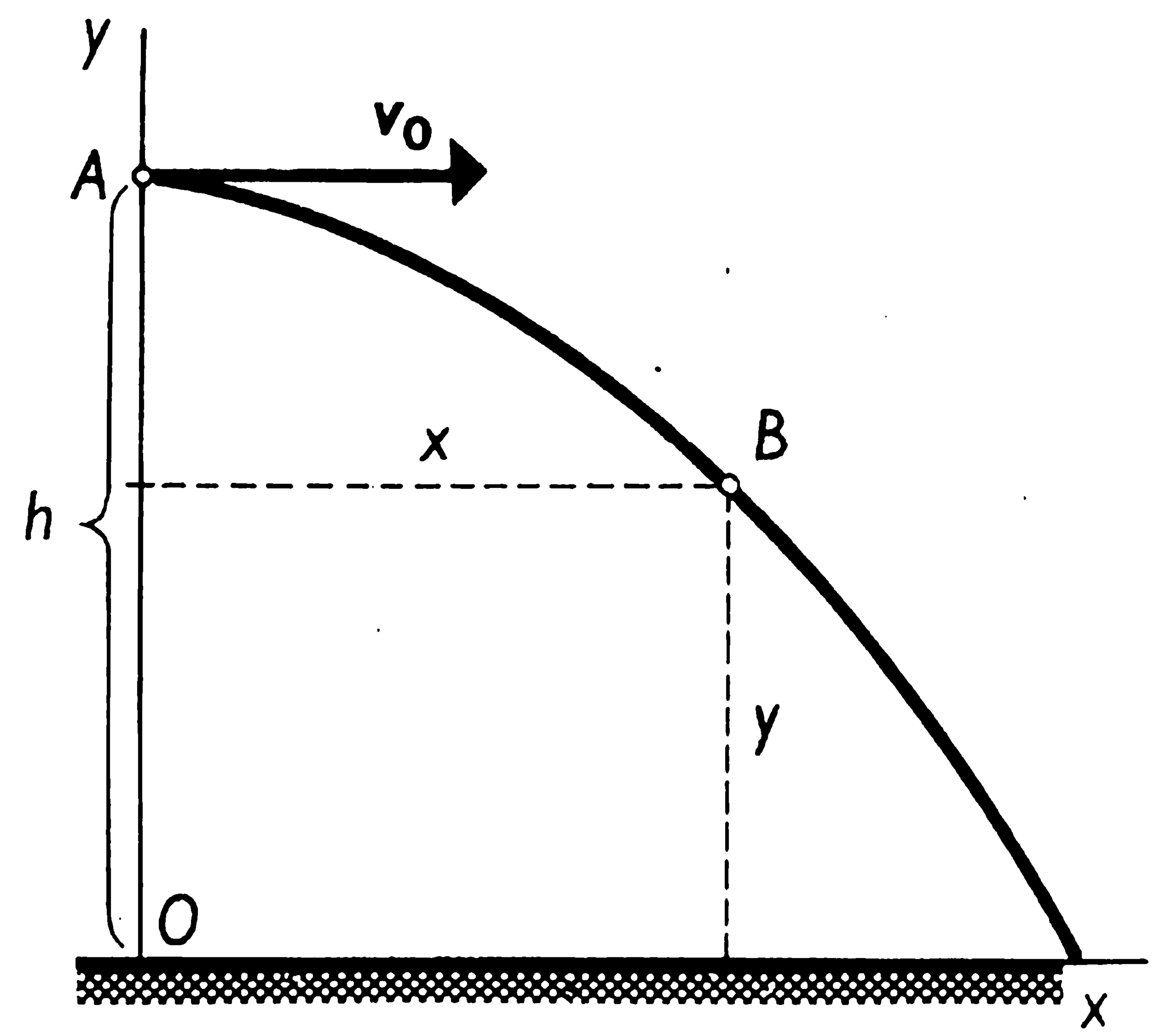
Po dosiahnutí výšky h sa vracia teleso na Zem voľným pádom a dopadne na miesto, odkiaľ bolo vrhnuté, rýchlosťou

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g\frac{v_0^2}{2g}} = v_0,$$

teda rovnako veľkou rýchlosťou ako bolo vrhnuté zvislo nahor. Z toho je zrejmé, že čas výstupu a čas voľného pádu pri pohybe nadol sú rovnaké.

Vodorovný vrh telesa uskutočníme, keď udelíme telesu začiatočnú rýchlosť $\boldsymbol{v}_0$ kolmo na smer tiažového zrýchlenia $\boldsymbol{g}$. Výsledné posunutie $\boldsymbol{d}$ za čas t od okamihu vrhu dostaneme zložením posunutia $\boldsymbol{d}_1$ pri rovnomernom pohybe rýchlosťou $\boldsymbol{v}_0$ vo vodorovnom smere a posunutia $\boldsymbol{d}_2$ pri voľnom páde v zvislom smere (obr. 7-3).

Pokusom s vodným lúčom zistíme, že trajektória vodorovného vrhu je parabola, ktorej vrchol je vo vzdialenosti h od začiatku súradníc O



Obr. 7-4

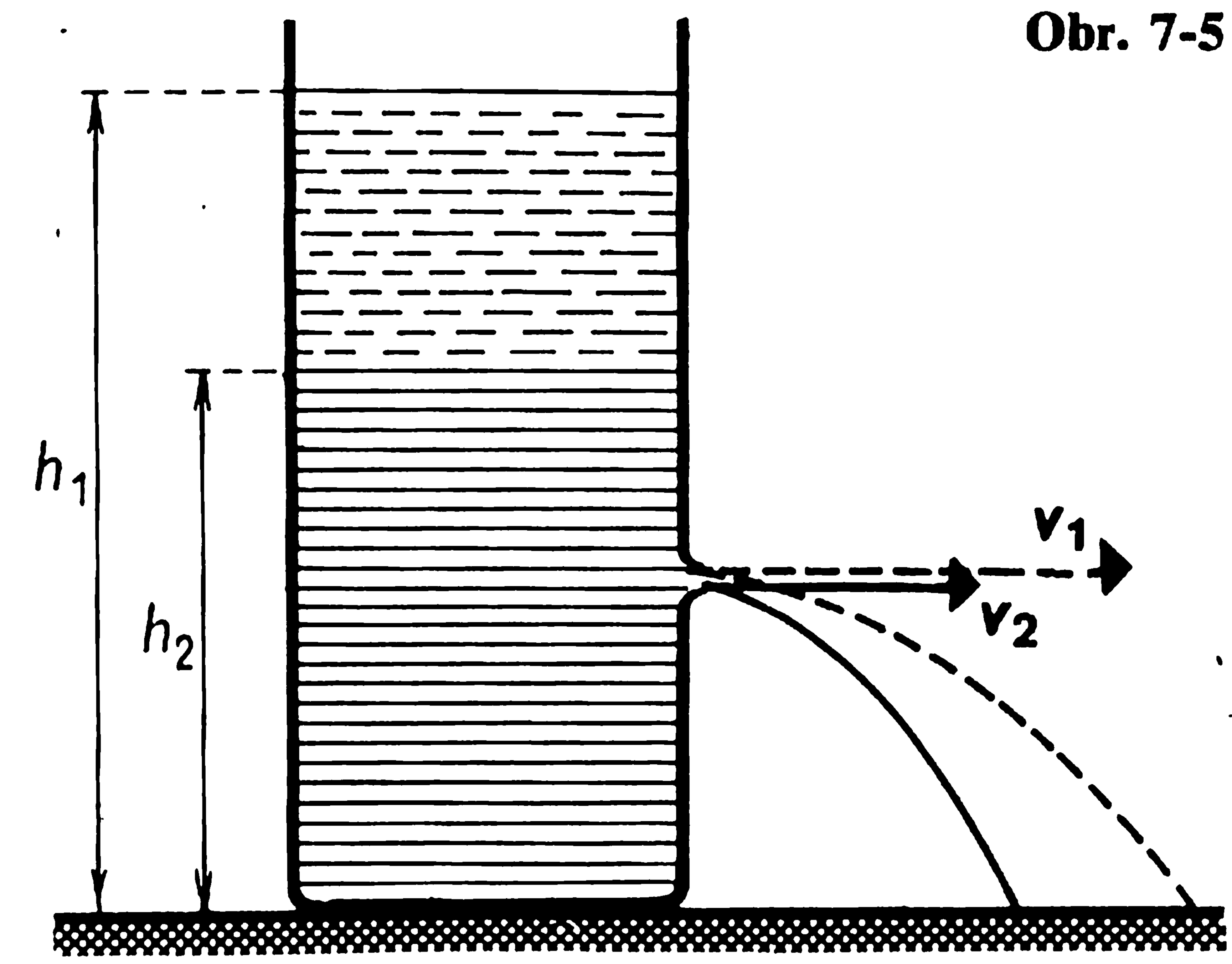
(obr. 7-4). Súradnice x, y ľubovoľného bodu paraboly zodpovedajú veľkostiam posunutí $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$. Teda

$$x = v_0 t, \qquad y = h - \frac{1}{2} g\, t^2$$

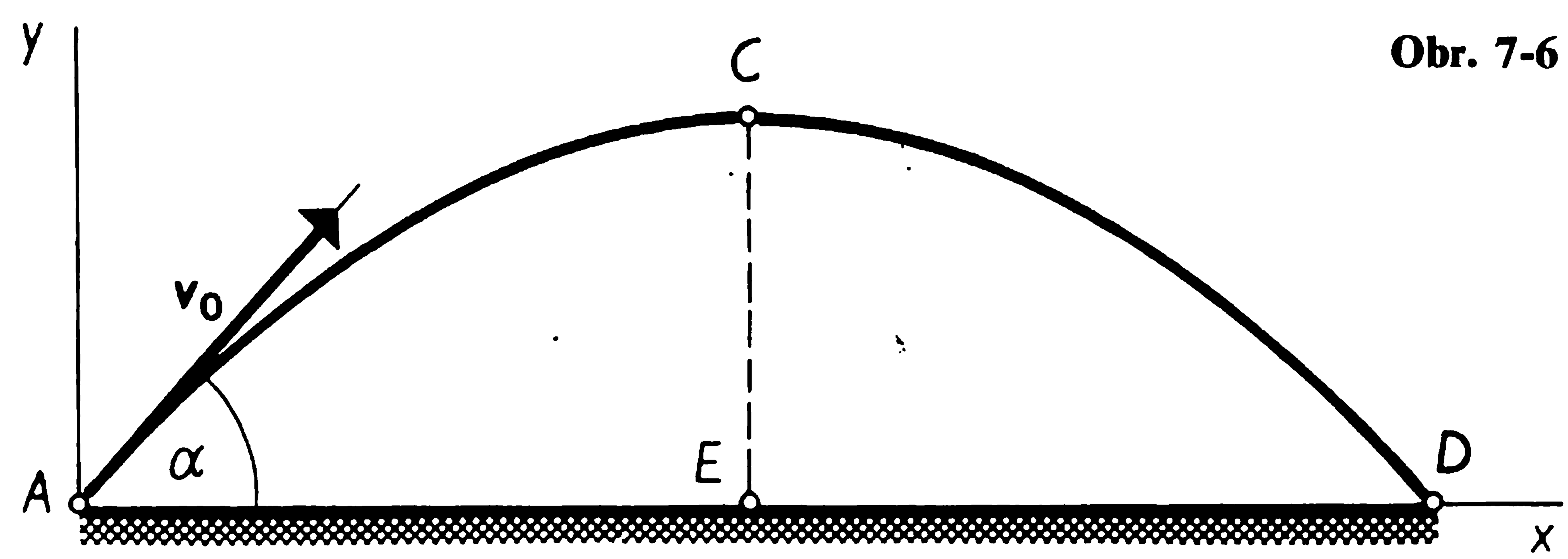
Z rovnice $x = v_0 t$ vyplýva, že pri vodorovnom vrhu telesa z tej istej výšky závisí vzdialenosť miesta dopadu od začiatočnej rýchlosti v_0. Ďalším pokusom so striekajúcim vodným lúčom (obr. 7-5) ukážeme, že čím väčšia je rýchlosť v_0, tým ďalej od nádoby voda dostrekne.

Vo vojenskej technike je dôležitý **šikmý vrh nahor,** ktorý koná teleso, ktorému udelíme začiatočnú rýchlosť $\mathbf{v}_0$ v smere, ktorý zviera s vodorovnou rovinou uhol α. Uhol α sa volá elevačný uhol.

Výsledná trajektória šikmého vrhu nahor je parabola, ktorej vrchol C je v najvyššom bode trajektórie (obr. 7-6). Vzdialenosť CE je **výška vrhu,** vzdialenosť AD **dĺžka vrhu,** vo vojenskej terminológii **dostrel.** V cvičení 14 odvodíme, že dĺžka vrhu je najväčšia pri elevačnom uhle $\alpha = 45°$.



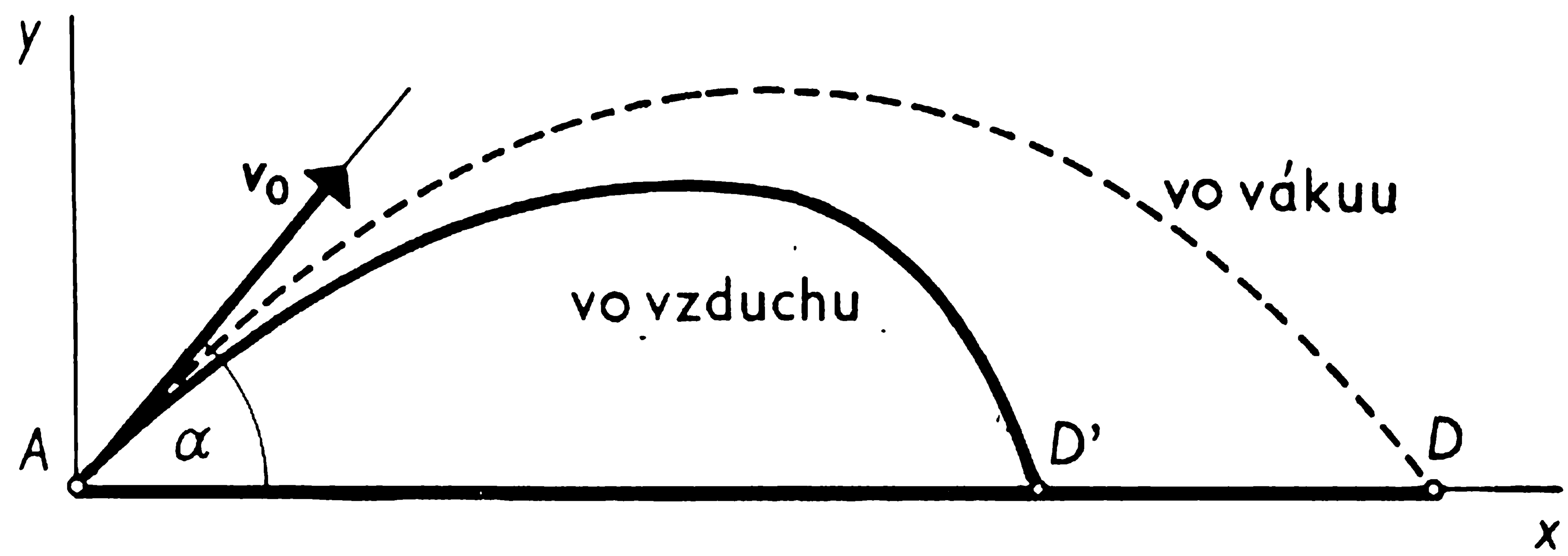
Obr. 7-5



Obr. 7-6

Parabolickú trajektóriu opisuje šikmo vrhnuté teleso v homogénnom poli len vo vákuu. V blízkosti povrchu Zeme však odpor vzduchu

Obr. 7-7



spôsobuje, že dráha striel nie je parabola, ale nesúmerná **balistická krivka** (obr. 7-7). Veľkosť dostrelu sa vo vzduchu skracuje.

Úlohy

1. Teleso bolo vrhnuté zvislo nahor začiatočnou rýchlosťou veľkosti $v_0 = 40\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Určte: a) výšku telesa za čas $t = 1$ s, 2 s, 3 s, 4 s od okamihu vrhu; b) rýchlosť telesa za čas $t = 1$ s, 2 s, 3 s, 4 s od okamihu vrhu. Z výsledkov úlohy určte výšku výstupu telesa. [35 m, 60 m, 75 m, 80 m; $30\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $20\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $10\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $0\ \mathrm{m.s^{-1}}$]
2. Lopta vrhnutá zvislo nahor sa vrátila na miesto vrhu za 6 s. Do akej výšky vystúpila? [45 m]
3. Z vrcholu veže vysokej 80 m je vrhnuté vodorovným smerom teleso začiatočnou rýchlosťou veľkosti $15\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Za aký čas a v akej vzdialenosti od päty veže dopadne teleso na vodorovný povrch Zeme? [4 s; 60 m]

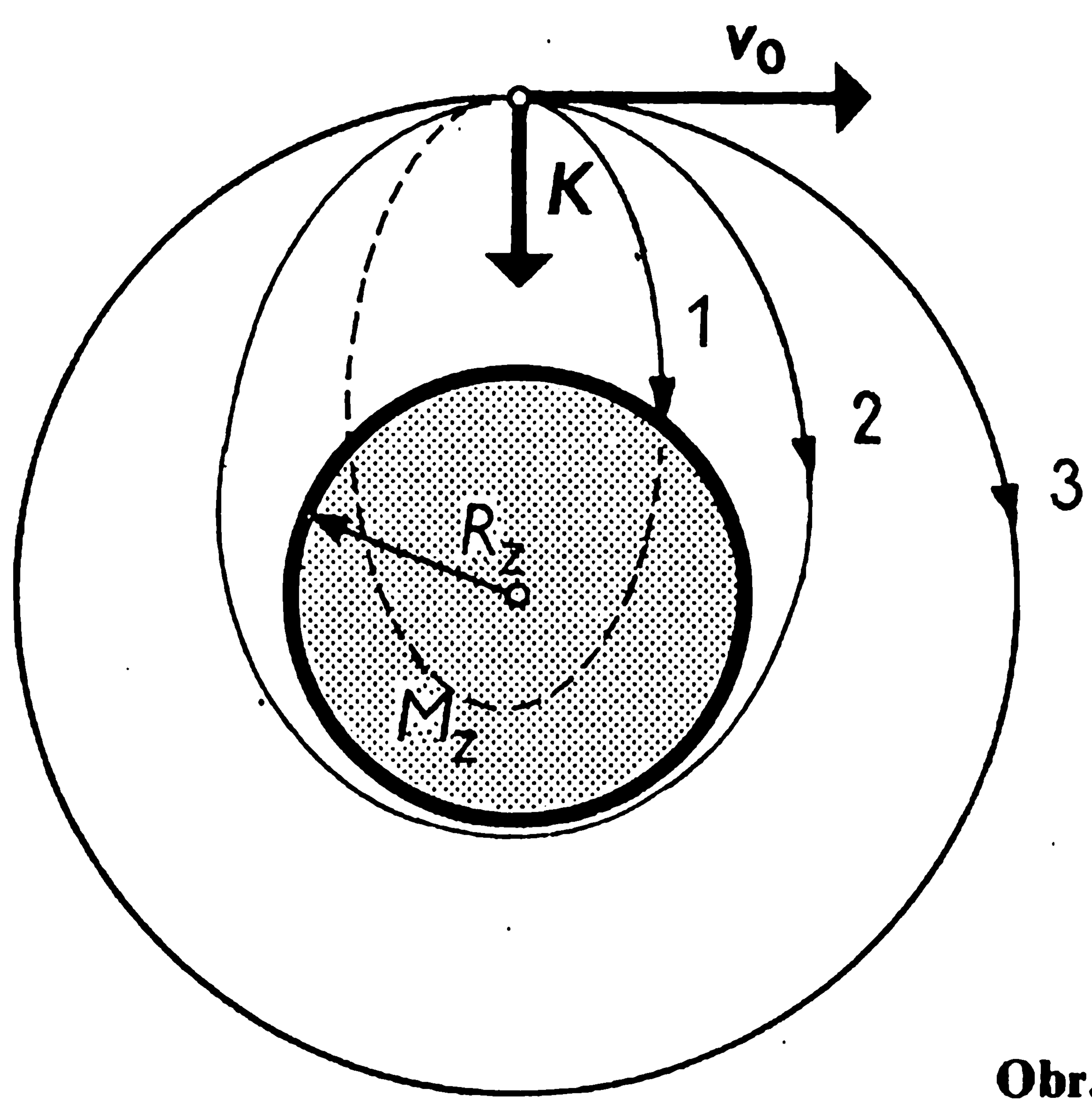
7.2 Pohyby telies v radiálnom gravitačnom poli Zeme

Pri pohybe telesa vo väčších vzdialenostiach od povrchu Zeme a pri pohybe po dlhších trajektóriách (napr. pri pohybe raketových striel) nemožno považovať gravitačné pole za homogénne. V rôznych miestach trajektórie intenzita gravitačného poľa má rozličné hodnoty, mení sa, v dôsledku čoho sa mení aj hodnota gravitačného zrýchlenia.

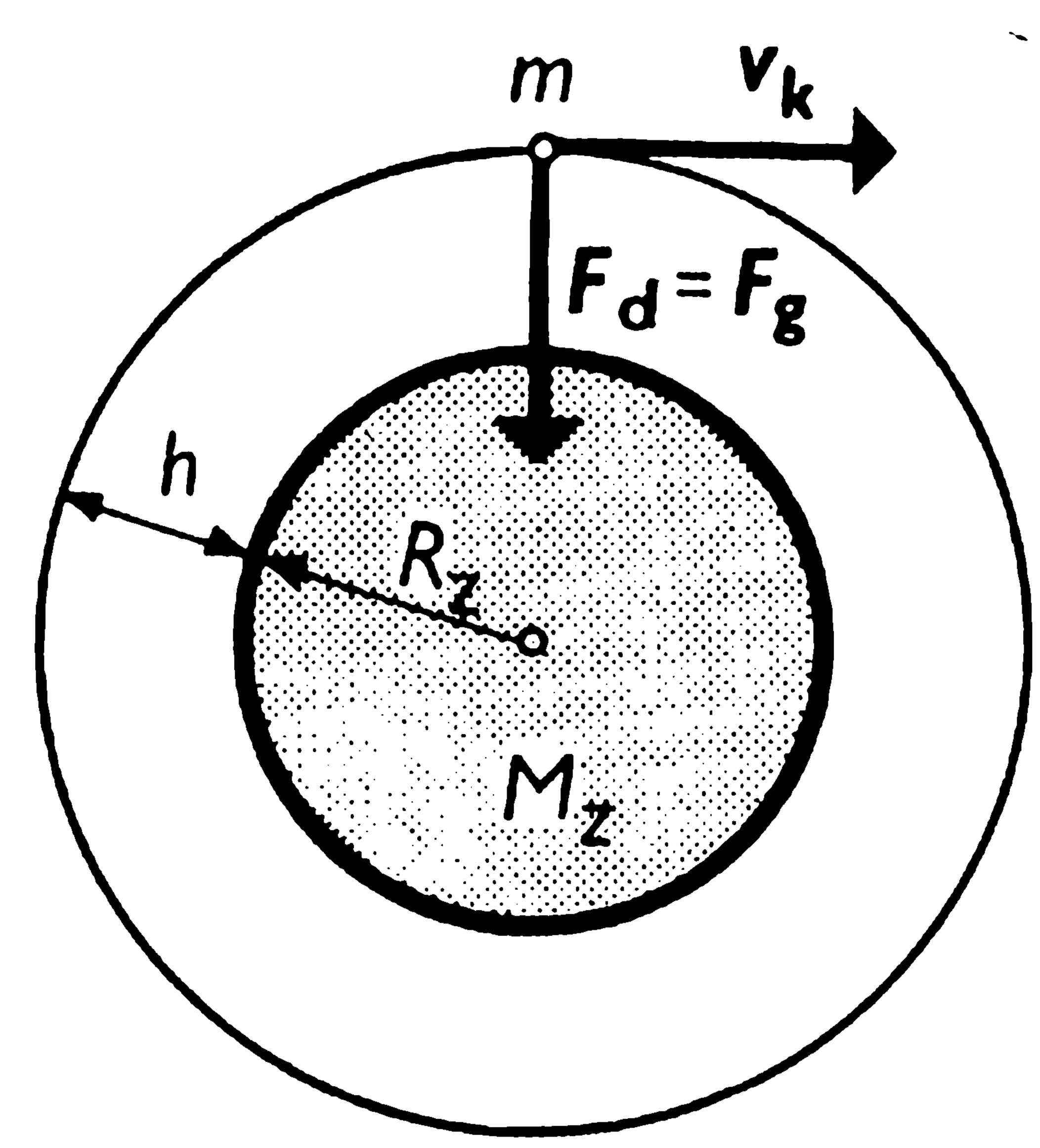
Pre kozmonautiku je významný pohyb telesa v radiálnom gravitačnom poli Zeme, pri ktorom sa telesu udelí v dostatočne veľkej vzdialenosti od povrchu Zeme začiatočná rýchlosť $\boldsymbol{v}_0$ v kolmom smere na intenzitu gravitačného poľa $\boldsymbol{K}$ (obr. 7-8).

Pri pomerne malej začiatočnej rýchlosti $\boldsymbol{v}_0$ sa teleso pohybuje po trajektórii, ktorá pripomína dráhu vodorovného vrhu v homogénnom poli (trajektória 1). Takto sa napr. pohybuje strela, ktorá opustí hlaveň dela rýchlosťou 2 000 m.s^{-1}. Keď zanedbáme odpor vzduchu, teleso sa pohybuje po časti elipsy, ktorá je tým dlhšia, čím väčšia je začiatočná rýchlosť. Pri istej začiatočnej rýchlosti môže nastať prípad, že teleso už nespadne na povrch Zeme, ale opíše celú elipsu (trajektória 2).

V radiálnom gravitačnom poli Zeme existuje pre danú vzdialenosť h od povrchu Zeme taká začiatočná rýchlosť $\boldsymbol{v}_0$, pri ktorej sa teleso pohybuje po kružnici so stredom v gravitačnom strede Zeme (trajektória 3). Táto rýchlosť sa volá **kruhová rýchlosť** $\boldsymbol{v}_k$ a pohybuje sa ňou napr. Mesiac a niektoré umelé družice Zeme.



Obr. 7-8



Obr. 7-9

Veľkosť kruhovej rýchlosti v_k z hľadiska inerciálneho pozorovateľa určíme nasledujúcou úvahou. Teleso s hmotnosťou m opisuje v gravitačnom poli Zeme kružnicu s polomerom $R_Z + h$, kde h je výška telesa nad povrchom Zeme (obr. 7-9). Z učiva o pohybe hmotného bodu po kružnici vieme, že stále zakrivenie trajektórie spôsobuje dostredivá sila $\boldsymbol{F}_d$. Pretože sa teleso pohybuje v gravitačnom poli, touto dostredivou silou je gravitačná sila $\boldsymbol{F}_g$, ktorá stále pôsobí na teleso. Teda $\boldsymbol{F}_d = \boldsymbol{F}_g$, pričom

$$F_d = \frac{m\, v_k^2}{R_Z + h}, \qquad F_g = \varkappa \frac{m\, M_Z}{(R_Z + h)^2}$$

Dosadením do rovnosti $F_d = F_g$ dostaneme po úprave vzťah pre veľkosť kruhovej rýchlosti

$$v_k = \sqrt{\frac{\varkappa M_Z}{R_Z + h}}$$

Veľkosť kruhovej rýchlosti v_k je funkciou výšky h, ale nezávisí od hmotnosti m pohybujúceho sa telesa.

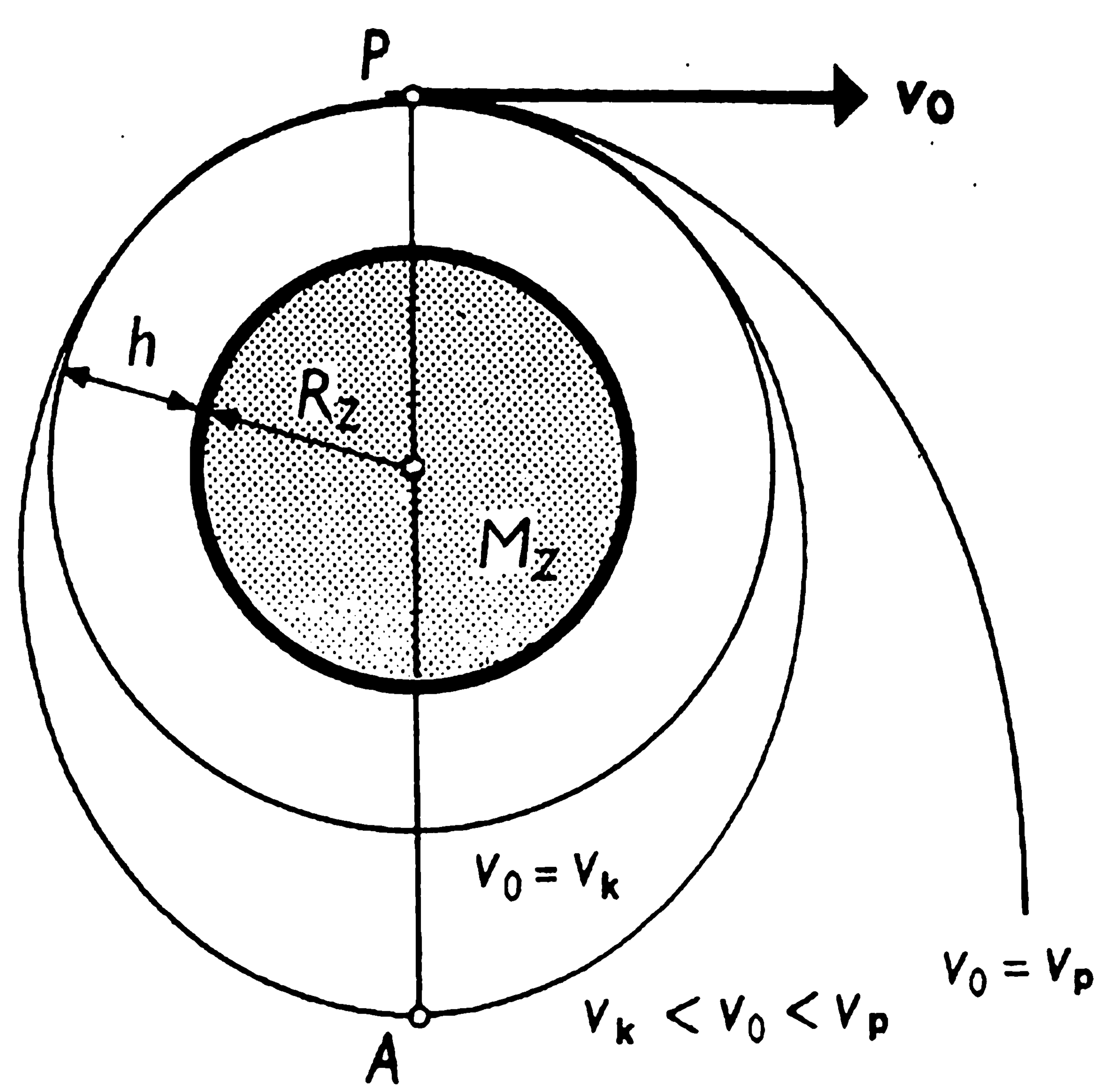
Keď uvažujeme o pohybe telesa v tesnej blízkosti povrchu Zeme, ktorú považujeme za rovnorodú guľu ($h \doteq 0$), je

$$v_k = \sqrt{\frac{\varkappa M_Z}{R_Z}}$$

Po dosadení $M_Z = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, $R_Z = 6{,}37 \cdot 10^6$ m je $v_k = 7{,}9$ km.s^{-1}. Táto rýchlosť sa nazýva **prvá kozmická rýchlosť.** Čas, za ktorý obehne teleso okolo Zeme, keď sa pohybuje prvou kozmickou rýchlosťou, je

$$T = \frac{2\pi R_Z}{v_k} \doteq 5\,064 \text{ s} \doteq 84{,}8 \text{ min}$$

Teleso, ktorému udelíme v danej výške h nad Zemou začiatočnú rýchlosť v_0 o niečo väčšiu, ako je kruhová rýchlosť v_k, pohybuje sa po elipse (obr. 7-10). Rovina eliptickej trajektórie prechádza stredom Zeme,



Obr. 7-10

v ktorej leží jedno ohnisko elipsy. V bode P — **perigeu** — je vzdialenosť telesa od stredu Zeme najmenšia, v protiľahlom bode A — **apogeu** — je najväčšia.

Tvar eliptickej dráhy ovplyvňuje veľkosť začiatočnej rýchlosti v_0, ktorú získa teleso v bode P. Čím je začiatočná rýchlosť v_0 väčšia, tým je elipsa pretiahnutejšia. Ak dosiahne teleso rýchlosť v_p, zmení sa uzavretá eliptická trajektória na parabolu a teleso sa trvalo vzďaľuje od Zeme. Rýchlosť v_p sa nazýva **parabolická** alebo tiež **úniková rýchlosť**.

V blízkosti povrchu Zeme ($h \doteq 0$) je parabolická rýchlosť

$$v_p = \sqrt{\frac{2\varkappa M_Z}{R_Z}} = v_k\sqrt{2}$$

Číselne $v_p = 11{,}2\ \text{km.s}^{-1}$, čo je **druhá kozmická rýchlosť.** Uvedené hodnoty pre prvú a druhú kozmickú rýchlosť platia pre inerciálnu sústavu so začiatkom v strede Zeme.

Úlohy

1. Určte veľkosť kruhovej rýchlosti telesa, keď výška telesa nad povrchom Zeme je: a) 200 km; b) 1 000 km; c) 5 000 km. [7,8 km.s^{-1}; 7,4 km.s^{-1}; 5,9 km.s^{-1}]
2. Po akej trajektórii sa pohybuje teleso, ktorému udelíme v blízkosti povrchu Zeme v smere kolmom na spojnicu telesa so stredom Zeme rýchlosť a) 6 km.s^{-1}; b) 7,9 km.s^{-1}; c) 10 km.s^{-1}; d) 11,2 km.s^{-1}?
3. Na základe zákona zachovania mechanickej energie vysvetlite jav, že umelá družica Zeme sa pohybuje v perigeu rýchlejšie ako v apogeu.
4. Akou veľkou rýchlosťou sa pohybuje Mesiac okolo Zeme, ak predpokladáme, že koná rovnomerný pohyb po kružnici s polomerom $r = 3{,}8 \cdot 10^8$ m? Hmotnosť Zeme $M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg. [asi 1 km.s^{-1}]
5. Určte únikovú rýchlosť v_p na povrchu Mesiaca, ak viete, že kruhová rýchlosť na jeho povrchu $v_k = 1{,}7$ km.s^{-1}. [2,4 km.s^{-1}]

7.3 Lety umelých kozmických telies

S postupným rozvojom kozmonautiky stále pribúdajú umelé kozmické telesá. Patria k nim umelé družice Zeme, kozmické sondy, kozmické lode, orbitálne stanice a raketoplány.

Keď pre veľkosť rýchlosti v_0 platí vzťah $v_k \leqq v_0 < v_p$, kde v_k je kruhová rýchlosť a v_p parabolická rýchlosť, ide o umelú družicu Zeme. Keď $v_0 = v_k$, družica sa pohybuje po kružnici, ak $v_k < v_0 < v_p$, pohybuje sa po elipse.

Keď sa udelí telesu v danej výške nad Zemou začiatočná rýchlosť $v_0 < v_k$, opisuje iba časť elipsy a vracia sa na Zem ešte pred ukončením celého obletu Zeme. Takto sa pohybujú medzikontinentálne balistické rakety, ktoré nezaraďujeme medzi kozmické telesá.

Telesá, ktorým sa udelí začiatočná rýchlosť $v_0 = v_p$, trvalo sa vzďaľujú od Zeme. Nazývame ich kozmické sondy. Vysielajú sa na Mesiac a do medziplanetárneho priestoru.

Telesá s ľudskou posádkou sa volajú kozmické lode, a to bez ohľadu na tvar ich dráhy. Pohybujú sa teda buď ako družice Zeme, alebo ako kozmické sondy. Umelé družice Zeme konštruované na dlhodobý pobyt ľudskej posádky sú orbitálne stanice.

Na vynesenie kozmického telesa do danej výšky je potrebné, aby teleso získalo dostatočne veľkú kinetickú energiu. Túto energiu však nemôže vzhľadom na značný odpor vzduchu pri povrchu Zeme získať naraz (napr. vystrelením z dela), ale získava ju postupne. Preto sa teleso umiesťuje do viacstupňovej (najčastejšie trojstupňovej) nosnej rakety, ktorá má každý stupeň vybavený samostatnými raketovými motormi.

Teóriu vynesenia telesa do kozmického priestoru vypracoval na začiatku 20. storočia K. E. Ciolkovskij. Teória sa prakticky využila až v polovici 20. storočia vyriešením konštrukcie účinných pohonných systémov. V súčasnosti sú to pohonné systémy na chemické palivá (kvapalné alebo pevné), uvažuje sa o využití fyzikálnych pohonných systémov (napr. iónové, plazmové, jadrové systémy). Všetky pohonné systémy pracujú na základe zákona zachovania hybnosti.

Pri pohybe umelých družíc rozlišujeme tri fázy. Prvá fáza je výstup rakety, ktorý sa začína na povrchu Zeme odpálením trojstupňovej nosnej rakety. Ťahová sila raketových motorov uvedie raketu s družicou do zrýchleného pohybu smerom nahor so zrýchlením niekoľkokrát väčším, ako je veľkosť zrýchlenia g; telesá v družici podliehajú zodpovedajúcemu preťaženiu. Po zhorení paliva prvého stupňa rakety sa tento stupeň oddelí a uvedú sa do činnosti motory druhého stupňa. Dej sa opakuje s druhým stupňom a keď sa raketa dostane do potrebnej výšky, udelí družici tretí stupeň rakety potrebnú rýchlosť $\boldsymbol{v}_0$. Prvá, aktívna fáza pohybu sa končí okamihom, keď prestane pôsobiť hnacia sila posledného stupňa nosnej rakety.

Družice sa pohybujú v gravitačnom poli Zeme. Na družicu a na všetky telesá vnútri družice (aj na kozmonautov) pôsobí gravitačná sila $\boldsymbol{F}_g$ a udeľuje im rovnaké gravitačné zrýchlenie. Gravitačná sila je kolmá na smer okamžitej rýchlosti a smeruje do stredu Zeme. Pre družicu je teda dostredivou silou: $\boldsymbol{F}_g = \boldsymbol{F}_d$.

Keďže družica sa pohybuje po zakrivenej dráhe (približne kruhovej), je neinerciálnou vzťažnou sústavou. Preto na kozmonauta v družici pôsobí aj zotrvačná odstredivá sila (pozri s. 90)

$$\boldsymbol{F}_0 = -\boldsymbol{F}_d = -\boldsymbol{F}_g$$

Na kozmonauta a na všetky predmety v družici pôsobí teda výsledná sila

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{0}$$

ktorá sa rovná nulovému vektoru.

V dôsledku toho nepôsobia telesá v družici na seba ani na družicu žiadnymi tlakovými alebo ťahovými silami. Sú v beztiažovom stave.

Tretia fáza je zostup družice na Zem. Začína sa znižovaním rýchlosti družice, a to buď samovoľne brzdiacim účinkom zemskej atmosféry, buď raketovým pohonom. Družica postupne klesá do hustejších vrstiev atmosféry, kde buď zhorí, alebo pristane na povrchu Zeme. Druhým spôsobom pristávajú kozmické lode.

Od 4. 10. 1957, keď bývalý Sovietsky zväz vyslal na obežnú dráhu prvú umelú družicu Zeme, kozmonautika sa rýchle rozvíja. Každý rok štartujú ďalšie kozmické lode, raketoplány a sondy s najrozličnejším výskumným poslaním.

K historicky najvýznamnejším úspechom kozmonautiky patrí najmä vyslanie kozmických sond na Mesiac (1959), na Venušu (1961), na Mars (1971) a k ďalším planétam slnečnej sústavy, k Halleyovej kométe (1987), ďalej prvý let človeka do kozmického priestoru (1961), prvé skupinové lety dvoch kozmických lodí (1962), výstup kozmonauta z lode do voľného priestoru (1965), pristátie amerického kozmonauta na povrchu Mesiaca (1969), začiatok sústavného prieskumu povrchu

Mesiaca (1970), štarty prvých raketoplánov (1981) atď. K významným udalostiam patrí aj začiatok spolupráce v programe Interkozmos (1967), do ktorého bol zaradený aj let prvého česko-slovenského kozmonauta (1978).

7.4 Gravitačné pole Slnka

Slnko je najväčšie teleso slnečnej sústavy. Jeho hmotnosť je asi 99 % hmotnosti celej sústavy. Vzhľadom na veľkú hmotnosť Slnka (približne $2 \cdot 10^{30}$ kg) je intenzita gravitačného poľa Slnka na jeho povrchu približne 28-krát väčšia ako na povrchu Zeme.

V gravitačnom poli Slnka sa pohybuje **deväť planét** v tomto poradí podľa vzdialenosti od Slnka: *Merkúr*, *Venuša*, *Zem*, *Mars*, *Jupiter*, *Saturn*, *Urán*, *Neptún*, *Pluto*. Prvých päť planét môžeme za vhodných podmienok pozorovať voľným okom. Všetky základné údaje o planétach, napr. ich stredná vzdialenosť od Slnka, rozmery, hmotnosť, hustota a iné sú v MFChT.

Niektoré vlastnosti planét sa vyjadrujú pomocou zodpovedajúcich vlastností Zeme. Napríklad stredná vzdialenosť planéty od Slnka sa vyjadruje v astronomických jednotkách AU, pričom 1 AU = = $149{,}6 \cdot 10^6$ km, čo je stredná vzdialenosť Zeme od Slnka. Podobne vyjadrujeme polomery planét v jednotkách polomeru Zeme R_Z, hmotnosť planét v jednotkách hmotnosti Zeme M_Z.

Okrem planét obieha okolo Slnka veľký počet menších telies, ktoré sa nazývajú **planétky**. Dráhy planétok ležia medzi dráhami Marsa a Jupitera. Priemery planétok sú od niekoľko desiatok metrov do niekoľko sto kilometrov. Najväčšia *Ceres* má priemer vyše 700 km.

Okolo väčšiny planét obiehajú **mesiace**. Najväčší počet mesiacov majú planéty Jupiter, Saturn a Urán. Merkúr a Venuša mesiace nemajú. Najdokonalejšie preskúmaným mesiacom je „náš" **Mesiac**. Keďže čas rotácie Mesiaca sa rovná jeho obežnej dobe okolo Zeme, je k nám obrátená stále tá istá pologuľa Mesiaca (čo však neplatí všeobecne pre mesiace iných planét). Odvrátenú pologuľu Mesiaca zmapovali pomocou fotografií získaných z kozmických sond. Ďalšie kozmické sondy umožnili podrobný výskum celého mesačného povrchu. Človek vystúpil prvýkrát na povrch Mesiaca v roku 1969 v rámci amerického projektu *Apollo.*

Zaujímavé telesá slnečnej sústavy sú **kométy,** ktoré obiehajú okolo Slnka po veľmi pretiahnutých elipsách. Kométy majú jadro s priemerom niekoľko kilometrov a tvorí ho zhluk drobných telies. V blízkosti Slnka sa z pevného jadra kométy uvoľňujú prachové častice a plyny, ktoré tvoria svietiacu atmosféru kométy — kómu. Pri väčšom množstve plynných a prachových častíc vzniká žiariaci chvost kométy, ktorý dosahuje dĺžku až niekoľko miliónov kilometrov a pôsobením tlakovej sily slnečného žiarenia smeruje od Slnka. Kométy sa postupne rozpadávajú a vznikajú meteorické roje.

V medziplanetárnom priestore slnečnej sústavy je veľké množstvo pomerne malých telies — **meteoridov.** Ak vnikne meteorid do zemskej atmosféry, jeho pohyb sa zabrzdí, meteorid sa rozžeraví a žiari — na oblohe pozorujeme „padajúcu hviezdu" — **meteor.** Menšie meteoridy sa v atmosfére vyparia, zvyšky veľkých niekedy dopadnú na Zem; tie nazývame **meteority.**

Slnko, ktoré je ústredným (centrálnym) telesom slnečnej sústavy, má polomer približne 109-krát väčší, ako je polomer Zeme. Žiariaca povrchová vrstva Slnka — fotosféra má teplotu asi 6 000 K, vnútri Slnka sa odhaduje teplota až $15 \, . \, 10^6$ K. Ohromná energia, ktorú Slnko vyžaruje, vzniká termojadrovou reakciou, pri ktorej z jadier atómu vodíka postupne vznikajú jadrá atómov hélia. Pozorovaním tmavých škvŕn vo fotosfére sa zistilo, že Slnko sa otáča okolo svojej osi s periódou otáčania asi 25 dní. Rozsah a veľkosť slnečných škvŕn sa mení. Maximum ich výskytu sa opakuje každých 11 rokov. Ostatné údaje o Slnku nájdete v MFChT.

Úlohy

1. Ktoré planéty majú väčšiu (menšiu) hmotnosť, ako je hmotnosť Zeme?
2. Ktoré planéty majú väčšiu (menšiu) hustotu, ako je hustota Zeme?
3. Vyjadrite vzdialenosť planét od Slnka v astronomických jednotkách.
4. Pomocou MFChT porovnávajte rýchlosti planét na obežnej dráhe okolo Slnka. Podľa ktorého vzťahu možno tieto rýchlosti vypočítať?
5. Určte hmotnosť Slnka, keď viete, že Zem obieha okolo Slnka vo vzdialenosti asi 150 miliónov kilometrov rýchlosťou 30 $km \, . \, s^{-1}$. [$2 \, . \, 10^{30}$ kg]

7.5 Keplerove zákony

Pohyb planét sledovali astronómovia už v dávnych dobách. Podľa **geocentrického názoru,** ktorý rozpracoval grécky učenec PTOLEMAIOS (2. stor. n. l.), Zem bola stredom vesmíru a všetky ostatné telesá obiehali okolo nej. Zdanlivý pohyb Slnka, Mesiaca a planét vysvetľovali veľmi zložito, lebo presné pozorovania dávali iné výsledky, ako vychádzali z geocentrického názoru. Napriek tomu sa tento názor udržal až do 16. storočia, a to vďaka cirkevnej ideológii.

S **heliocentrickým názorom** odvážne vystúpil poľský hvezdár M. KOPERNIK (1473—1543). Podľa Kopernika je stredom vesmíru Slnko, okolo ktorého obieha Zem a ostatné planéty. Denný pohyb oblohy je zdanlivý a vzniká v dôsledku otáčania Zeme okolo vlastnej osi. Ročný pohyb oblohy je takisto zdanlivý a je to dôsledok obehu Zeme okolo Slnka.

Kopernikove predstavy o vesmíre boli zjednodušené, no na vtedajšie obdobie prevratné. Na Kopernikovo učenie nadviazali TYCHO DE BRAHE* a JOHANNES KEPLER**, ktorý na základe presných výpočtov vyslovil tri zákony o pohybe planét.

Keplerove zákony sú kinematické zákony, lebo pohyb planét iba opisujú. Príčinu pohybu planét vysvetlil až I. Newton, keď formuloval gravitačný zákon.

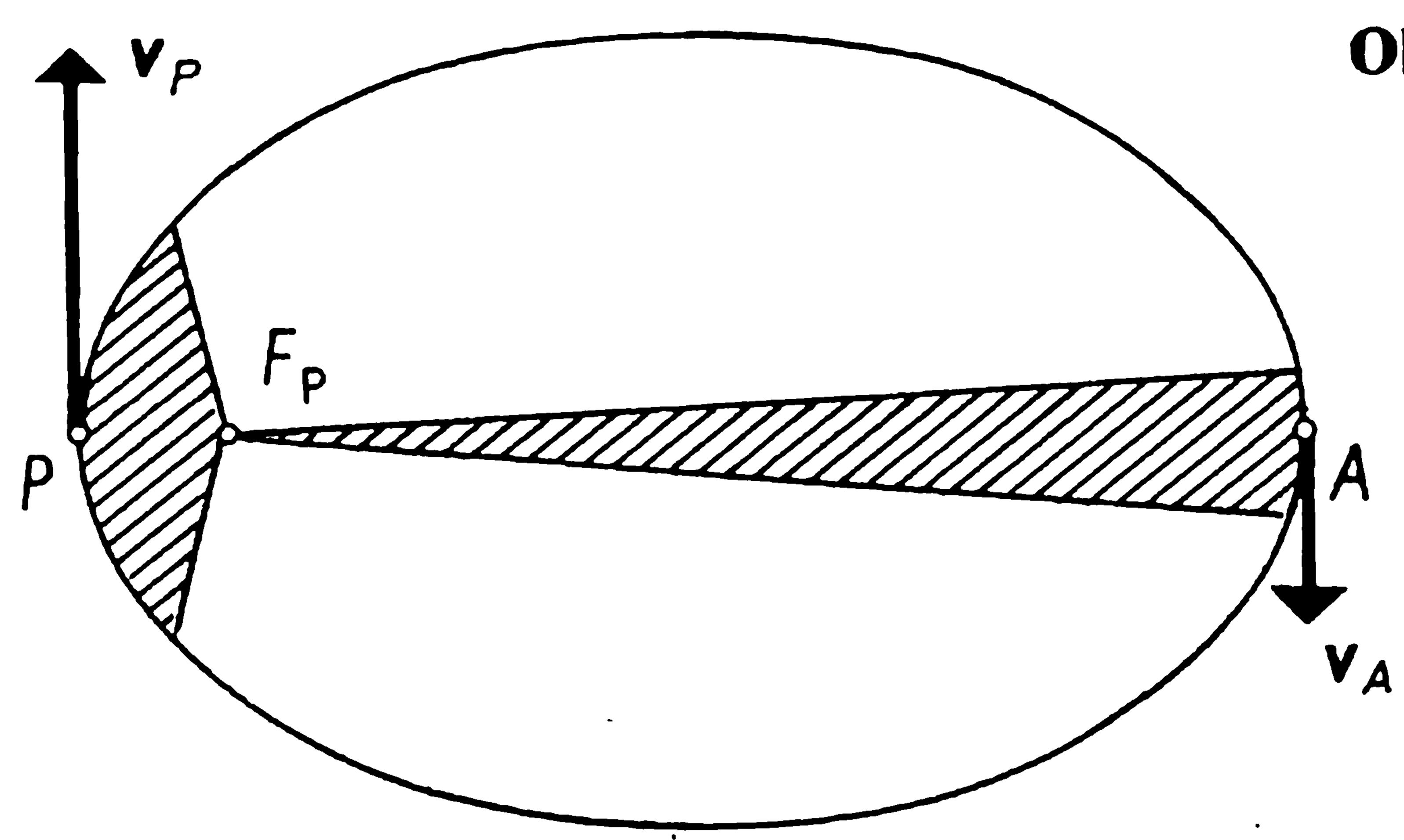
* TYCHO DE BRAHE (1546—1601), dánsky astronóm.

** JOHANNES KEPLER (1571—1630), nemecký astronóm. Najdôležitejšie výsledky obidvoch astronómov sú spojené s ich pobytom na dvore cisára Rudolfa II. v Prahe.

Prvý Keplerov zákon: Planéty sa pohybujú po elipsách málo odlišných od kružníc; v ich spoločnom ohnisku je Slnko.

Druhý Keplerov zákon: Plochy opísané sprievodičom planéty za jednotku času sú konštantné.

Sprievodič planéty je úsečka, ktorá spája stred planéty a Slnka. Pri pohybe planéty po elipse sa dĺžka sprievodiča mení. Najkratšia je v perihéliu (príslní), najdlhšia v aféliu (odslní). Keďže plochy opísané sprievodičom za rovnaký čas v oblasti perihélia P a afélia A (obr. 7-11) sú podľa druhého Keplerovho zákona rovnaké, rýchlosť planéty v perihéliu v_P je väčšia ako rýchlosť v aféliu v_A. Pohyb planéty po eliptickej trajektórii je teda nerovnomerný.



Obr. 7-11

Zem prechádza perihéliom v januári, aféliom v júli. Preto je na severnej pologuli zimný polrok (od 23. 9. do 21. 3.) kratší (179 dní) ako letný polrok (186 dní).

Tretí Keplerov zákon: Pomer druhých mocnín obežných dôb dvoch planét sa rovná pomeru tretích mocnín hlavných polosí ich trajektórií.

Keď označíme a_1 a a_2 dĺžky hlavných polosí eliptických trajektórií a T_1 a T_2 obežné doby planét okolo Slnka, potom platí

$$\boxed{\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{a_1^3}{a_2^3}}$$

Posledná rovnica umožňuje vypočítať dĺžku hlavnej polosi trajektórie jednej planéty, ak poznáme dĺžku hlavnej polosi trajektórie druhej planéty a obežné doby obidvoch planét. Keď je napr. pre Zem $T_1 = 1$ rok, $a_1 = 1$ AU, potom pre Jupiter, ktorý má $T_2 = 12$ rokov, je dĺžka hlavnej polosi jeho trajektórie

$$a_2=\sqrt[3]{\frac{a_1^3\,T_2^2}{T_1^2}}=a_1\sqrt[3]{\frac{T_2^2}{T_1^2}}=\sqrt[3]{12^2}\ \mathrm{AU}\doteq 5{,}2\ \mathrm{AU}$$

Keplerove zákony neplatia iba pre pohyb planét okolo Slnka; všeobecne platia pre pohyb všetkých telies v radiálnom gravitačnom poli ústredného telesa s hmotnosťou mnohonásobne väčšou, ako je hmotnosť obiehajúceho telesa. Keplerove zákony platia napr. pre pohyb mesiacov okolo planéty Jupiter, aj pre pohyb umelých družíc Zeme, ak sa na svojej dráhe príliš nevzďaľujú od Zeme (aby vplyv gravitačného poľa Slnka bol zanedbateľný vzhľadom na gravitačné pole Zeme).

Úlohy

1. Vysvetlite dôsledky druhého Keplerovho zákona pre pohyb planét z hľadiska zákona zachovania mechanickej energie.
2. Vypočítajte dĺžku hlavnej polosi trajektórie planéty Urán, ak jeho obežná doba je 84 rokov. [19 AU]

ZHRNUTIE — POHYBY TELIES V GRAVITAČNOM POLI

Voľný pád a vrhy (zvislo nahor a nadol, vrh vodorovný, vrh šikmý) sú pohyby telies v homogénnom tiažovom poli Zeme (pri zanedbaní odporu vzduchu, teda vo vákuu). Vrhnuté teleso vykonáva zložený pohyb, ktorý je zložený z rovnomerného priamočiareho pohybu so začiatočnou rýchlosťou v_0 a z voľného pádu. Výslednú polohu určíme zložením posunutia pri rovnomernom pohybe a posunutia pri voľnom páde.

Pohyby telies v radiálnom gravitačnom poli Zeme (pri zanedbaní odporu vzduchu) a pohyby planét v radiálnom gravitačnom poli Slnka sa riadia Keplerovými zákonmi.

Aby mohlo teleso obiehať okolo Zeme v istej vzdialenosti od povrchu Zeme, musí získať aspoň kruhovú rýchlosť. Prvá kozmická rýchlosť je veľkosť kruhovej rýchlosti v tesnej blízkosti povrchu Zeme. Aby sa mohlo teleso pohybovať v slnečnej sústave, musí dosiahnuť rýchlosť, ktorej veľkosť sa rovná najmenej parabolickej rýchlosti. Druhá kozmická rýchlosť je veľkosť parabolickej rýchlosti v tesnej blízkosti povrchu Zeme.

V gravitačnom poli Slnka sa pohybuje deväť veľkých planét (Merkúr, Venuša, Zem, Mars, Jupiter, Saturn, Urán, Neptún, Pluto), planétky, kométy a niekoľko kozmických lodí. Okolo niektorých planét obiehajú mesiace. V medziplanetárnom priestore slnečnej sústavy sú kométy a meteority.

Kozmonauti v družiciach alebo v kozmických lodiach, ktoré sa pohybujú len zotrvačnosťou (po vypnutí motorov), sú v beztiažovom stave. Je to spôsobené tým, že zotrvačná a gravitačná sila, ktoré pôsobia na kozmonauta, sú rovnako veľké, ale majú opačný smer, preto sa ich výslednica rovná nule.

Veličiny	Jednotky	Zákony	Vzťahy
			zvislý vrh nahor $d = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ $v = \|v_0 - g t\|$ vodorovný vrh $x = v_0 t$ $y = h - \frac{1}{2} g t^2$
kruhová rýchlosť $\boldsymbol{v}_k$	$m.s^{-1}$		$v_k = \sqrt{\frac{\varkappa M}{R + h}}$
parabolická rýchlosť $\boldsymbol{v}_p$	$m.s^{-1}$		$v_p = v_k \sqrt{2}$
		Keplerove zákony	3. Keplerov zákon $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$

CVIČENIA Z FYZIKY

Pokyny na cvičenia

Cvičenia z fyziky sa používajú spolu s učebnicou fyziky; obsahujú úlohy pre vašu prácu na delených hodinách vyučovania fyziky. Z pätnástich cvičení sa jedno zaoberá problematikou spracovania merania a určenia presnosti merania, sedem cvičení je teoretických a sedem laboratórnych. Okrem toho sú tu zaradené úlohy na opakovanie a precvičovanie vektorov, ktorým sa nevenuje samostatné cvičenie; úlohy na priebežné precvičovanie vektorov si budete vyberať.

Úlohou teoretických cvičení je jednak prehĺbiť, príp. doplniť poznatky, ktoré ste získali vo vyučovaní, jednak umožniť precvičiť si teoretické poznatky a naučiť sa ich aplikovať. V teoretických cvičeniach sú zaradené úlohy na precvičenie učiva, problémové úlohy a úlohy, ktoré spájajú fyzikálne vedomosti s technickou praxou.

V každom teoretickom cvičení je vždy niekoľko riešených príkladov a úloh na riešenie. Príklady nie sú len ukážkou postupu alebo vzorom na riešenie podobných úloh. Často je v nich uvedené podrobnejšie odvodenie poznatkov alebo ich rozšírenie z hľadiska praktických aplikácií. Preto je vhodné postup príkladov si dôkladne premyslieť.

Pri riešení úloh postupujte podľa vzorového zápisu na s. 43 v učebnici. Hoci vám takýto postup nezaručí správne vyriešenie úlohy, ale zabráni chybám, ktorých by ste sa mohli dopustiť pri nedbalom alebo neúplnom zápise riešenej úlohy. Každú úlohu riešte najprv všeobecne. Rozmerovú kontrolu je vhodné robiť, ak získate zložitejší všeobecný výraz, pri zostavovaní a úpravách ktorého ste sa mohli dopustiť omylu.

Keď je úloha zadaná číselne, dosadzujte číselné hodnoty vždy do všeobecného vzťahu. Pri výpočtoch používajte čo najviac kalkulačky, tabuľky, grafy a iné. Číselný výsledok zhodnoťte z hľadiska vecnej správnosti (či je fyzikálne alebo technicky možný). Pred výpočtom sa vždy snažte odhadnúť číselnú hodnotu výsledkov.

Teoretické úlohy budete riešiť v škole pod vedením učiteľa aj samostatne pri domácom cvičení. Náročnejšie úlohy (označené hviezdičkou) sú určené pre tých, ktorí sa o fyziku hlbšie zaujímajú.

Cieľom laboratórnych cvičení je, aby ste si prakticky overili teoretické poznatky, aby ste sa oboznámili s bežnými meradlami, s technikou merania a spracovania výsledkov merania, aby ste získali užitočné, praktické zručnosti.

Návody na laboratórne cvičenia obsahujú okrem stručnej teórie daného experimentu aj zoznam pomôcok, s ktorými budete pracovať, ďalej pracovný postup, vzory tabuliek a záverečné otázky, ktoré vám umožnia presvedčiť sa, do akej miery ste úlohu zvládli. Z každého laboratórneho cvičenia urobíte podľa pokynov učiteľa stručný zápis, ktorý musí obsahovať:

meno žiaka,
dátum,
názov laboratórneho cvičenia,
zoznam pomôcok,
stručnú charakteristiku práce, príp. vhodný náčrtok alebo schému,
tabuľku s výsledkami meraní a spracovanie meraní,
zhodnotenie údajov získaných meraním.

Pri práci budete dodržiavať laboratórny poriadok:

1. Na každé laboratórne cvičenie sa vopred pripravíte.
2. Pracujte podľa postupu v návode alebo podľa pokynov vyučujúceho.
3. Laboratórium i prístroje v ňom sú spoločným majetkom. Treba s nimi zaobchádzať opatrne, udržovať ich v čistote a poriadku.
4. Pred začatím práce a po nej prístroje prekontrolujte. Všetky chyby treba ohlásiť vyučujúcemu.
5. Pri práci treba dodržiavať bezpečnostné predpisy a správať sa disciplinovane.
6. Po skončení práce každá skupina uprace pracovisko a pripraví pomôcky na prácu ďalšej skupiny.

Cvičenie 1

Chyby merania

Zo základnej školy viete, že výsledok fyzikálneho merania je vždy zaťažený chybami. Hovoríme, že fyzikálne meranie danej veličiny sa robí vždy s istou **presnosťou.** Závisí to od mnohých okolností, napr. od nedokonalosti našich zmyslov, nepresnosti použitých **meracích prístrojov** (meradiel) a **metód merania,** od nestálosti vonkajších podmienok, pri ktorých meranie prebieha (otrasy, zmeny teploty okolitého prostredia atď.) a ďalších činiteľov. Takto vznikajú pri meraní **systematické chyby.** Systematické chyby možno omedziť tak, že použijeme napr. dokonalejšie meradlo alebo metódu merania, prihliadneme na niektoré vonkajšie vplyvy a berieme ich pri meraní do úvahy.

Pri meraní však môžu vznikať aj **hrubé chyby.** Spôsobuje ich najčastejšie nepozornosť, omyl alebo únava pozorovateľa (napr. únava očí). Keď sa v nameraných číselných hodnotách vyskytne hodnota, ktorá sa od ostatných hodnôt nápadne odlišuje, potom ide zvyčajne o hrubú chybu. Takúto číselnú hodnotu z ďalšieho spracovania výsledkov merania vylúčime. Meranie treba robiť tak, aby sme sa hrubých chýb nedopúšťali.

No aj keď sa príčiny systematických i hrubých chýb odstránia, vznikajú pri meraní chyby; sú to **náhodné chyby.** Vznikajú v dôsledku kolísajúcich rušivých vplyvov.

Náhodné chyby sa nevyskytujú pravidelne. Prejavujú sa v tom, že pri opakovanom meraní danej veličiny nedostávame stále rovnaký výsledok (stále tú istú číselnú hodnotu). Na rozdiel od systematických alebo hrubých chýb, náhodné chyby nemožno odstrániť, ani vylúčiť. Ich vplyv na presnosť merania však môžeme zmenšiť tým, že danú veličinu (napr. dĺžku hrany telesa) zmeriame viackrát. Potom z nameraných hodnôt danej veličiny určíme **najpravdepodobnejšiu** hodnotu, t. j. hodnotu, ktorú považujeme za najbližšiu skutočnej hodnote.

Ďalej sa budeme zaoberať otázkami, ako určovať najpravdepodobnejšiu hodnotu meranej veličiny (za predpokladu, že systematické a hrubé chyby sa už vylúčili, príp. že poznáme spôsob, ako ich vziať pri spracovaní výsledkov do úvahy).

V laboratórnych prácach budeme číselné hodnoty fyzikálnych veličín jednak zisťovať **bezprostredným meraním,** jednak určovať **výpočtom z veličinovej rovnice.** Bezprostredným meraním zisťujeme napr. dĺžku predmetu pomocou pravítka, hmotnosť telesa na laboratórnych váhach, teplotu kvapaliny pomocou teplomera. Pri bezprostrednom meraní získame teda číselnú hodnotu veličiny odčítaním na stupnici prístroja (pravítka, teplomeru, váh a pod.). Pri výpočte číselnej hodnoty veličiny vychádzame z veličinovej rovnice, ktorou je daná veličina určovaná. Tak určujeme napr. obsah jednoduchých obrazcov, objem telesa, hustotu telesa.

Na niektorých príkladoch ukážeme, ako získavame najpravdepodobnejšie hodnoty fyzikálnych veličín pri ich bezprostrednom meraní a pri výpočte pomocou fyzikálnej rovnice.

A. *Bezprostredné meranie fyzikálnej veličiny*

Príklad 1

Dĺžku jednej z hrán oceľovej kocky sme zmerali posuvným meradlom desaťkrát. Namerali sme tieto číselné hodnoty (druhý stĺpec tabuľky):

1.	2.	3.
Poradové číslo merania	$\frac{l_k}{\text{mm}}$	$\frac{\Delta l_k = \bar{l} - l_k}{\text{mm}}$
1.	107,2	(+) 0,1
2.	107,4	(−) 0,1
3.	107,3	0,0
4.	107,1	(+) 0,2
5.	107,3	0,0
6.	107,5	(−) 0,2
7.	107,4	(−) 0,1
8.	107,1	(+) 0,2
9.	107,5	(−) 0,2
10.	107,2	(+) 0,1
súčet	1 073,0	1,2
aritmetický priemer	107,3	0,1

Zo základnej školy viete, že správnejšia hodnota ako hodnota nameraná raz je **aritmetický priemer** z nameraných hodnôt. Aritmetický priemer určíme ako podiel zo súčtu všetkých nameraných hodnôt a počtu týchto hodnôt $\left(\bar{l} = \frac{1\,073{,}0\ \text{mm}}{10} = 107{,}3\ \text{mm}\right)$. Aritmetický priemer predbežne vypočítame na taký počet miest, ktorý je o jedno miesto väčší ako počet miest pri jednotlivých hodnotách ($\bar{l} = 107{,}3$ mm).

Potom určíme pre každé meranie rozdiel Δl_k medzi nameranou hodnotou veličiny (l_k) a aritmetickým priemerom ($\bar{l}$). Tento rozdiel ($\Delta l_k = \bar{l} - l_k$) nazývame **odchýlka.** Z jednotlivých odchýlok vypočítame ďalej priemernú odchýlku (Δl) ako aritmetický priemer absolútnych hodnôt odchýlok z jednotlivých meraní

$$\left(\Delta l = \frac{0{,}10 + 0{,}20 + 0{,}00 + 0{,}20 + \ldots + 0{,}10}{10}\ \text{mm} = 0{,}12\ \text{mm}\right)$$

Vypočítanú číselnú hodnotu priemernej odchýlky zaokrúhlime s prihliadnutím na to, že pri ďalšom spracovaní sa obmedzíme iba na jednu platnú číslicu (0,1 mm). Pomocou aritmetického priemeru a priemernej odchýlky určíme nakoniec **hornú** a **dolnú medzu intervalu,** o ktorom predpokladáme, že obsahuje skutočnú hodnotu meranej veličiny. Stredom tohto intervalu je aritmetický priemer, ktorý považujeme za najpravdepodobnejší. Preto výsledok píšeme v tvare

$$l = \bar{l} \pm \Delta l = (107{,}3 \pm 0{,}1)\ \text{mm}$$

Skutočná dĺžka hrany kvádra leží teda v medziach

$$107{,}2\ \text{mm} \leqq l \leqq 107{,}4\ \text{mm}$$

Medze intervalu, o ktorom predpokladáme, že obsahuje skutočnú hodnotu veličiny, sú pomocou priemernej odchýlky určené iba približne. Pre naše účely to však stačí.

Vidíme, že **meraním nezisťujeme skutočnú číselnú hodnotu veličiny, ale hornú a dolnú hranicu neúplného čísla, ktorým vyjadrujeme číselnú hodnotu veličiny (pri daných jednotkách).**

Aby sa mohla **porovnať** presnosť merania danej veličiny (napr. dĺžky) v rôznych prípadoch (napr. meranie dĺžky hrany kocky posuvným meradlom a meranie dĺžky strany pozemku meracím pásmom), zavádzame

priemernú relatívnu odchýlku. Určená je podielom priemernej odchýlky a aritmetického priemeru.

V našom prípade merania dĺžky hrany kocky možno zapísať

$$\delta l = \frac{\Delta l}{\bar{l}} = \frac{0{,}1}{107{,}3} \doteq 0{,}001 = 0{,}1\,\%$$

kde symbol δl označuje priemernú relatívnu odchýlku pri meraní dĺžky. Relatívna odchýlka sa tiež určuje na jednu platnú číslicu a vyjadruje sa najčastejšie v percentách.

Porovnajme odchýlku a relatívnu odchýlku z nášho príkladu s kockou s odchýlkou a relatívnou odchýlkou pri meraní dĺžky d strany pozemku meracím pásmom.

Pri meraní meracím pásmom bolo

$$d = (220{,}5 \pm 0{,}2)\ \mathrm{m} \qquad \delta d = \frac{\Delta d}{\bar{d}} = \frac{0{,}2}{220{,}5} = 0{,}001 = 0{,}1\,\%$$

Hoci odchýlka pri meraní dĺžky strany pozemku je tisíckrát väčšia ako odchýlka pri meraní dĺžky hrany kocky, je relatívna odchýlka v obidvoch prípadoch rovnaká. Hovoríme, že obe merania majú **rovnakú presnosť.**

B. Určovanie veličín výpočtom z veličinovej rovnice

Fyzikálna veličina určovaná zo súčtu alebo rozdielu fyzikálnych veličín

Príklad 2

Dĺžky dvoch strán obrazca sa odmerali takto: $l_1 = (32{,}1 \pm 0{,}1)$ cm a $l_2 = (23{,}5 \pm 0{,}1)$ cm. Určte, aká je maximálna absolútna a relatívna chyba dĺžky $l = l_1 + l_2$.

Riešenie

Platí

$$\begin{aligned} l = l_1 + l_2 &= \bar{l}_1 \pm \Delta l_1 + l_2' \pm \Delta l_2 = \\ &= (\bar{l}_1 + \bar{l}_2) \pm (\Delta l_1 + \Delta l_2) = \bar{l} \pm \Delta l \end{aligned}$$

kde $\bar{l} = \bar{l}_1 + \bar{l}_2$ a $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$.

Pre náš konkrétny prípad potom dostaneme

$$l = (55{,}6 \pm 0{,}2)\ \text{cm}$$

Na príklade s dĺžkou vidíme, že **odchýlka súčtu dvoch veličín (toho istého druhu) sa rovná nanajvýš súčtu odchýlok pri jednotlivých veličinách. To isté platí aj pre odchýlku rozdielu dvoch veličín. Výsledok možno zovšeobecniť aj na súčet alebo rozdiel viacerých veličín.**

Ako určíme najväčšiu relatívnu odchýlku súčtu alebo rozdielu veličín? Vezmime si opäť náš príklad s dĺžkou. Pretože odchýlka Δl súčtu $l = l_1 + l_2$ sa rovná $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$, bude sa relatívna odchýlka δl rovnať $\delta l = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{\bar{l}_2 + \bar{l}_1}$. Pre uvedený konkrétny prípad dostaneme

$$\delta l = \frac{0{,}2\ \text{cm}}{55{,}6\ \text{cm}} \doteq 0{,}004 = 0{,}4\ \%$$

Pri rozdieloch veličín by sme relatívnu odchýlku určili podobne, iba v menovateli by bol rozdiel (v čitateli ostáva súčet).

Fyzikálna veličina určovaná zo súčinu alebo podielu fyzikálnych veličín

Príklad 3

Posuvným meradlom sa odmerali strany obdĺžnikovej dosky: $a = (16{,}32 \pm 0{,}01\ \text{cm})$, $b = (7{,}41 \pm 0{,}01)$ cm. Určte odchýlku a relatívnu odchýlku obsahu obdĺžnikovej dosky.

Riešenie

Dĺžky strán obdĺžnika a a b možno všeobecne vyjadriť v tvare $a = \bar{a} \pm \Delta a$, $b = \bar{b} \pm \Delta b$. Potom môžeme písať: $S = a \,.\, b = \bar{a} \,.\, \bar{b} \pm \Delta a \,.\, \bar{b} \pm \Delta b \,.\, \bar{a} \pm \Delta a \,.\, \Delta b$.
Keďže súčin $\Delta a \,.\, \Delta b$ je v porovnaní s ostatnými členmi malý, možno ho zanedbať a dostaneme

$$a \,.\, b = \bar{a} \,.\, \bar{b} \pm (\Delta a \,.\, \bar{b} + \Delta b \,.\, \bar{a})$$

alebo $S=\bar{S}\pm\Delta S$, kde $\bar{S}=\bar{a}\,.\,\bar{b}$ je stredom naposledy uvedeného intervalu. Výraz $\Delta a\,.\,\bar{b}+\Delta b\,.\,\bar{a}\doteq\Delta S$ možno potom považovať za absolútnu odchýlku pri meraní obsahu. Pre relatívnu odchýlku bude platiť

$$\delta S=\frac{\Delta S}{\bar{S}}=\frac{\Delta a\,.\,\bar{b}+\Delta b\,.\,\bar{a}}{\bar{a}\,.\,\bar{b}}=\frac{\Delta a}{\bar{a}}+\frac{\Delta b}{\bar{b}}=\delta a+\delta b$$

Z uvedeného je zrejmé, že **relatívna odchýlka súčinu dvoch alebo viacerých veličín sa rovná nanajvýš súčtu relatívnych odchýlok jednotlivých veličín tvoriacich súčin.**

Dosadením konkrétnych hodnôt dostaneme:

1. $\bar{S}=\bar{a}\,.\,\bar{b}=(16{,}32\,.\,7{,}41)\ \mathrm{cm}^2\doteq 120{,}931\,2\ \mathrm{cm}^2$;
2. $\delta S=\dfrac{0{,}01}{7{,}41}+\dfrac{0{,}01}{16{,}32}=0{,}002=0{,}2\ \%$;
3. $\Delta S=\delta S\,.\,\bar{S}=0{,}002\,.\,120{,}931\,2\ \mathrm{cm}^2=0{,}242\doteq 0{,}2\ \mathrm{cm}^2$;
4. $S=\bar{S}\pm\Delta S=(120{,}9\pm 0{,}2)\ \mathrm{cm}^2$.

Odchýlky sme zaokrúhľovali na jednu platnú číslicu. Keďže posledná platná číslica v odchýlke je rádu desatín milimetra, posledná platná číslica v $\bar{S}$ musí byť iba rádu desatín centimetra.

Pri výpočte hodnoty S možno postupovať aj tak, že sa najprv určí odchýlka ΔS zo vzťahu $\Delta S=\Delta a\,.\,\bar{b}+\Delta b\,.\,\bar{a}$ a potom sa vypočíta δS. Takýto postup je však zdĺhavý. Vhodnejšie je teda najprv určiť δS a $\bar{S}$ a z týchto veličín vypočítať ΔS.

Príklad 4

Odmeraný objem telesa $V=(2{,}52\pm 0{,}03)\ \mathrm{cm}^3$, hmotnosť tohto telesa $m=(20{,}6\pm 0{,}1)$ g. Určte odchýlku a relatívnu odchýlku hustoty telesa.

Riešenie

Hustotu telesa určíme z definičnej rovnice $\varrho=\dfrac{m}{V}$. Pre relatívnu odchýlku $\delta\varrho$ možno odvodiť

$$\delta\varrho=\frac{\Delta\varrho}{\bar{\varrho}}=\frac{\Delta m}{\bar{m}}+\frac{\Delta V}{\bar{V}}=\delta m+\delta V$$

Relatívna odchýlka podielu dvoch veličín sa rovná nanajvýš súčtu relatívnych odchýlok veličín v čitateli a v menovateli.

Dosadením konkrétnych hodnôt dostaneme

$$\bar{\varrho}=\frac{20,6}{2,52}\ \mathrm{g.cm^{-3}} \doteq 8,175\ \mathrm{g.cm^{-3}}$$

$$\delta\varrho=\frac{0,1}{20,6}+\frac{0,03}{2,52}\doteq 0,02=2\,\%$$

$$\Delta\varrho=\delta\varrho\,.\,\bar{\varrho}\doteq 0,2\ \mathrm{g.cm^{-3}}$$

$$\varrho=\bar{\varrho}\pm\Delta\varrho=(8,2\pm 0,2)\ \mathrm{g.cm^{-3}}$$

Poznatky môžeme zhrnúť do tabuľky (symboly A, B označujú veličiny, $\bar{A}$, $\bar{B}$ priemery, ΔA, ΔB odchýlky, δA, δB relatívne odchýlky).

Operácia	**Priemer**	**Odchýlka**	**Relatívna odchýlka**
$A\pm B$	$\bar{A}\pm\bar{B}$	$\boxed{\Delta A+\Delta B}$	$\frac{\Delta A+\Delta B}{\bar{A}\pm\bar{B}}$
$A\,.\,B$	$\bar{A}\,.\,\bar{B}$	$\Delta A\,.\,\bar{B}+\bar{A}\,.\,\Delta B$	$\boxed{\frac{\Delta A}{\bar{A}}+\frac{\Delta B}{\bar{B}}=\delta A+\delta B}$
$\frac{A}{B}$	$\frac{\bar{A}}{\bar{B}}$		$\boxed{\frac{\Delta A}{\bar{A}}+\frac{\Delta B}{\bar{B}}=\delta A+\delta B}$
$A^2=A\,.\,A$	$\bar{A}\,.\,\bar{A}=(\bar{A})^2$		$\frac{\Delta A}{A}=\frac{\Delta A}{\bar{A}}=2\delta A$
$\sqrt{A}$	$\sqrt{\bar{A}}$		$\frac{1}{2}\delta A$

Cvičenie 2 (1. laboratórne)

Meranie dĺžky telesa

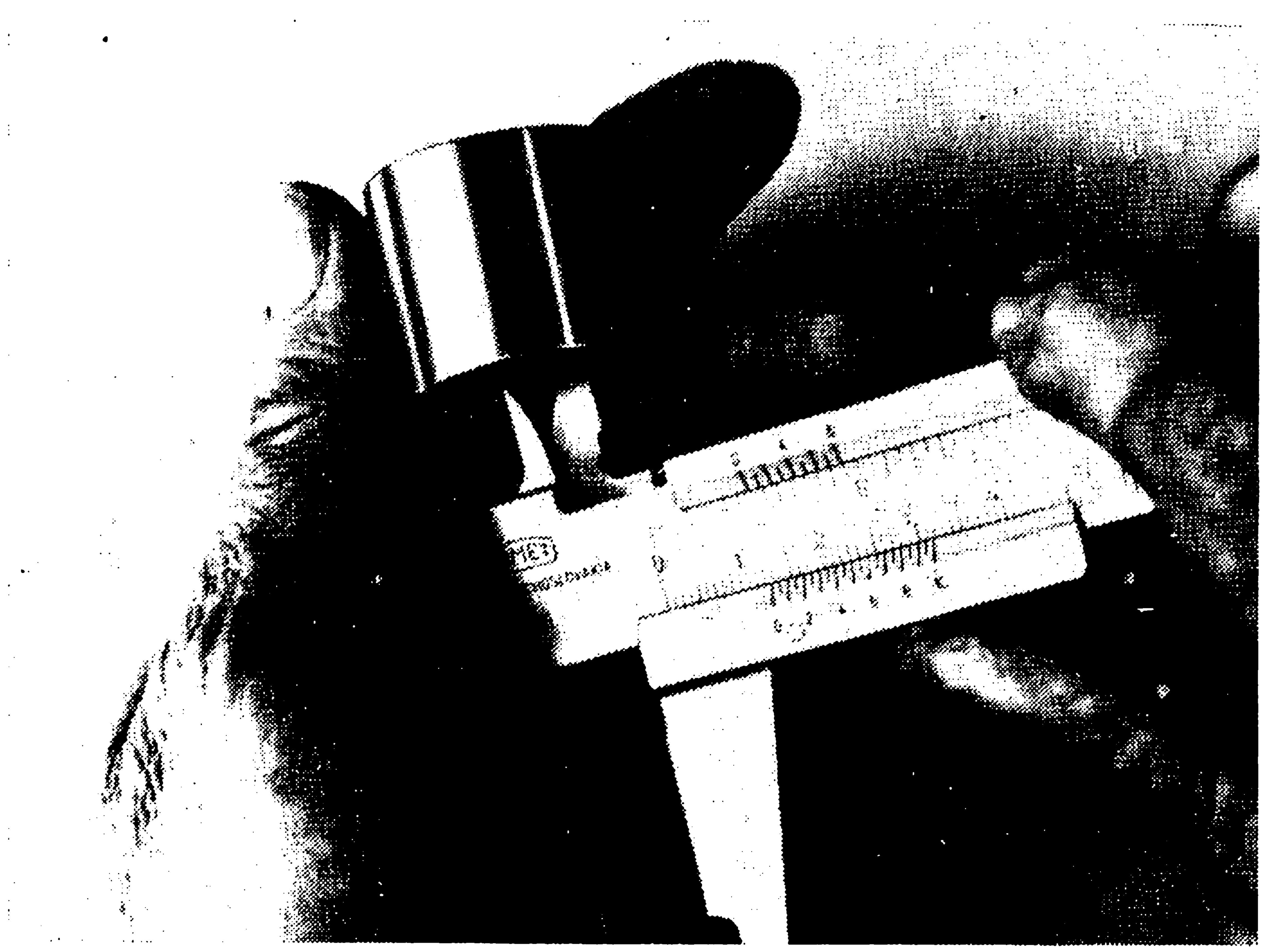
Na meranie malých dĺžok sa používa posuvné meradlo s nóniom a mikrometrické meradlo.

Posuvné meradlo s nóniom sa skladá z pravítka s milimetrovou stupnicou a pevným ramenom. Na pravítku je navlečená posuvná objímka s ramenom (obr. C2-1). Na objímke je pomocná stupnica, nazvaná nónius. Dĺžka 9 mm je na ňom rozdelená na 10 dielikov. Každý dielik nónia meria teda 0,9 mm. Pri meraní ukazuje nula nónia na pravítku celý počet milimetrov. Desatiny milimetrov sa rovnajú číslu rysky nónia, ktorá splýva s niektorou ryskou meradla. Takýmto meradlom možno zisťovať dĺžky na 0,1 mm. Pri dvadsatinnom nóniu (19 mm je rozdelených na 20 dielikov) možno merať s presnosťou na 0,05 mm (obr. C2-2). Posuvné meradlo s nóniom býva upravené tak, že ním môžeme merať vnútorné priemery a hĺbku dutín (obr. C2-3) .

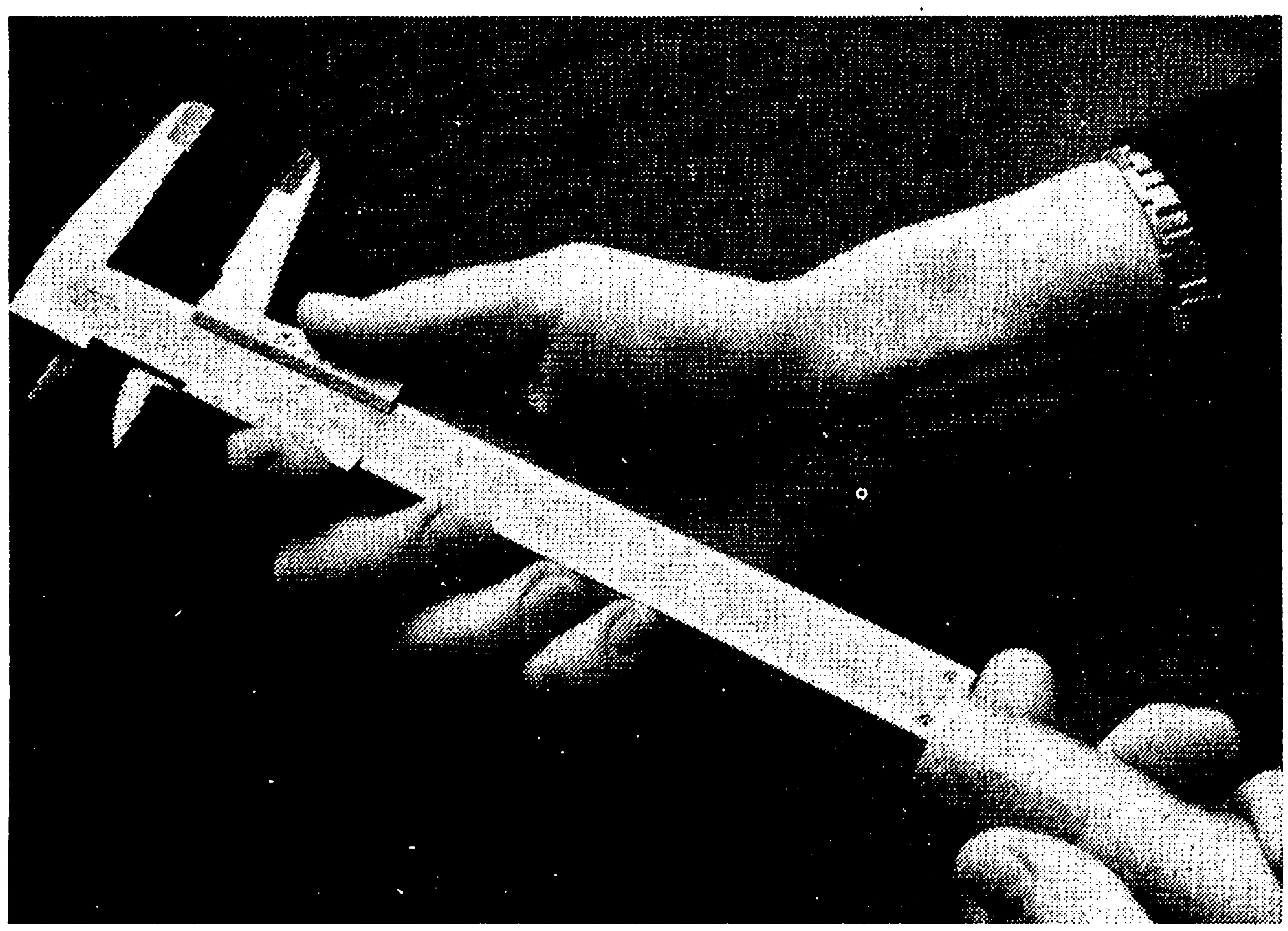
Mikrometrické meradlo (obr. C2-4) má dve dotykové plochy, ktoré sa pri meraní dotýkajú predmetu, ktorého dĺžku zisťujeme. Jedna dotyková plocha je na strmeni, druhá je spojená so skrutkou, ktorá má stúpanie 0,5 mm. Celé milimetre (horná stupnica) a polovice milimetrov (dolná

Obr. C2-1

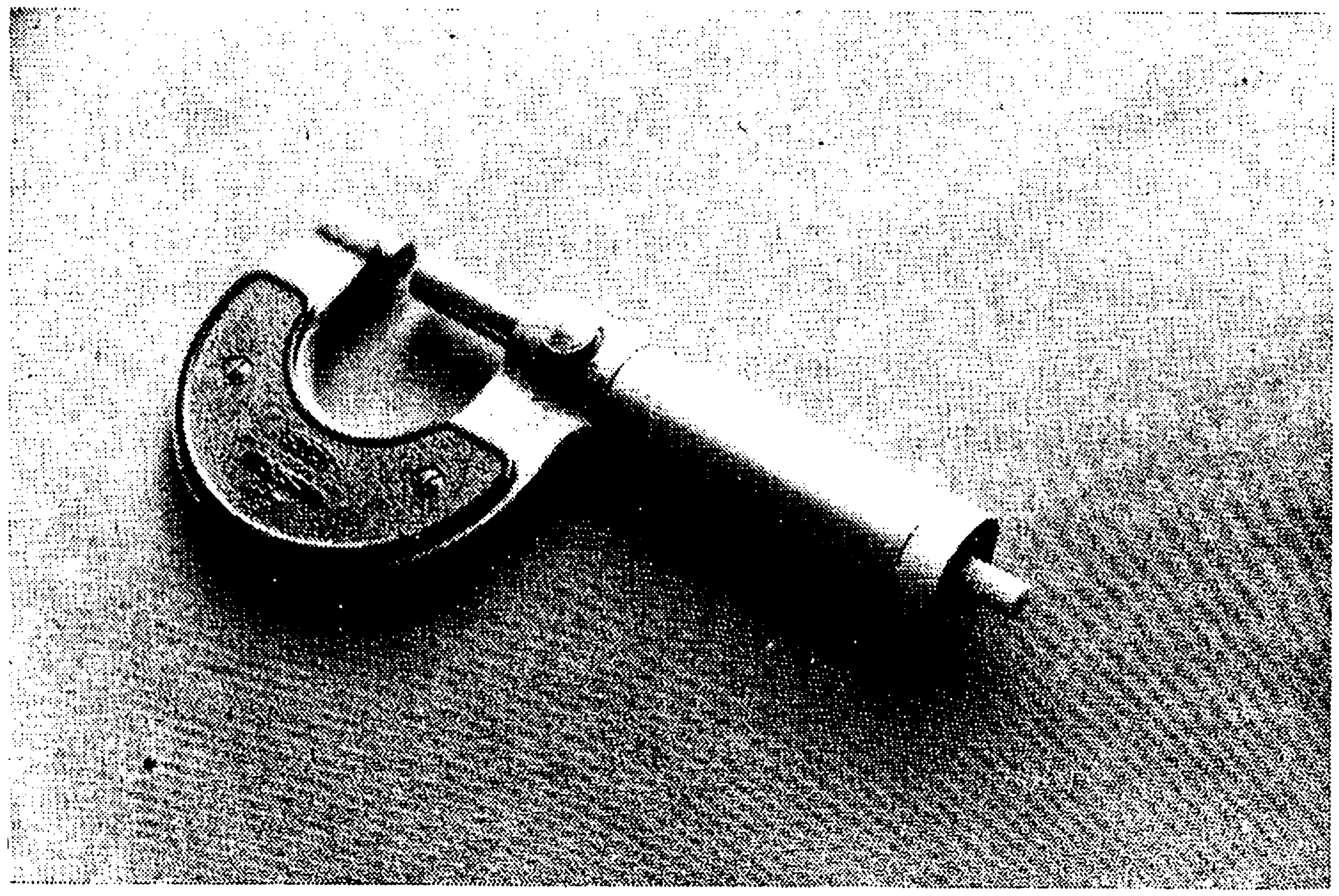
Obr. C2-2



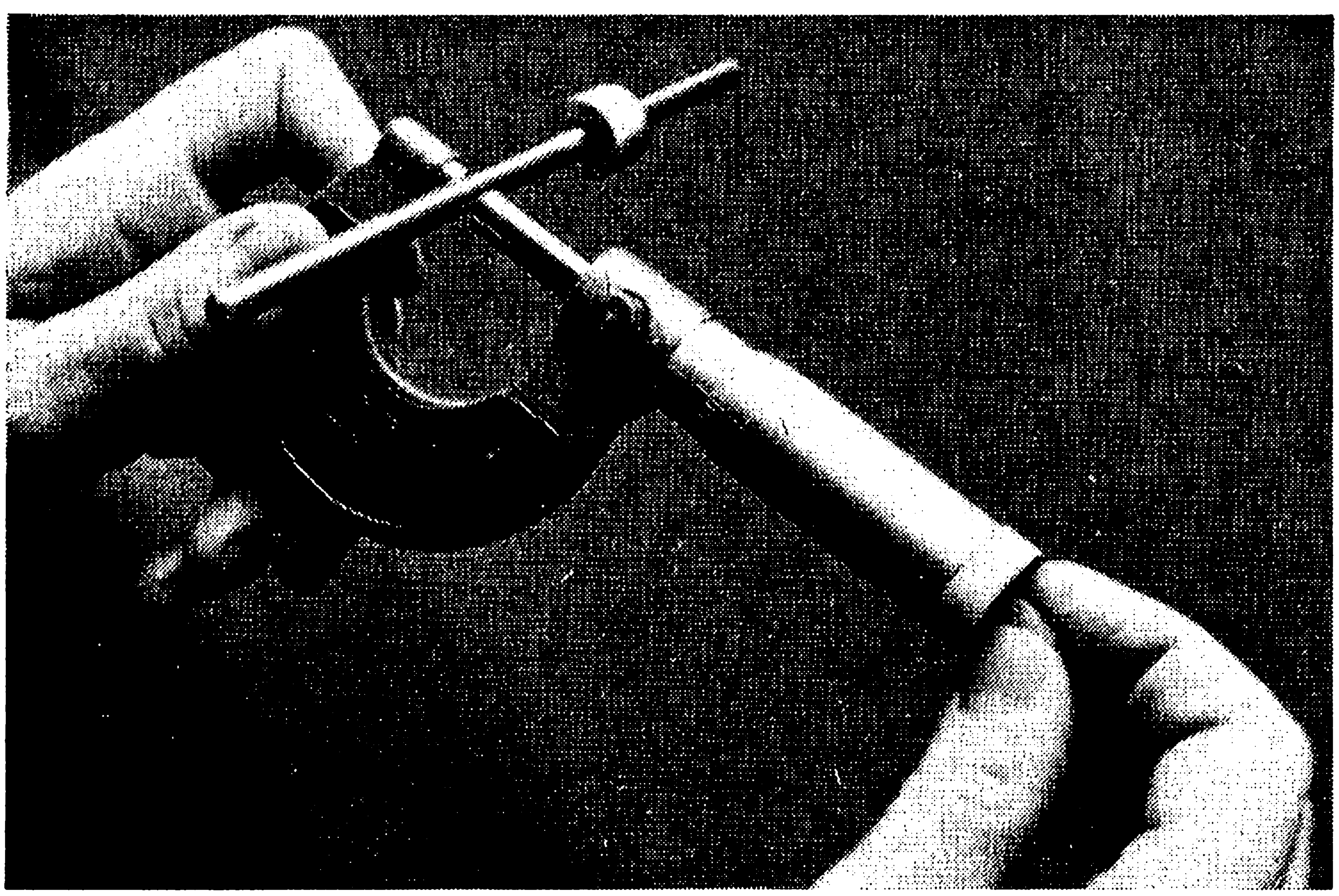
Obr. C2-3



stupnica) sú vyznačené na valcovej matici skrutky. So skrutkou je spojený bubienok, ktorý je kužeľovite skosený a na obvode je na ňom vyznačených 50 dielikov. Otočením o celý uhol sa dotyková plôška posunie o 0,5 mm. Otočením bubienka o jeden dielik sa teda plôška posunie o 0,01 mm. Aby sme pri meraní dosiahli vždy rovnaký tlak a nepoškodili skrutku meradla,



Obr. C2-4



Obr. C2-5

otáčame pri doťahovaní spojkou (obr. C2-5). Pri správnom utiahnutí začnú zuby spojky preskakovať.

Úloha: Odmerajte priemer a výšku valčeka posuvným meradlom s nóniom a mikrometrickým meradlom.

Pomôcky: valček, posuvné meradlo s nóniom, mikrometrické meradlo

Postup

1. Odmerajte výšku h_1 valčeka posuvným meradlom s nóniom a priemer valčeka d_1. Urobte päť meraní.
2. Odmerajte výšku h_2 a priemer d_2 valčeka mikrometrickým meradlom. Urobte päť meraní.
3. Z nameraných hodnôt určte aritmetické priemery $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$, $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$. Vypočítajte priemernú odchýlku Δ a relatívnu odchýlku δ všetkých meraní.
4. Porovnajte presnosť merania jednotlivými meradlami (porovnávaním relatívnych odchýlok merania).

Číslo merania	**Meranie posuvným meradlom s nóniom**				**Meranie mikrometrickým meradlom**			
	h_1	Δh_1	d_1	Δd_1	h_2	Δh_2	d_2	Δd_2
	10^{-3} m	10^{-3} m	10^{-3} m	10^{-3} m	10^{-3} m	10^{-3} m	10^{-3} m	10^{-3} m
1.								
2.								
3.								
4.								
5.								
Súčet								
Aritm. priemer								

Poznámka: Keď sú obidve dotykové plochy navzájom k sebe pritlačené a na stupnici nie je údaj 0,00 mm, potom veličiny h_2 a d_2 určíme zo vzťahov $h_2 = n - n_0$, $d_2 = n' - n_0$, kde n_0 je údaj pri navzájom stlačených dotykových plochách a n, n' sú údaje pri meraní rozmerov telesa.

Cvičenie 3 (2. laboratórne)

Meranie hustoty pevnej látky

Zo skúsenosti viete, že telesá z rôznych látok rovnakého objemu majú rozličnú hmotnosť. Súvisí to s vnútornou štruktúrou látok. S touto vlastnosťou látok ste sa oboznámili už v 6. ročníku základnej školy. Viete, že podiel hmotnosti a objemu rôznych homogénnych telies z tej istej látky je stály a nazýva sa **hustota látky.**

Hustotu látky vypočítame, ak delíme hmotnosť m ľubovoľného telesa z tejto látky jeho objemom V

$$\varrho = \frac{m}{V}$$

Jednotkou hustoty je $kg.m^{-3}$.

Úlohu meranie hustoty rozdelíme na tri časti:

a) meranie objemu,
b) meranie hmotnosti,
c) určenie hustoty pevnej látky.

Úloha: Určte hustotu pevnej látky. Zistenú hodnotu porovnajte s hodnotou uvedenou v tabuľkách.

Pomôcky: homogénny valček používaný v 1. laboratórnom cvičení, odmerný valec so stupnicou v ml, nádoba s destilovanou vodou, laboratórne váhy, závažia

a) Meranie objemu

Princíp

Podľa známeho vzťahu $V = \frac{\pi}{4} d^2 h$ vypočítame objem valčeka z hodnôt nameraných posuvným meradlom s nóniom v 1. laboratórnom cvičení. Vypočítame relatívnu odchýlku objemu podľa vzťahu $\delta_V = \frac{\Delta V}{V} = 2\delta_d + \delta_h$ a ďalej odchýlku $\Delta V = \delta_V V$. Výpočet overíme odmeraním objemu odmerným valcom. Odmerný valec má stupnicu v istých jednotkách.

Skôr ako začneme merať objem odmerným valcom, zistíme, v akých jednotkách je stupnica odmerného valca a uvedomíme si, koľko objemových jednotiek zodpovedá jednému dieliku stupnice. Pri meraní si zvolíme vhodný odmerný valec, t. j. taký, aby jeden dielik jeho stupnice predstavoval čo najmenší objem. Na meranie použijeme kvapalinu, v ktorej sa merané pevné teleso nerozpúšťa, ani sa nemení jeho zloženie.

Postup

1. Do odmerného valca nalejeme destilovanú vodu a určíme jej objem V_1.
2. Merané pevné teleso vhodne upevníme a celé ho ponoríme do kvapaliny v odmernom valci. Hladina vody v odmernom valci sa zvýši a stupnica ukáže hodnotu objemu $V_2 = V_1 + V$, kde V je objem pevného telesa. Pritom dbáme na to, aby povrch vody nevystúpil nad horný koniec stupnice odmerného valca. Potom objem pevného telesa

$$V = V_2 - V_1$$

b) Meranie hmotnosti

Princíp

Meranie hmotnosti je založené na porovnávaní hmotnosti telies na rovnoramenných váhach. Hlavnou časťou rovnoramenných váh je vahadlo, ktoré je v strede podoprené vodorovnou hranou (britom) na hladkej podložke (lôžku). Na koncoch vahadla sú zavesené dve rovnaké misky. Uprostred vahadla je upravený jazýček, ktorého koniec ukazuje na stupnici. Keď sú misky prázdne a váhy správne, ustáli sa vahadlo vo vodorovnej polohe a jazýček ukazuje na strednú čiarku stupnice. Laboratórne váhy majú aretáciu, ktorou sa vahadlo zdvíha tak, aby sa brit nedotýkal podložky a vahadlo nekývalo. Kým porovnávame hmotnosť telesa a závažia, váhy odaretujeme. Keď s vahadlom nepracujeme, alebo závažie na miskách meníme, musia byť váhy aretované.

Postup

1. Merané teleso položíme na ľavú misku váh.
2. Na pravú misku postupne pridávame závažia, pričom začneme od najväčšieho závažia v sade, až kým sa jazýček neustáli na strednej čiarke

stupnice, alebo okolo nej mierne nekmitá. Závažia neberieme priamo do ruky, ale ich prenášame pinzetou.

3. Po ustálení jazýčka na strednej čiarke stupnice váhy aretujeme a sčítame hmotnosti všetkých závaží na pravej miske. Tento súčet sa rovná hmotnosti m meraného telesa.
4. Určíme relatívnu odchýlku δm. Pri určovaní hmotnosti na bežných laboratórnych váhach zistíme pri opakovanom meraní zvyčajne rovnakú hodnotu hmotnosti. Z toho však nemožno usúdiť, že sme hmotnosť určili presne, bez akejkoľvek chyby. Každým prístrojom môžeme totiž merať iba s istou presnosťou. Aj keď rozdiely pri jednotlivých meraniach nezistíme, uvažujeme, že namerané hodnoty sú zaťažené odchýlkou závislou od **triedy presnosti** meradla.
   Priemernú odchýlku pri váhach, ktorými určujete hmotnosť, vám oznámi vyučujúci. Zvyčajne sa uvažuje, že priemerná odchýlka je 0,1 g ($\Delta m = 0{,}1$ g).

c) Určenie hustoty látky

Princíp

Hodnoty hmotnosti a objemu získané výpočtom majú tvar neúplných čísiel. Použitím vzťahu

$$\varrho = \frac{m}{V}$$

vypočítame hustotu meranej látky.

Postup

1. Pri spracovaní nameraných hodnôt budeme postupovať podobne ako v cvičení 1, príklad 4.
2. Vypočítame relatívnu odchýlku meranej hustoty a potom odchýlku meranej hustoty.
3. Výslednú hodnotu vyjadríme pomocou intervalu.

Otázky

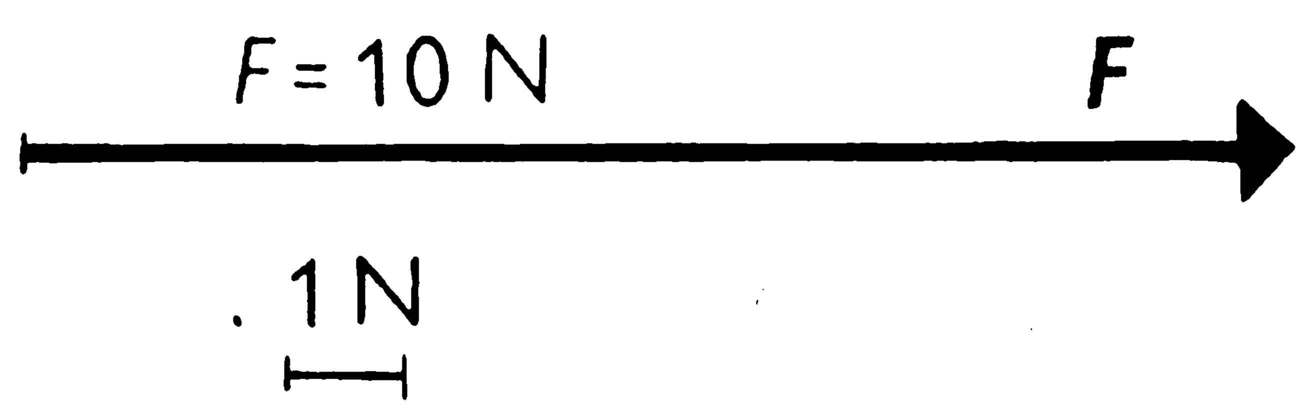
1. Porovnajte nameranú hodnotu s údajom v tabuľkách a určte, z akého materiálu je merané teleso. Ak sa nameraná hodnota odlišuje od hodnoty v tabuľke, zdôvodnite vzniknutý rozdiel.
2. Ako by ste mohli spresniť urobené merania?
3. Navrhnite metódu, pomocou ktorej by ste zistili, či nejaké teleso zo známej látky je plné alebo duté.

Úlohy na opakovanie a precvičenie vektorov

1. Sila $\boldsymbol{F}$ má smer zvislo nahor a veľkosť $F = 5$ N. Znázornite silu $\boldsymbol{F}_1$ v tom istom smere, ktorej veľkosť je dvakrát taká veľká.
2. Na obr. C1 je znázornená sila $\boldsymbol{F}_1$, ktorej veľkosť je 1 N. Znázornite silu $\boldsymbol{F}_2$ v opačnom smere, ktorej veľkosť je 3,5 N.

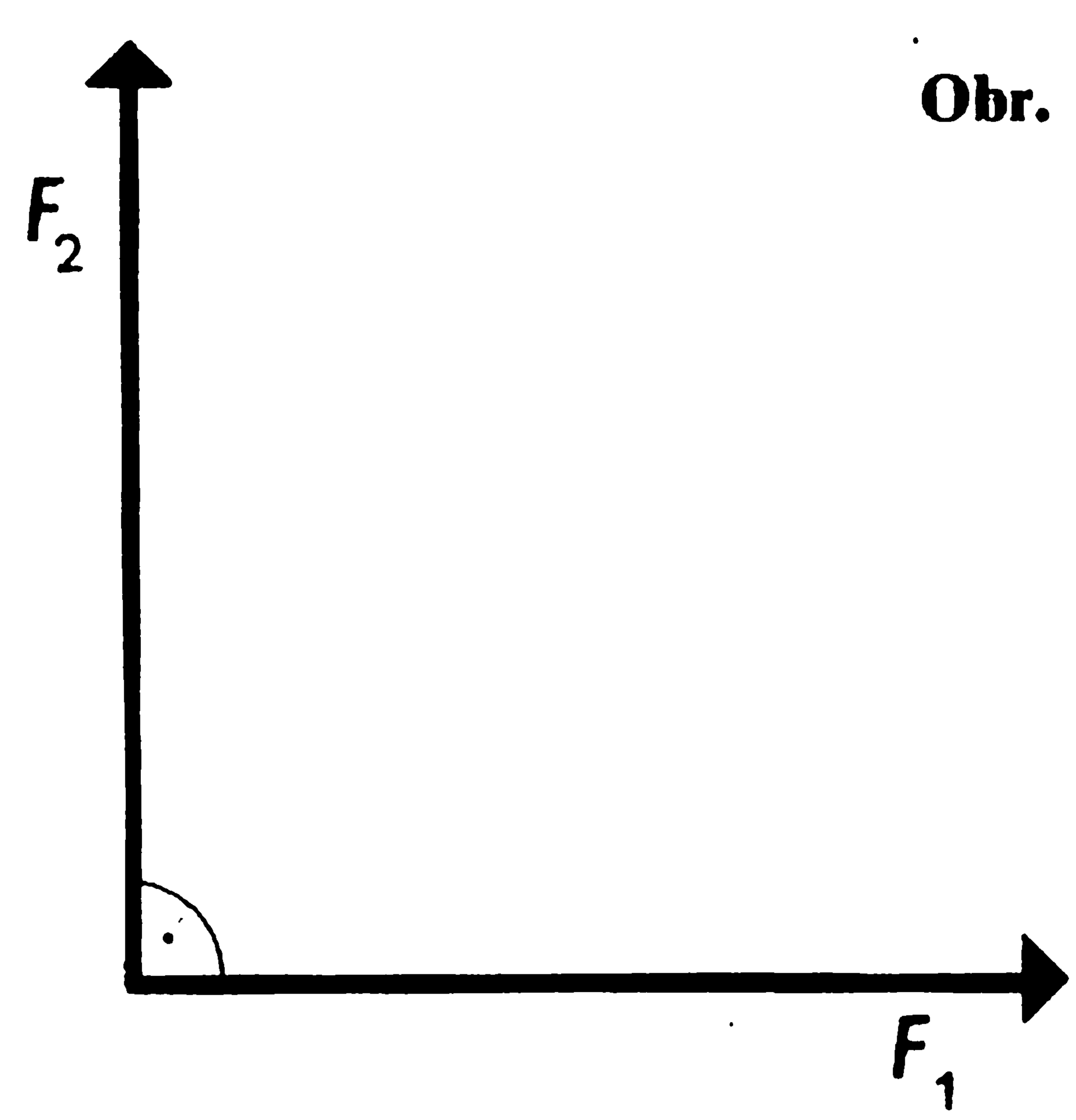
Obr. C1

3. Na obr. C2 je znázornená sila $\boldsymbol{F}$ s veľkosťou $F = 10$ N. Znázornite silu, ktorá so silou $\boldsymbol{F}$ zviera uhol $+90°$ a má veľkosť 0,01 kN.



Obr. C2

4. a) Zložte graficky silu s veľkosťou $F_1 = 10$ N pôsobiacu zvislo nahor a silu s veľkosťou $F_2 = 5$ N pôsobiacu v tom istom bode telesa zvislo nadol.
   b) Zapíšte a určte veľkosť a smer výslednice.
5. a) Zložte graficky sily s veľkosťami $F_1 = 5$ N a $F_2 = 10$ N, ktoré pôsobia v tom istom bode telesa zvislo nadol.
   b) Zapíšte a určte veľkosť a smer výslednice.
6. Určte graficky aj výpočtom výslednicu síl na obr. C3.
   $F_1 = F_2 = 5$ N ($F_3 = 5 \,.\, \sqrt{2}$ N, $\sphericalangle\, \boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_3 = 45°$)



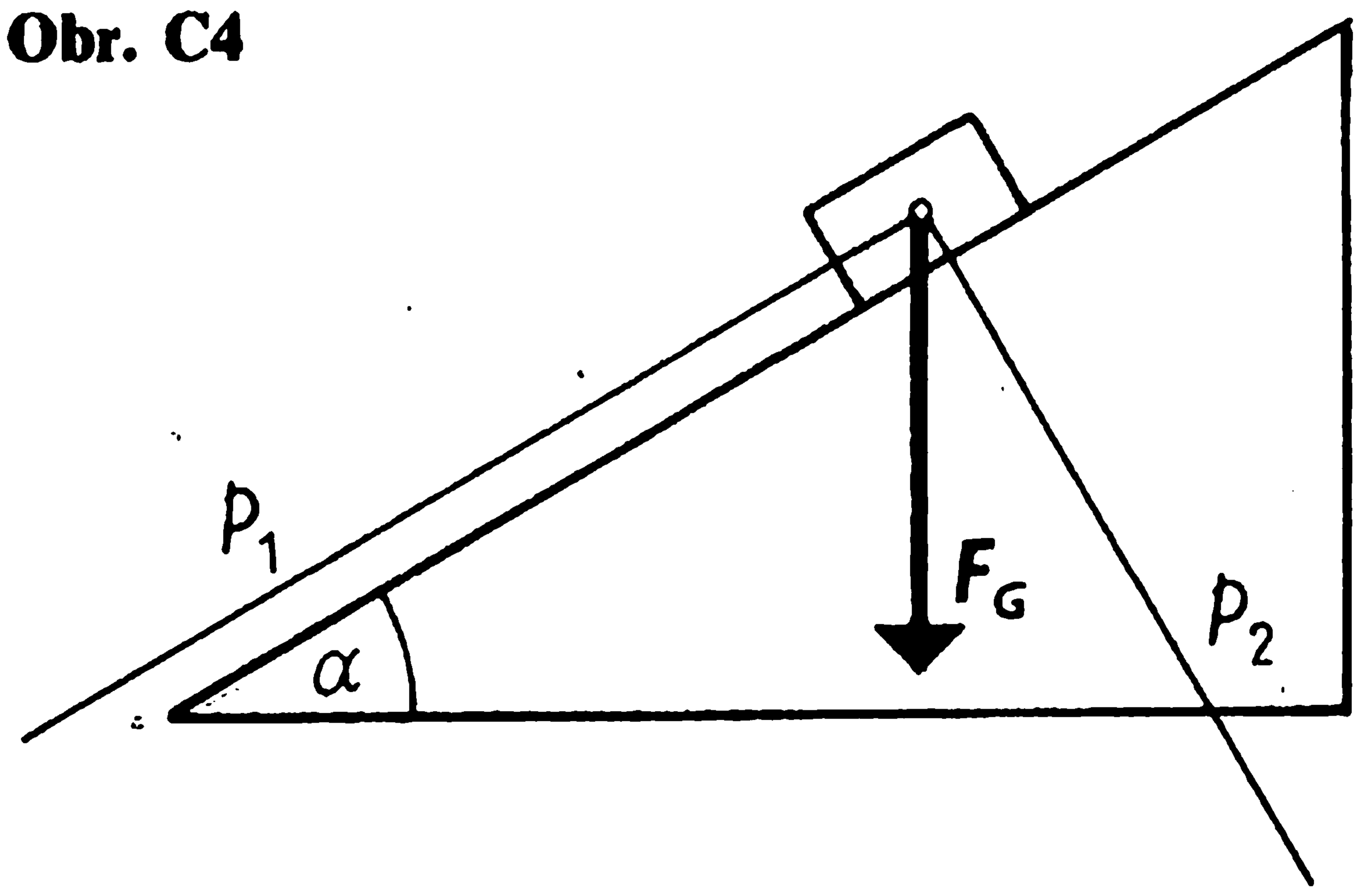
Obr. C3

7. Určte graficky aj výpočtom výslednicu síl s rovnakou veľkosťou $F_1 = F_2 = 6$ N, ktoré zvierajú uhol 60°. (Využite vlastnosti rovnostranného trojuholníka a vlastnosti uhlopriečok rovnobežníka.)

[$F_3 = 10{,}4$ N, $\sphericalangle\, \boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_3 = 30°$]

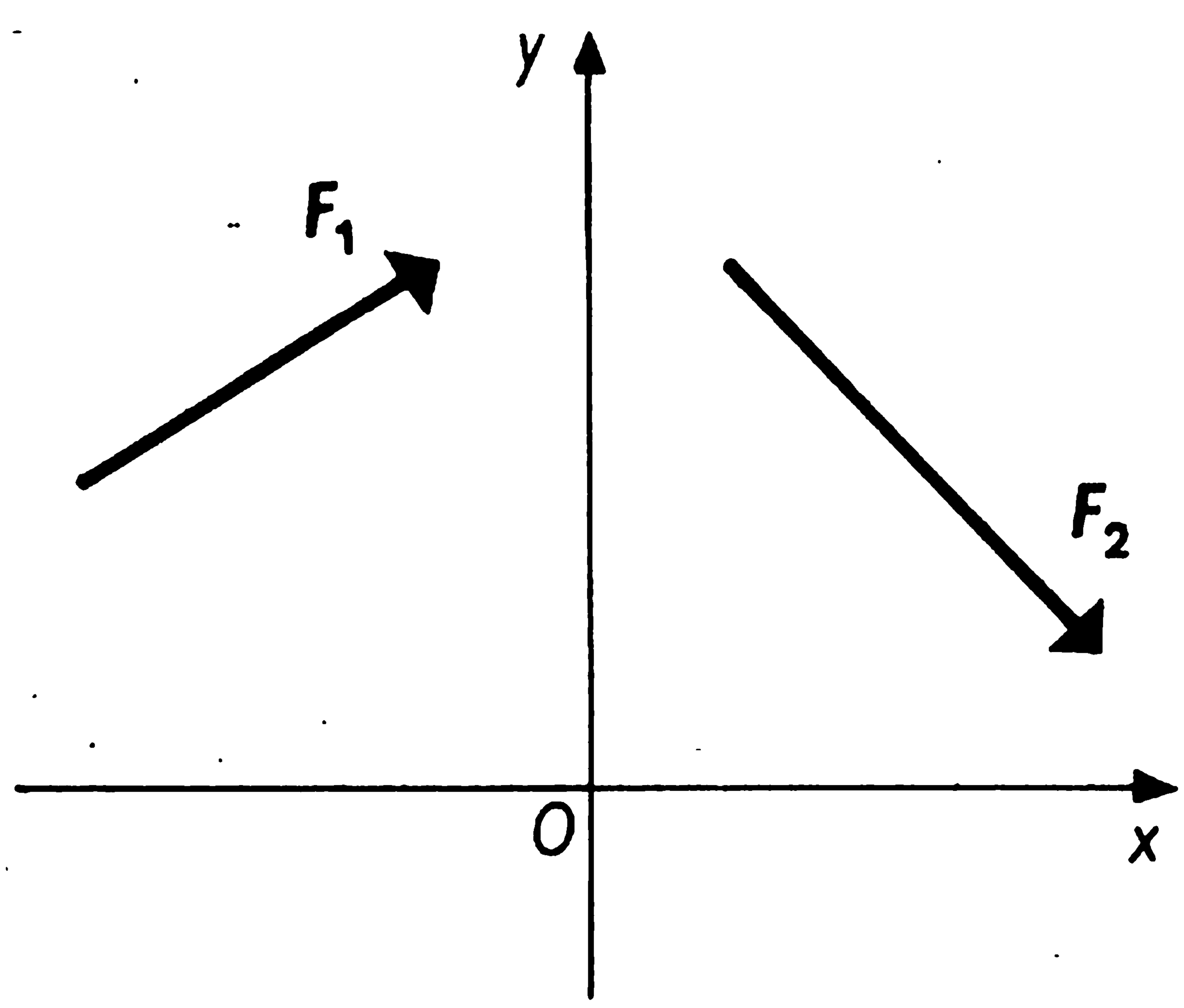
8. Rozložte silu $\boldsymbol{F}_G$, ktorá pôsobí zvislo nadol v ťažisku telesa na naklonenej rovine zvierajúcej s vodorovnou rovinou uhol $\alpha = 30°$, do smeru polpriamok p_1 a p_2 (obr. C4); $F_G = 100$ N.

Obr. C4



9. Vypočítajte veľkosť sily $\boldsymbol{F}_1$ a sily $\boldsymbol{F}_2$, ktoré ležia na polpriamkach p_1 a p_2 z úlohy 8. [$F_1 = 50$ N, $F_2 = 86{,}6$ N]

10. Rozložte vektory $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ na zložky do smerov osí pravouhlej sústavy súradníc Oxy (obr. C5).



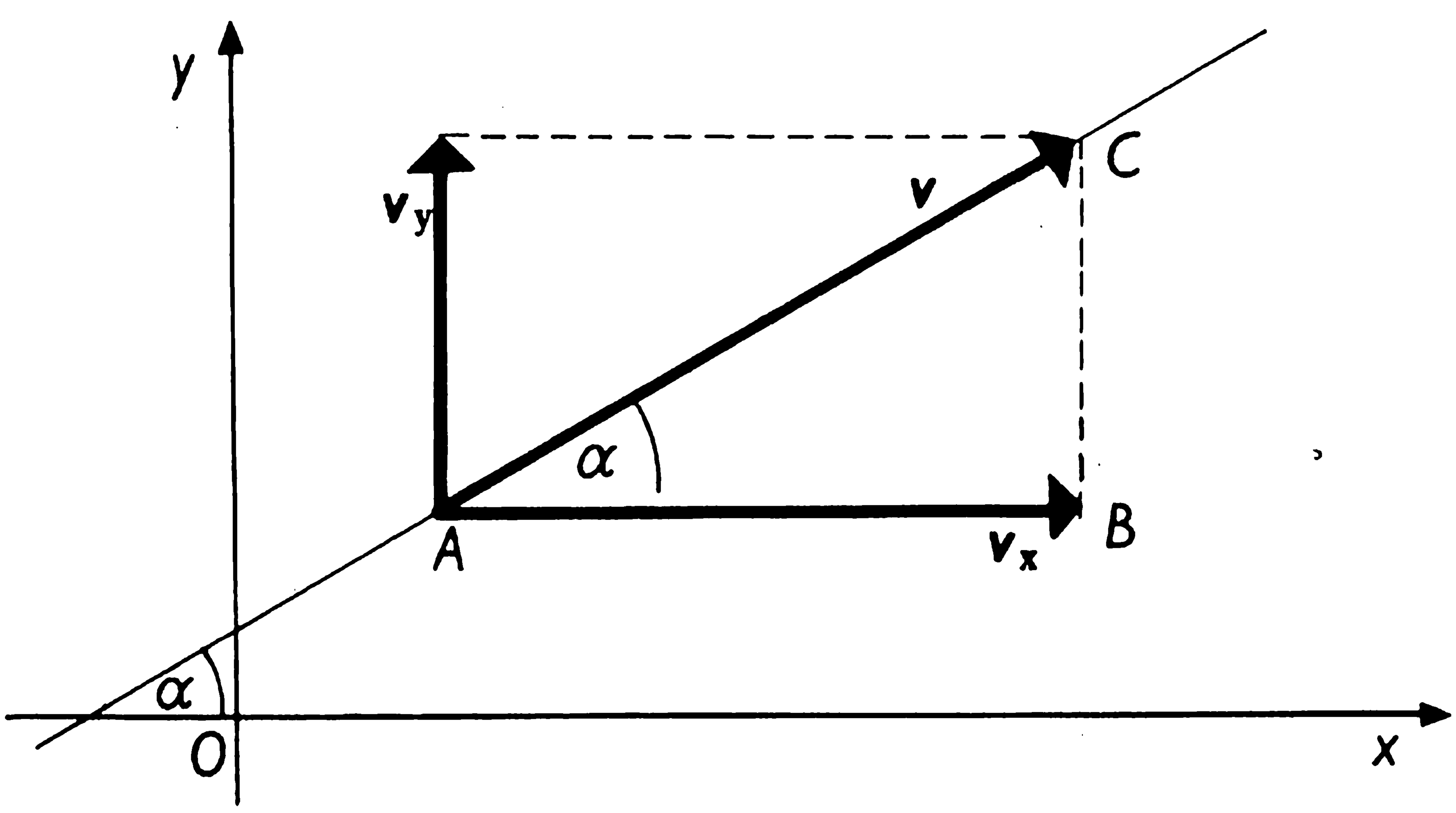
Obr. C5

Cvičenie 4

Úlohy z kinematiky priamočiareho pohybu hmotného bodu

Príklad 1

Rozložte rýchlosť $\boldsymbol{v}$ na zložky do smerov osí sústavy súradníc Oxy (obr. C4-1) a určte veľkosť ich zložiek; $v = 3{,}8\ \text{m.s}^{-1}$, $\alpha = 30°$.



Obr. C4-1

Riešenie

$v = 3{,}8\ \text{m.s}^{-1}$, $\alpha = 30°$, $v_x = ?$ $v_y = ?$

Z trojuholníka ABC vyplýva

$$v_x = v \cos \alpha\,; \quad v_y = v \sin \alpha$$

$$v_x = 3{,}3\ \text{m.s}^{-1}; \quad v_y = 1{,}9\ \text{m.s}^{-1}$$

Príklad 2

Hmotný bod sa pohybuje po priamke z bodu O začiatočnou rýchlosťou $36\ \text{km.h}^{-1}$ a so zrýchlením opačného smeru rýchlosťou $2\ \text{m.s}^{-2}$; pre $t = 0$ aj $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$. Určte najväčšiu veľkosť posunutia, ktoré dosiahne hmotný bod od začiatku pohybu a zostrojte graf závislosti veľkosti posunutia od času za čas 10 s.

Riešenie

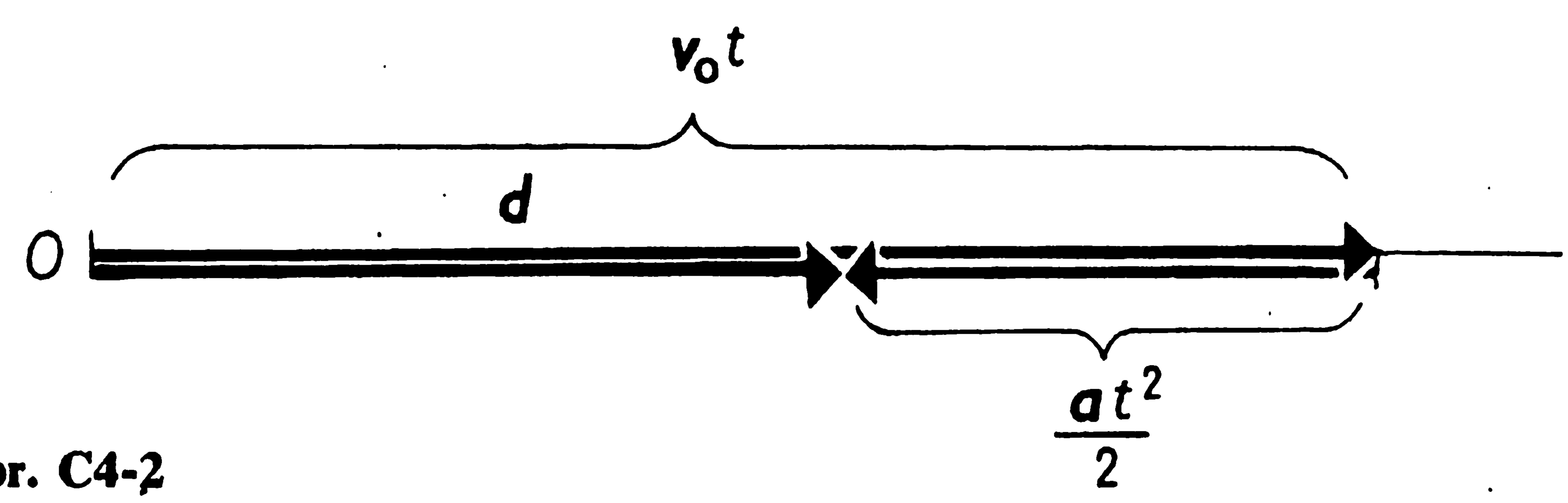
$v_0 = 36\ \text{km.h}^{-1} = 10\ \text{m.s}^{-1}$, $a = 2\ \text{m.s}^{-2}$, $d_{\max} = ?$ $d = d(t) = ?$

Zvolíme vzťažnú sústavu Ox.
Pre okamžitú rýchlosť hmotného bodu platí

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}\,t,\ v = |v_0 - a\,t|$$

Z obr. C4-2 určíme posunutie

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{v}_0 t - \frac{\boldsymbol{a}\,t^2}{2}$$



Obr. C4-2

Veľkosť posunutia sa zväčšuje, ak má vektor okamžitej rýchlosti rovnaký smer ako vektor $\boldsymbol{v}_0$. To je až do času t', keď $v = 0$.

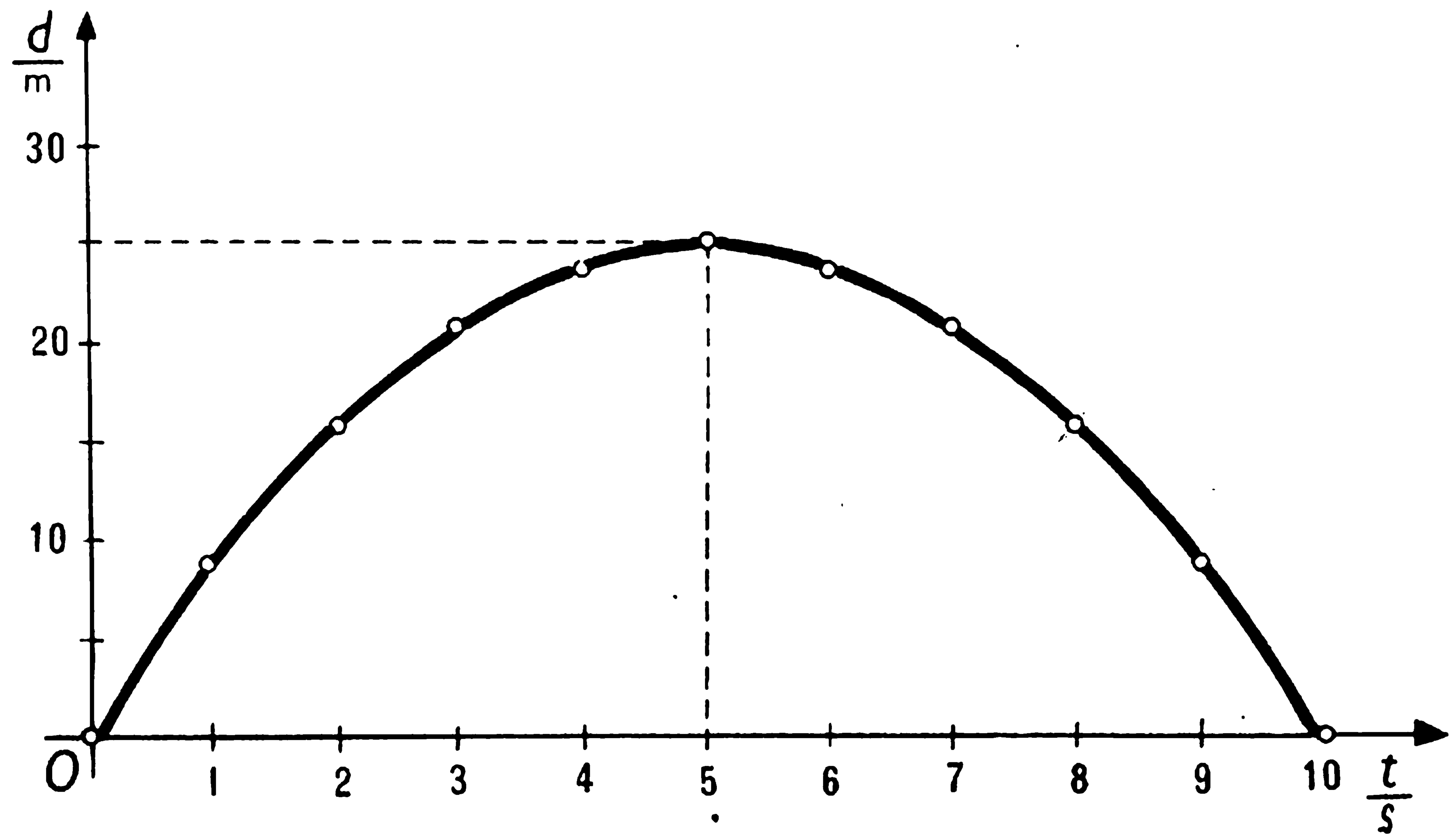
Potom platí $v_0 = a\,t'$, $t' = \dfrac{v_0}{a}$.

Pretože veľkosť posunutia $d = \left|v_0 t - \dfrac{a\,t^2}{2}\right|$, dostaneme pre najväčšiu veľkosť posunutia (keď $t = t'$)

$$d = v_0 \frac{v_0}{a} - \frac{a}{2}\frac{v_0^2}{a^2} = \frac{v_0^2}{2a}$$

$$d = \frac{10^2}{2.2}\ \text{m} = 25\ \text{m}$$

Najväčšie posunutie od začiatku pri danom pohybe je 25 m. Zostavíme tabuľku na určenie závislosti veľkosti posunutia od času.
Dosadzujeme do vzťahu pre d.



$\frac{d}{m}$	0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0
$\frac{t}{s}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

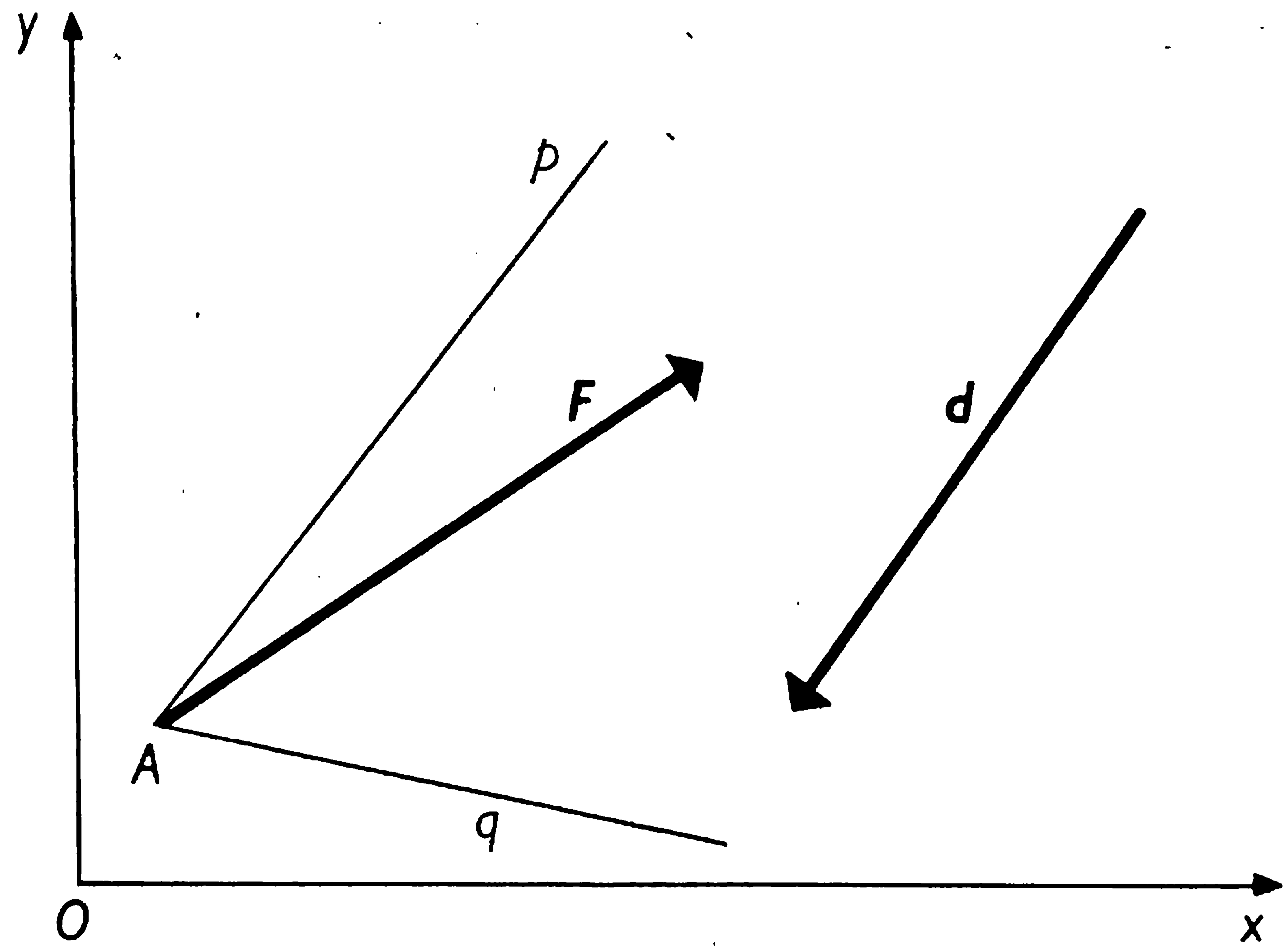
Obr. C4-3

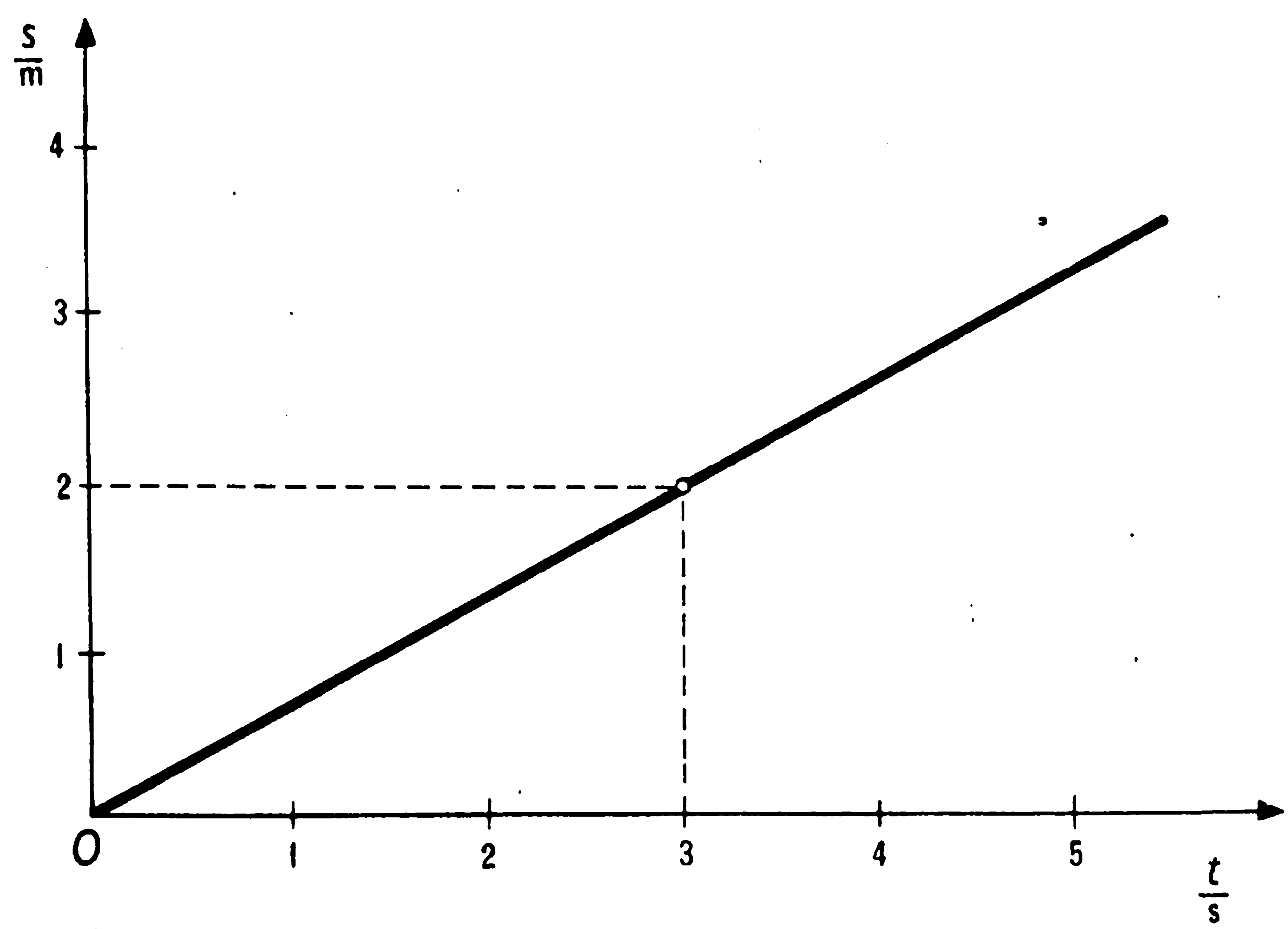
Zostrojíme graf závislosti veľkosti posunutia od času (obr. C4-3). Z grafu aj z tabuľky vidíme, že maximálne posunutie je v čase $t = 5$ s a je 25 m. Overíme si to i výpočtom; dosadíme pre $t' = 4{,}9$ s a $t'' = 5{,}1$ s a dostaneme $d' = 24{,}99$ m a $d'' = 24{,}99$ m. Keď dosadíme do vzťahu pre rýchlosť čas 5 s, dostaneme $v = v_0 - a\ t = (10 - 2.5)\ \mathrm{m.s^{-1}} = 0\ \mathrm{m.s^{-1}}$.
V čase $t_1 = 5$ s je teda veľkosť rýchlosti $0\ \mathrm{m.s^{-1}}$ a v príslušnom bode trajektórie sa mení smer rýchlosti na opačný (hmotný bod sa pohybuje späť k začiatku vzťažnej sústavy Ox).

Úlohy

1. Vo vzťažnej sústave Oxy (v rovine) znázornite body $A = [1$ m, -2 m$]$, $B = [-3$ m, 4 m$]$, $C = [4$ m, -5 m$]$, $D = [0$ m, 4 m$]$.
2. Rozložte vektor $\boldsymbol{F}$ do smerov polpriamok p, q a vektor $\boldsymbol{d}$ do smerov osí x a y vzťažnej sústavy Oxy (obr. C4-4).
3. Z grafu závislosti dráhy od času pri rovnomernom pohybe (obr. C4-5) určte veľkosť rýchlosti pri tomto pohybe. $[0{,}66\ \mathrm{m.s^{-1}}]$

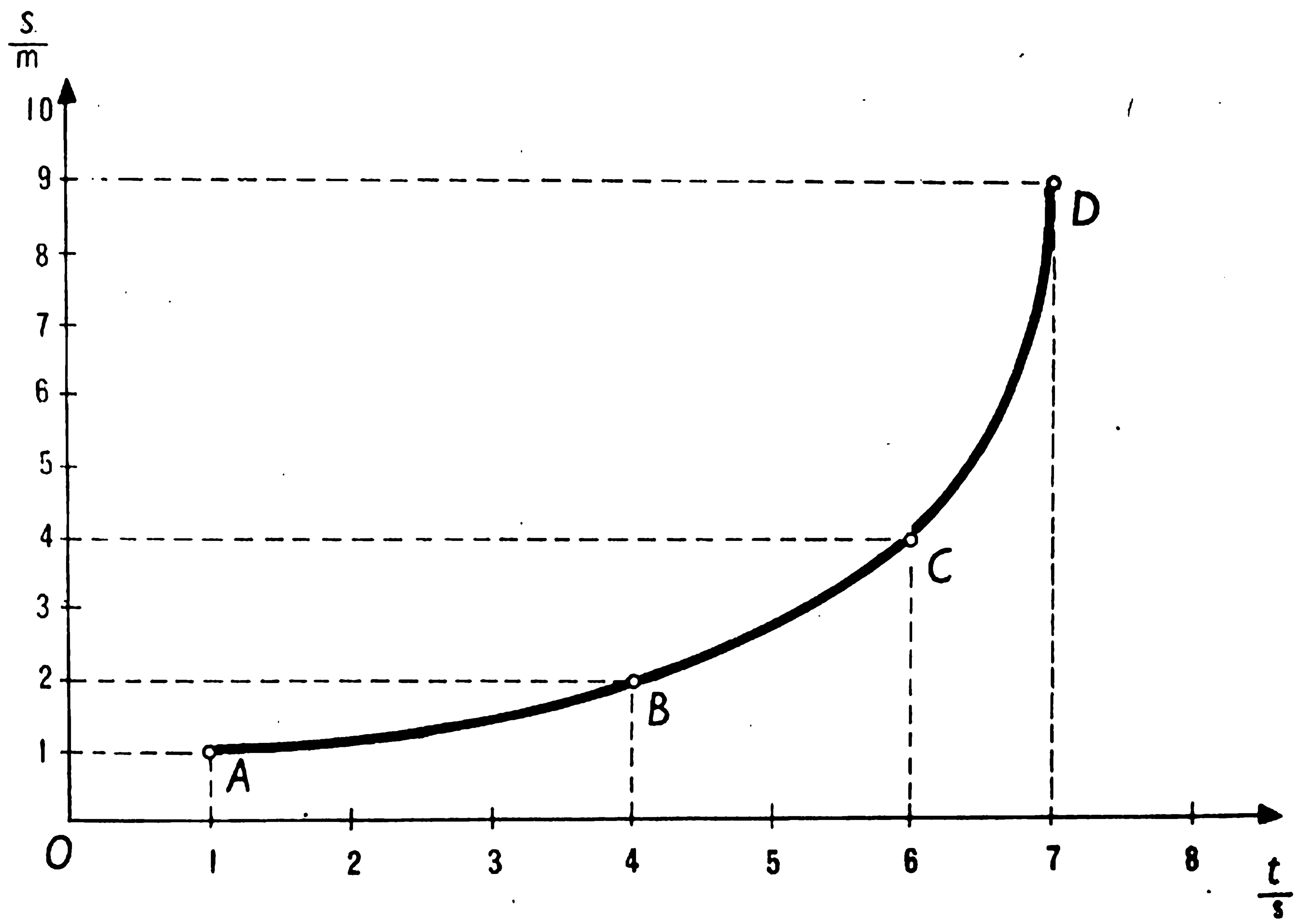
Obr. C4-4





Obr. C4-5

4. Z grafu závislosti dráhy od času (obr. C4-6) určte priemernú rýchlosť v_p v úseku *AD*, *AC*, *BC*, *AB*. [1,3 $m.s^{-1}$; 0,6 $m.s^{-1}$; 1,0 $m.s^{-1}$; 0,3 $m.s^{-1}$]



Obr. C4-6

5. Pri akom pohybe má zrýchlenie rovnaký smer ako rýchlosť?
6. Určte prípad pohybu, pri ktorom má zrýchlenie opačný smer ako rýchlosť.
7. Určte veľkosť zrýchlenia automobilu, ak sa na priamom úseku diaľnice zväčšila jeho rýchlosť za 10 s zo 60 km.h^{-1} na 80 km.h^{-1}. [0,55 m.s^{-2}]
8. Určte veľkosť opačného zrýchlenia vlaku, ak sa pohyboval rýchlosťou 60 km.h^{-1} a pri rovnomernom znižovaní rýchlosti sa zastavil za 1 min. [0,28 m.s^{-2}]
9. Akou maximálnou rýchlosťou môže pri dosadaní na zem pristávať lietadlo na letiskovej dráhe s dĺžkou 800 m pri zrýchlení opačného smeru a) 2,7 m.s^{-2}; b) 5,0 m.s^{-2}? [237 km.h^{-1}; 322 km.h^{-1}]
10. Rovnomerným pohybom po priamej trajektórii by cyklista-pretekár prešiel pretekársku dráhu za 8 min pri rýchlosti $v = 36$ km.h^{-1}. Za aký čas by túto dráhu prešlo auto rovnomerne zrýchleným pohybom, ak rýchlosť 36 km.h^{-1} dosiahne z pokoja za 100 s? [310 s]

11. Dažďové kvapky padajú stálou rýchlosťou zvislo nadol a dopadajú na okno vagóna pohybujúceho sa vodorovným smerom. Kvapky nechávajú na okne vagóna stopu, ktorá zviera so zvislým smerom nadol uhol 60°. Veľkosť rýchlosti vagóna je 54 $km.h^{-1}$. Určte veľkosť rýchlosti dopadajúcich kvapiek. [8,7 $m.s^{-1}$]
12. Strojvodca rýchlika zbadal na priamom úseku trate výstražnú signalizáciu a začal rovnomerne brzdiť. Za aký čas zastavil a akú dráhu prešiel, keď za 16 s znížil rýchlosť na jednu pätinu. Rýchlosť pred začiatkom brzdenia bola 72 $km.h^{-1}$. [20 s; 200 m]
13. Zostrojte grafy závislosti dráhy, rýchlosti a zrýchlenia rovnomerne zrýchleného pohybu od času, ak je veľkosť zrýchlenia 1,5 $m.s^{-2}$. (Pre $t = 0$ s je $v = 0$ $m.s^{-1}$ a $s = 0$ m.)
14. Za aký čas dopadne teleso voľným pádom z výšky 100 m ($g \doteq 10$ $m.s^{-2}$)? [14,5 s]
15. Určte veľkosť rýchlosti (v $km.h^{-1}$), ktorou dopadne teleso na zem za rovnakých podmienok ako v úlohe 17. [161 $km.h^{-1}$]
16. Dve telesá padali voľným pádom z rôznych výšok. Obe telesá dopadli súčasne na zem, pričom čas pádu prvého telesa bol 3 s a čas pádu druhého telesa 2 s. Určte, z akých výšok obe telesá padali. [45 m; 20 m]
17. Ako dlho by padal voľným pádom kameň z televíznej veže Ostankino v Moskve a aká by bola jeho rýchlosť v okamihu dopadu na zem, keď výška veže v Ostankine je 535 m? Uvážte, či by výsledky boli rovnaké, keby kameň padal vo vákuu. [10,3 s; 103 $m.s^{-1}$]

Cvičenie 5 (3. laboratórne)

Pokusné pozorovanie kinematiky pohybu guľôčky na naklonenej a vodorovnej rovine

V praxi sú časté prípady, keď sa teleso pohybuje najprv po naklonenej rovine a na jej konci potom pokračuje v pohybe po vodorovnej rovine.

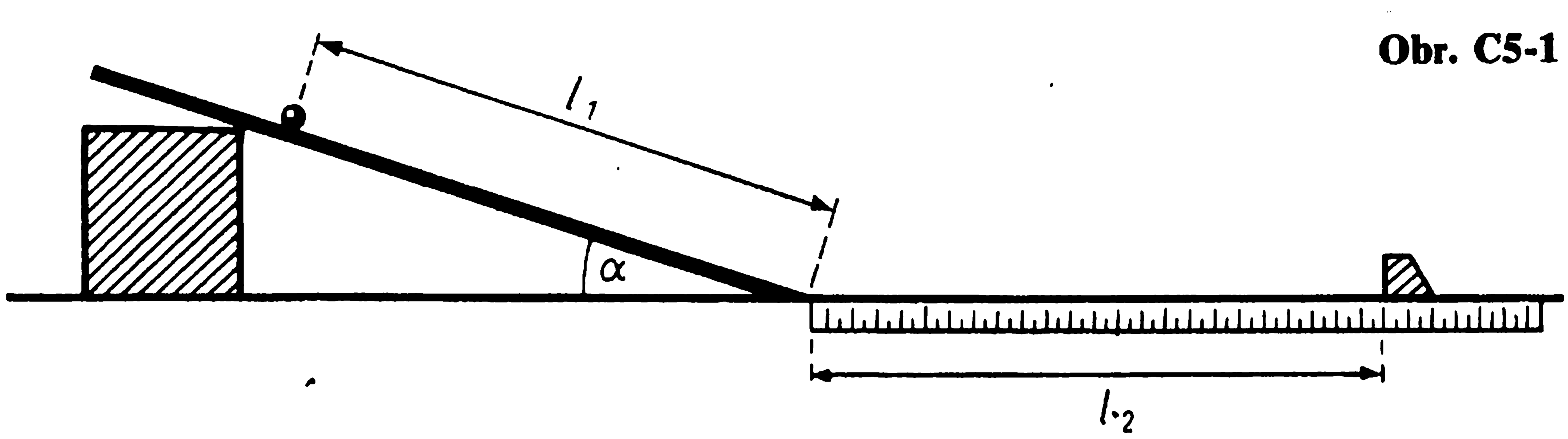
Uvažujme napr. o tejto úlohe: Lyžiar sa najprv pohybuje po naklonenej rovine (po svahu) dĺžky l_1, ktorá zviera s vodorovnou rovinou uhol α, potom sa pohybuje po vodorovnej rovine tak, že prejde dĺžku l_2. Za aký čas prejde dĺžku l_2 na vodorovnej rovine? Aby sme mohli úlohu riešiť, zanedbáme trenie a odpor vzduchu a lyžiara budeme považovať za hmotný bod. Ďalej predpokladáme, že sa lyžiar po svahu pohybuje rovnomerne zrýchleným priamočiarym pohybom a na vodorovnej rovine rovnomerným priamočiarym pohybom. Teraz si prakticky overme, či je tento predpoklad možný.

Úloha 1: Za predpokladu, že malú hladkú oceľovú guľôčku považujeme za hmotný bod, overte, či jej pohyb po prechode z naklonenej roviny na hladkú vodorovnú rovinu bude rovnomerný priamočiary.

Pomôcky: drevená doska so žliabkom (dlhá 1,5 m až 2 m), hranol, stopky, hladká oceľová guľôčka, drevená lišta s dĺžkou 1 m so stupnicou v centimetroch, drevená zarážka

Postup

1. Pomôcky zostavíme podľa obr. C5-1.



Obr. C5-1

2. Guľôčku uvoľníme z najvyššieho bodu trajektórie so stálou dĺžkou l_1 (napr. 0,5 m) a meriame čas t potrebný na to, aby guľôčka prešla po vodorovnej rovine po vopred stanovenej trajektórii s dĺžkou l_2 (0,5 m; 0,6 m; atď.).
   Namerané hodnoty zapíšte do tabuľky.
3. Zo známej dráhy l_2 a príslušného času t pohybu guľôčky určíme priemernú rýchlosť.
4. Podľa výsledkov určte, aký pohyb koná guľôčka. Zostrojte graf závislosti priemernej rýchlosti od dráhy l_2.

Číslo merania	l_1 (stála)	l_2	t	v	Δv
	10^{-2} m	10^{-2} m	s	m.s^{-1}	m.s^{-1}
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					

Úloha 2: Za predpokladu, že malú hladkú oceľovú guľôčku považujeme za hmotný bod, overte, či jej pohyb po hladkej naklonenej rovine je rovnomerne zrýchlený.

Pomôcky: ako v úlohe 1 tohto cvičenia

Postup

1. Pomôcky zostavíme podľa obr. C5-1. Uhol sklonu naklonenej roviny musí byť malý (5° až 10°).
2. Guľôčku umiestňujte na naklonenej rovine do rôznych vzdialeností l_1 od dolného konca naklonenej roviny a merajte čas t, za ktorý guľôčka prejde určitú dráhu l_2 (napr. 1 m). V úlohe 1 ste zistili, že pohyb guľôčky, ktorú považujeme za hmotný bod, po trajektórii s dĺžkou l_2 je rov-

nomerný. Rýchlosť, ktorou sa guľôčka pohybovala na konci naklonenej roviny, má veľkosť, ktorú možno určiť zo vzťahu $v = \frac{l_2}{t}$.

Pretože pohyb po naklonenej rovine je rovnomerne zrýchlený, zrýchlenie guľôčky závisí iba od uhla sklonu naklonenej roviny a musí byť pre rôzne dráhy l_1 konštantné.

Pre rovnomerne zrýchlený pohyb telesa (hmotného bodu) platí

$$l_1 = \frac{v^2}{2a} \quad \text{a odtiaľ} \quad a = \frac{v^2}{2l_1}$$

3. Zo známej veľkosti rýchlosti na konci naklonenej roviny $\left(\text{vypočítanej zo vzťahu } v = \frac{l_2}{t}\right)$ určte veľkosť zrýchlenia a.
4. Namerané údaje zapíšte do tabuľky a zostrojte graf závislosti veľkosti zrýchlenia od dráhy l_1.

Číslo merania	l_1	l_2 (stála)	t	v	a	Δa
	10^{-2} m	10^{-2} m	s	m.s^{-1}	m.s^{-2}	m.s^{-2}
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						

Otázky

1. Majú všetky grafy priebeh, aký bol uvedený pri vysvetlení jednotlivých druhov pohybov?
2. Aké zjednodušenia ste pri riešení úloh v tomto cvičení urobili?
3. Prečo je pri stálom sklone naklonenej roviny zrýchlenie pohybu telesa (hmotného bodu) stále, nezávislé od dĺžky trajektórie?

Cvičenie 6

Úlohy z kinematiky krivočiareho pohybu hmotného bodu

Príklad

Hodinky majú minútovú a sekundovú ručičku na spoločnej osi. Minútová ručička hodiniek je dvakrát dlhšia ako sekundová. Koľkokrát je rýchlosť koncového bodu sekundovej ručičky väčšia ako rýchlosť koncového bodu minútovej ručičky?

Riešenie

Sekundová ručička opíše plný uhol za 1 minútu, minútová za 1 hodinu.

$$T_1 = 60\ \mathrm{s}; \quad T_2 = 60\ \mathrm{min} = 3\,600\ \mathrm{s} = 60\ T_1; \ r_2 = 2\,r_1$$

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}, \quad v_2 = \frac{2\pi r_2}{T_2}$$

Po dosadení za T_1 a T_2 a $r_2 = 2\,r_1$ dostaneme

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{2\pi r_1 T_2}{2\pi r_2 T_1} = \frac{r_1 60\,T_1}{r_2 T_1} = 30$$

Rýchlosť koncového bodu sekundovej ručičky je 30-krát väčšia ako rýchlosť koncového bodu minútovej ručičky.

Úlohy

1. Sekundová ručička hodiniek je o tretinu dlhšia ako minútová. V akom pomere sú rýchlosti ich koncových bodov? [80:1]
2. Akú frekvenciu otáčania musí mať vreteno sústruhu, aby valec s priemerom 40 mm bol obrábaný reznou rýchlosťou 72 $\mathrm{m.min^{-1}}$? Rezná rýchlosť zodpovedá rýchlosti bodu na obvode valca. [9,6 Hz]
3. Priemer kolesa traktora je 1,2 m. Určte uhlovú rýchlosť kolesa, ak traktor ide rýchlosťou 2,4 $\mathrm{m.s^{-1}}$. [4 $\mathrm{s^{-1}}$]
4. Akú uhlovú rýchlosť má obežné koleso turbíny, ktoré robí 3 600 otá-

čok za minútu? Akú veľkú rýchlosť majú body na obvode kolesa turbíny, ak jeho priemer je 1 500 mm? [377 s^{-1}; 283 $m.s^{-1}$]

5. Kotúčová píla na kovy má priemer kotúča 570 mm a reznú rýchlosť 15 $m.min^{-1}$. Akú frekvenciu otáčania má kotúč píly? [0,14 Hz]
6. Dĺžka minútovej ručičky vežových hodín Lomonosovovej univerzity v Moskve je 4,5 m. Určte rýchlosť, ktorou sa premiesťuje koncový bod ručičky a uhlovú rýchlosť ručičky. [0,008 $m.s^{-1}$; 0,001 75 s^{-1}]
7. Určte v $km.h^{-1}$ veľkosť rýchlosti telesa pohybujúceho sa rovnomerne po kružnici s priemerom 4 m s periódou 0,5 s. [90,5 $km.h^{-1}$]
8. Súčasťou tréningu kozmonautov je beh po pohyblivom páse. Určte veľkosť a smer rýchlosti „behu“ kozmonauta vzhľadom na pás, ak sa jeho poloha vzhľadom na steny miestnosti nemení. Pohyblivý pás je poháňaný kolesom, ktoré sa otáča 420-krát za minútu a jeho priemer je 0,4 m. [8,8 $m.s^{-1}$; opačný, $\boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{v}_2$]
9. Cyklista ide rýchlosťou 18 $km.h^{-1}$ po kružnicovej trajektórii s priemerom 40 m. Určte čas, za ktorý ju prejde. [25,1 s]
10. Zem obehne okolo Slnka približne rovnomerným pohybom po kružnici za 365,25 dní. Aká je jeho rýchlosť vzhľadom na Slnko, ak stredná vzdialenosť Zeme od Slnka je $149{,}6 . 10^6$ km? [29,8 $km.s^{-1}$]

Cvičenie 7

Úlohy I na použitie pohybových zákonov pri riešení úloh z dynamiky hmotného bodu

Poznámka: Symbol * pri číslach úloh označuje úlohy, ktoré sú na samostatné riešenie náročnejšie ako ostatné.

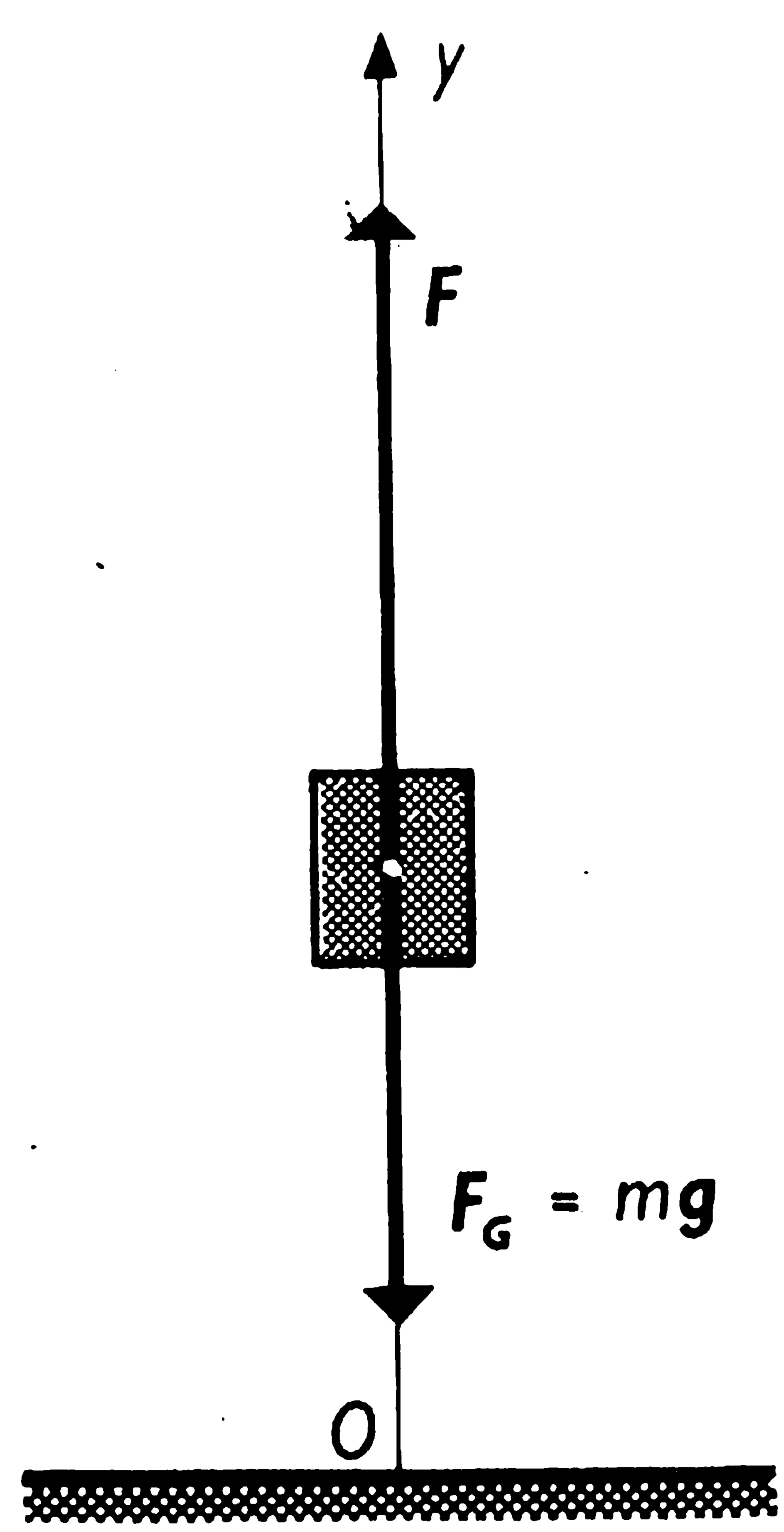
Príklad 1

Žeriav začína dvíhať debnu s hmotnosťou 1 000 kg zvislo nahor so zrýchlením veľkosti 0,2 m.s^{-2}. Určte veľkosť sily, ktorou pôsobí lano na debnu.

Riešenie

$m = 1\,000$ kg, $a = 0{,}2$ m.s^{-2}, $F = ?$

Na debnu pôsobí (vo vzťažnej sústave spojenej so Zemou, ktorú považujeme za inerciálnu) sila $\boldsymbol{F}_G = m\,\boldsymbol{g}$ a ťahová sila lana $\boldsymbol{F}$ (obr. C7-1).



Obr. C7-1

Tieto sily sa skladajú do výslednej sily, ktorá debne udeľuje zrýchlenie $\boldsymbol{a}$. Potom podľa druhého pohybového zákona výsledná sila $\boldsymbol{F}_{výsl.} = m\boldsymbol{a}$. Môžeme napísať $\boldsymbol{F}_{výsl.} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{a}$ (m je hmotnosť debny). Sily pôsobia v jednej priamke. Výsledná sila $m\boldsymbol{a}$ je orientovaná v smere sily $\boldsymbol{F}$ a jej veľkosť sa rovná rozdielu veľkostí síl $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{F}_G$ alebo $F - m\ g = m\ a$.

Z toho $F = m(g + a) = 1\ 000\ \text{kg}\ (9{,}8 + 0{,}2)\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 10^4\ \text{N}$.

Príklad 2

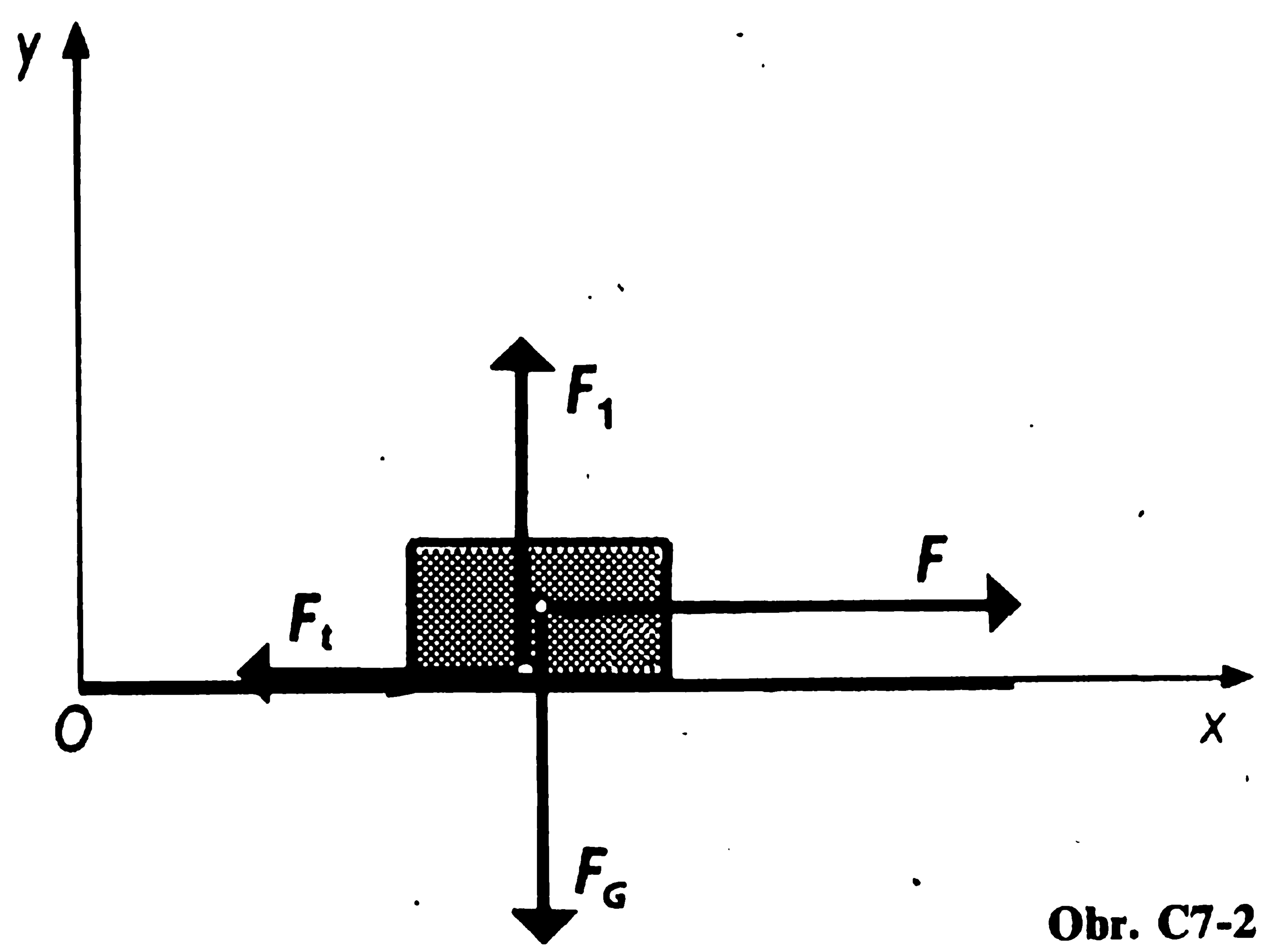
Sila $\boldsymbol{F}$ pôsobí pozdĺž vodorovnej roviny na teleso s hmotnosťou 4 kg. Teleso získava z pokoja za 3 s rýchlosť $v = 0{,}6\ \text{m.s}^{-1}$. Máme určiť veľkosť sily F, ak pre veľkosť trecej sily platí $F_t = f\ F_G$ (f nazývame súčiniteľ šmykového trenia, $f = 0{,}2$) a pohyb telesa bol priamočiary rovnomerne zrýchlený ($g \doteq 10\ \text{m.s}^{-2}$).

Riešenie

$m = 4\ \text{kg},\ t = 3\ \text{s},\ v = 0{,}6\ \text{m.s}^{-1},\ f = 0{,}2,\ g \doteq 10\ \text{m.s}^{-2},\ F = ?$

Na teleso pôsobia súčasne štyri sily: vo vodorovnom smere sila $\boldsymbol{F}$ a v opačnom smere sila trenia $\boldsymbol{F}_t$, v zvislom smere nadol sila $\boldsymbol{F}_G = m\ \boldsymbol{g}$ a v zvislom smere nahor reakcia podložky $\boldsymbol{F}_1$ (obr. C7-2). Podľa druhého pohybového zákona bude platiť

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{F}_t = m\ \boldsymbol{a}$$



Obr. C7-2

Sily $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_G$ pôsobiace na teleso sú rovnako veľké a opačne orientované, preto pre ich súčet platí

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_G = \boldsymbol{0}$$

a nemajú pohybový účinok.
Možno teda napísať $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_t = m\,\boldsymbol{a}$.
Pretože $F_t = f\,F_G = f\,m\,g$ a všetky tri vektory ležia v jednej priamke ($\boldsymbol{F}_t$ má opačný smer ako $\boldsymbol{F}$), môžeme písať

$$F - f\,m\,g = m\,a$$

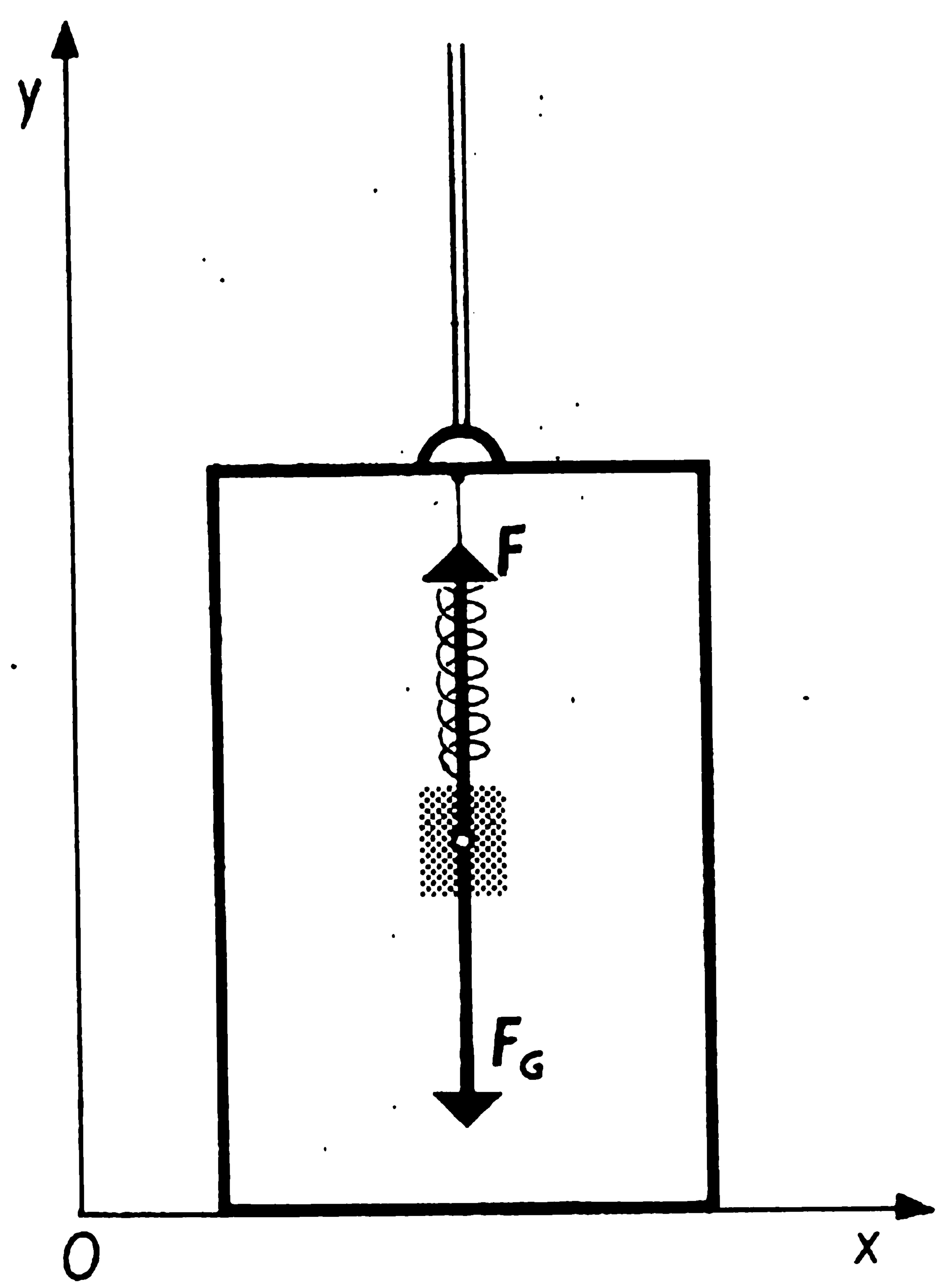
$$F = m\,a + f\,m\,g = m(a + f\,g) = m\left(\frac{v}{t} + f\,g\right)$$

$$F = 4\left(\frac{0{,}6}{3} + 0{,}2\,.\,10\right)\,\mathrm{N} = 8{,}8\,\mathrm{N}$$

Veľkosť sily F je 8,8 N.

Príklad 3

V kabíne výťahu je umiestený silomer (obr. C7-3), ku ktorému je pripevnené závažie s hmotnosťou m. Čo bude ukazovať silomer v nasledujú-



Obr. C7-3

cich prípadoch: 1. výťah je v pokoji; 2. výťah sa pohybuje zvislo nahor so zrýchlením s veľkosťou a_1; 3. výťah sa pohybuje zvislo nadol so zrýchlením s veľkosťou $a_2 < g$; 4. výťah voľne padá ($a_3 = g$)? (O opise javov uvažujeme z hľadiska vzťažnej sústavy spojenej so Zemou, ktorú pokladáme za inerciálnu.)

Riešenie

Na závažie pôsobia dve sily: sila $\boldsymbol{F}_G = m\,\boldsymbol{g}$ a sila pružiny silomeru $\boldsymbol{F}$. Využijeme druhý pohybový zákon, podľa ktorého bude v našom prípade všeobecne platiť

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_G = m\,\boldsymbol{a},$$

kde $\boldsymbol{a}$ je zrýchlenie závažia (teda aj výťahu).
V 1. prípade $a = 0\ \mathrm{m.s^{-2}}$. Preto silomer ukáže silu veľkosti F_0, pre ktorú bude platiť $F_0 - m\,g = 0\ \mathrm{N}$.
V 2. prípade $a = a_1$ a výťah sa pohybuje zvislo nahor. Silomer ukáže silu veľkosti F_1, pre ktorú platí $F_1 - m\,g = m\,a_1$, teda $F_1 = m(g + a_1)$.
V 3. prípade $a = a_2$ a výťah sa pohybuje nadol (zrýchlenie má rovnaký smer, ako je smer sily $\boldsymbol{F}_G$). Preto pre veľkosť sily F_2, ktorú ukáže silomer, bude platiť $F_2 - m\,g = -m\,a_2$ alebo $F_2 = m(g - a_2)$.
V 4. prípade $a_3 = g$ a silomer ukáže silu, ktorá má veľkosť $F_3 - m\,g = m\,a_3 = m\,g$ alebo $F_3 = 0\ \mathrm{N}$.
Vidíme teda, že ťahová sila, ktorou teleso pôsobí na silomer (tiaž telesa), závisí od zrýchlenia, ktorým sa pohybuje výťah. Tiaž telesa sa čo do veľkosti rovná sile, ktorou pružina pôsobí na teleso, ale má opačný smer. Pri zrýchlenom pohybe nahor sa veľkosť tiaže telesa zväčšuje, pri zrýchlenom pohybe nadol sa zmenšuje. Pri $a = 0\ \mathrm{m.s^{-2}}$ (výťah je v pokoji, alebo sa pohybuje rovnomerne priamočiaro) sa veľkosť tiaže telesa rovná veľkosti tiažovej sily pôsobiacej na teleso. Pri voľnom páde výťahu je tiaž telesa nulová (beztiažový stav).

Úlohy

1. Možno zdvihnúť zo Zeme voľne položené teleso, ak naň pôsobíme zvislo nahor silou veľkosti $F = m\,g$ (m je hmotnosť telesa)? [áno]
2. Brankár pri futbale chytil loptu letiacu rýchlosťou veľkosti $40\ \mathrm{m.s^{-1}}$ a zastavil jej pohyb za čas 0,1 s. Hmotnosť lopty je 180 g. Akou veľkou

silou pôsobil brankár na loptu, ak považujeme pohyb lopty do zastavenia za priamočiary rovnomerne spomalený? Určte veľkosť zmeny hybnosti lopty. [72 N; 7,2 kg.m.s^{-1}]

3. Výsadkár padá v danom úseku dráhy rovnomerne so zavretým padákom rýchlosťou veľkosti 60 m.s^{-1}. Pri otvorení padáka sa veľkosť jeho rýchlosti znížila za čas 5 s na 5 m.s^{-1}. Hmotnosť výsadkára je 70 kg. Určte najväčšiu veľkosť ťahovej sily pôsobiacej na laná padáka, ak uvážime, že pohyb výsadkára bol priamočiary a jeho rýchlosť sa rovnomerne zmenšovala. Určte veľkosť hybnosti výsadkára pred otvorením padáka, veľkosť zmeny hybnosti po piatich sekundách a smer tejto zmeny. Určte dráhu, ktorú výsadkár s otvoreným padákom pri priamočiarom pohybe prekonal. [770 N; 4 200 kg.m.s^{-1}; 350 kg.m.s^{-1}; 162 m]

*4. Osobný výťah sa rozbieha zvislo nahor so zrýchlením 1,6 m.s^{-1} ($g =$ $= 9{,}8$ m.s^{-2}). O koľko percent sa zmení tlaková sila človeka na podlahu (t. j. tiaž človeka) vzhľadom na prípad, keď bol výťah v pokoji? Prípad riešte z hľadiska pozorovateľa v inerciálnej vzťažnej sústave. (Návod: uvážte, že na človeka pôsobí sila $\boldsymbol{F}_G$ a sila reakcie podlahy. Sila reakcie podlahy sa čo do veľkosti rovná tiaži človeka, ale má opačný smer.) [Zväčší sa o 16,3 %.]

Cvičenie 8

Úlohy II na použitie pohybových zákonov pri riešení úloh z dynamiky hmotného bodu

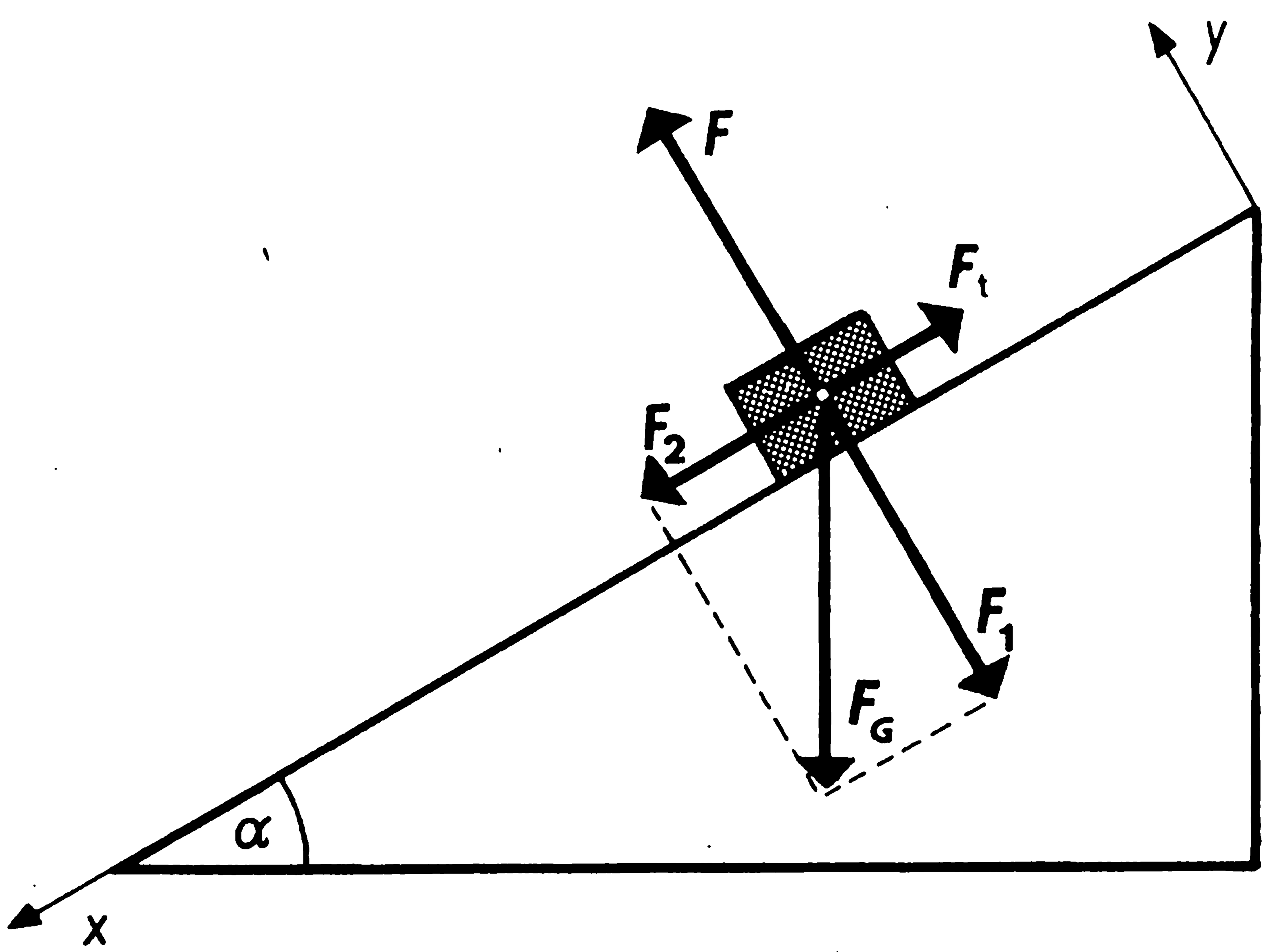
Príklad 1

Po naklonenej rovine s uhlom sklonu α sa kĺže nadol teleso s hmotnosťou m. Máme určiť veľkosť jeho zrýchlenia, ak súčiniteľ trenia je f. (Výsledok využite pri riešení úloh 4, 5, 6, 7).

Riešenie

Tiažovú silu $\boldsymbol{F}_G$ môžeme rozložiť na dve zložky: silu $\boldsymbol{F}_1$ kolmú na naklonenú rovinu a silu $\boldsymbol{F}_2$ rovnobežnú s naklonenou rovinou (pozri obr. C8-1).

$$\boldsymbol{F}_G = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$



Obr. C8-1

Pre veľkosti týchto síl platí $F_1 = F_G \cos\alpha = m\,g\cos\alpha$, $F_2 = F_G \sin\alpha = m\,g\sin\alpha$. Pre veľkosť sily trenia platí $F_t = f\,F_1$. Na teleso pôsobí ešte podložka silou $\boldsymbol{F}$.

Môžeme teda písať

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_t=m\ \boldsymbol{a}$$

Reakcia podložky $\boldsymbol{F}$ je rovnako veľká a opačného smeru ako sila $\boldsymbol{F}_1$, ich výslednica je nulová, teda $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{0}$.
Po dosadení do horného vzťahu dostaneme

$$\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_t=m\ \boldsymbol{a}$$

Všetky tieto tri vektory ležia v jednej priamke, sila trenia $\boldsymbol{F}_t$ má opačný smer ako sila $\boldsymbol{F}_2$. Aby sa teleso pohybovalo, musí byť $F_2 \geqq F_t$. Môžeme teda písať

$$F_2-f\ F_1=m\ a$$

Pre veľkosť zrýchlenia dostaneme

$$a=\frac{F_2-f\ F_1}{m}=\frac{m\ g\ \sin\alpha-f\ m\ g\ \cos\alpha}{m}$$

$$a=g\ (\sin\alpha-f\cos\alpha)$$

Teleso bude kĺzať po naklonenej rovine, ak

$$\sin\alpha-f\cos\alpha\geqq 0$$

a z toho $\operatorname{tg}\alpha\geqq f$.

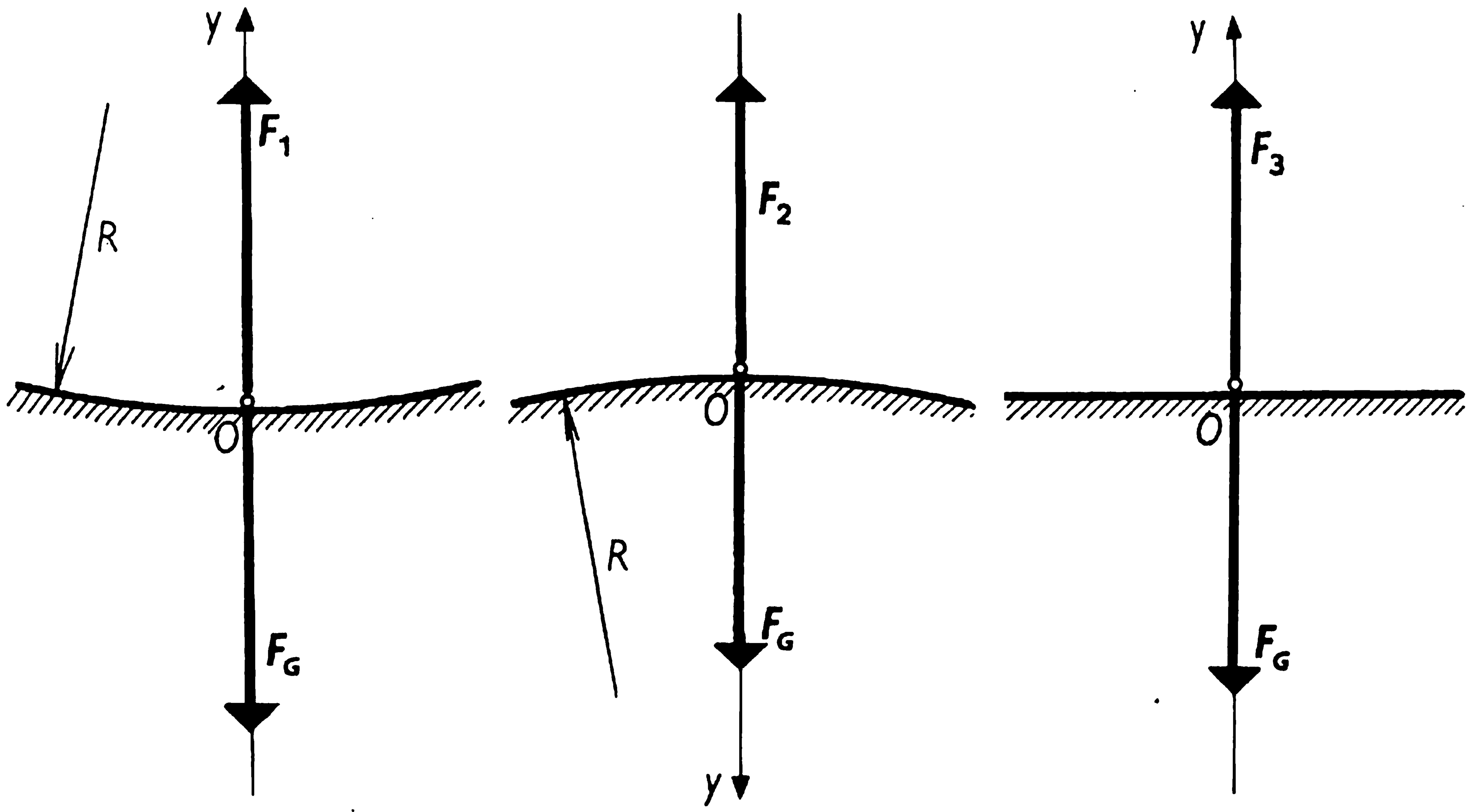
Príklad 2

Tank s hmotnosťou 5.10^4 kg sa pohybuje po ceste rýchlosťou veľkosti $10\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Polomer krivosti nerovnej cesty je $R=500$ m. Máme určiť veľkosť F sily, ktorou pôsobí tank na cestu v mieste O (obr. C8-2), ak je a) cesta v tvare podľa obr. C8-2a; b) v tvare podľa obr. C8-2b. c) Akou silou by tank pôsobil na rovnú cestu (obr. C8-2c)?

Riešenie

$m=5.10^4$ kg, $v=10\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $R=500$ m, $F=?$

Na tank pôsobia dve sily: sila $\boldsymbol{F}_G=m\ \boldsymbol{g}$ a sila reakcie cesty, ktorá sa rovná v prípade a) $\boldsymbol{F}_1$, v prípade b) $\boldsymbol{F}_2$ a v treťom prípade (rovná cesta) $\boldsymbol{F}_3$. V sú-



Obr. C8-2a, b, c

hlase s tretím pohybovým zákonom sa sila $\boldsymbol{F}$, ktorou pôsobí tank na cestu, čo do veľkosti rovná sile reakcie cesty (sila, ktorou cesta pôsobí na tank) a má opačný smer. Sily $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ nájdeme vo všetkých troch prípadoch z druhého pohybového zákona.

V jednotlivých prípadoch dostaneme (obr. C8-2a, b, c)

a) $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_G = \boldsymbol{F}_{\text{dostr.}}$, b) $\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_G = \boldsymbol{F}_{\text{dostr.}}$

c) rovná cesta $\boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_G = 0$

$$F_1 - m\,g = \frac{m\,v^2}{R} \qquad m\,g - F_2 = \frac{m\,v^2}{R} \qquad F_3 - m\,g = 0\ \text{N}$$

Potom dostaneme $F_1 = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right)$, $F_2 = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right)$, $F_3 = m\,g$.

Rovnako veľkými silami pôsobí tank v jednotlivých prípadoch na cestu

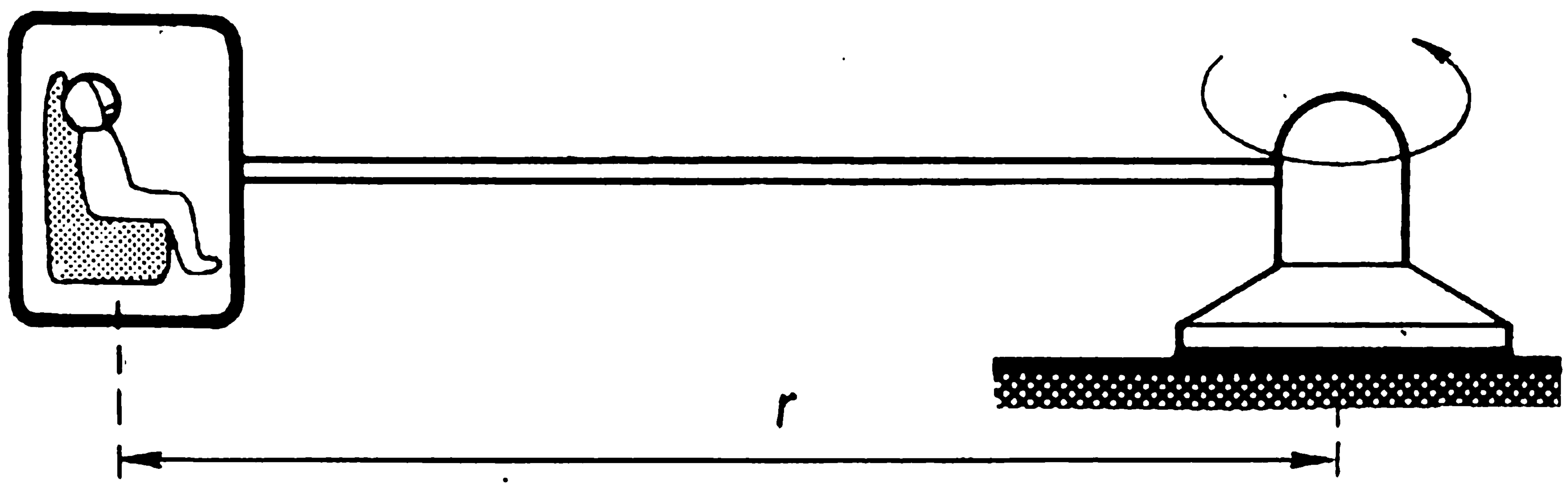
a) $F_1 = 5\,.\,10^4\left(9{,}8 + \frac{10^2}{500}\right)\text{N} = 5\,.\,10^5\ \text{N}$

b) $F_2 = 5\,.\,10^4\left(9{,}8 - \frac{10^2}{500}\right)\text{N} = 4{,}8\,.\,10^5\ \text{N}$

c) $F_3 = (5\,.\,10^4\,.\,9{,}8)\ \text{N} = 4{,}9\,.\,10^5\ \text{N}$

Úlohy

1. Centrifúga používaná na výcvik kozmonautov (obr. C8-3) dosiahla frekvenciu otáčania $f = 0{,}6$ Hz. Polomer otáčania je 7 m. Určte veľkosť tlakovej sily, ktorou kozmonaut pôsobí na operadlo kresla, ak hmotnosť kozmonauta je 70 kg. Akou veľkou silou pôsobí operadlo kresla na kozmonauta? Určte smery týchto síl. (Pohyb kozmonauta považujeme za rovnomerný pohyb hmotného bodu po kružnici.) [6 960 N]



Obr. C8-3

2. Ako sa stláčajú rovnaké nárazníky pri náraze dvoch vagónov, ak jeden vagón stojí a druhý do neho narazí?
3. Ako sa stlačia rovnaké nárazníky pri zrážke dvoch vagónov idúcich proti sebe, z ktorých jeden je naložený a druhý prázdny?
4. Určte vzťah pre veľkosť zrýchlenia a z príkladu 1 na s. 266, ak sa teleso bude pohybovať bez trenia (t. j. $f = 0$).
5. Závisí hodnota veľkosti zrýchlenia a z príkladu 1 na s. 266 od hmotnosti telesa?
6. Nájdite podmienku pre maximálny uhol α_{max}, pri ktorom sa teleso po naklonenej rovine z príkladu 1 na s. 266 bude pohybovať rovnomerne priamočiaro, alebo bude v pokoji (t. j. $a = 0$) pri danom súčiniteli trenia f. [$\text{tg}\,\alpha_{max} = f$]
7. Určte, aký môže byť maximálny uhol sklonu naklonenej roviny, aby teleso, ktoré položíme na naklonenú rovinu, zostalo v pokoji, ak súčiniteľ trenia v pokoji je 0,2. [$\text{tg}\,\alpha_{max} = 0{,}2$; $\alpha_{max} = 11°$]

Cvičenie 9

Úlohy na zákon zachovania mechanickej energie a hybnosti

Príklad 1

Výbuch roztrhol kameň v pokoji na tri časti. Dva kusy z kameňa odlietajú v navzájom kolmých smeroch: kus s hmotnosťou $m_1 = 1$ kg rýchlosťou s veľkosťou $v_1 = 12$ m.s^{-1} a kus s hmotnosťou $m_2 = 2$ kg rýchlosťou s veľkosťou $v_2 = 8$ m.s^{-1}. Tretí letí rýchlosťou s veľkosťou $v_3 = 40$ m.s^{-1}. Akú hmotnosť má tretí kus a aký uhol zviera hybnosť tretieho kusa s hybnosťou prvého?

Riešenie

$m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $v_1 = 12$ m.s^{-1}, $v_2 = 8$ m.s^{-1}, $v_3 = 40$ m.s^{-1}, $m_3 = ?$
$\alpha = ?$

Sústava sa skladá z troch telies. Vonkajšou silou je tiažová sila. Keďže čas roztrhnutia kameňa je veľmi malý, možno zmenu hybnosti spôsobenú tiažovou silou (vonkajšou) pri výbuchu zanedbať a sústavu považovať za izolovanú. Preto možno zapísať, že hybnosť kameňa pred výbuchom ($\boldsymbol{p}$) sa rovná vektorovému súčtu hybností kusov kameňa po výbuchu

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3$$

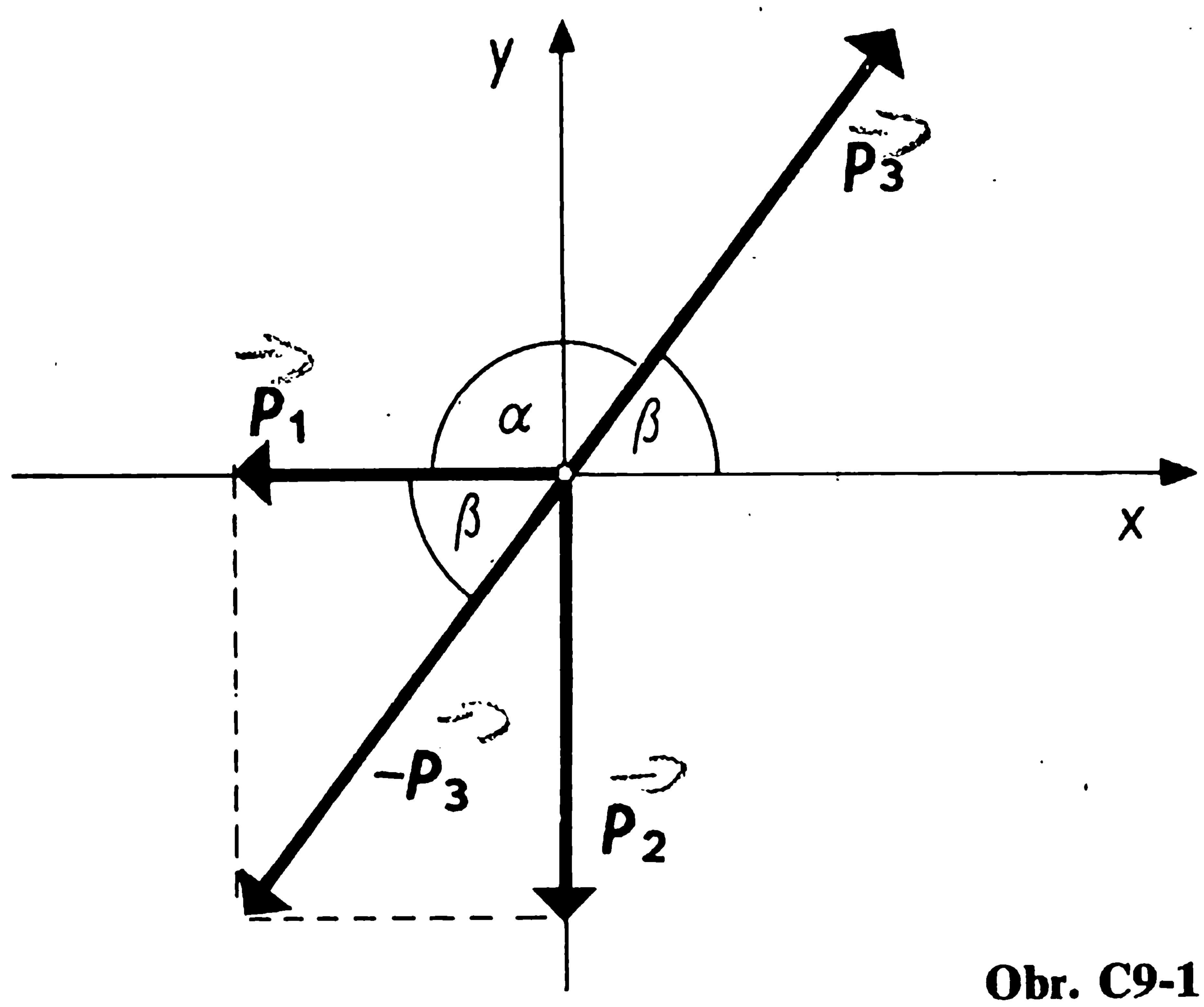
Ale $\boldsymbol{p} = 0$, teda $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = -\boldsymbol{p}_3$. Zo známych smerov hybností $\boldsymbol{p}_1$ a $\boldsymbol{p}_2$ a ich veľkostí $p_1 = m_1 v_1$, $p_2 = m_2 v_2$ nájdeme geometricky hybnosť $-\boldsymbol{p}_3$ (obr. C9-1). Veľkosť p_3 nájdeme podľa Pytagorovej vety

$$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2$$

$$p_3 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

Pretože $p_3 = m_3 v_3$, dostaneme

$$m_3 = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{v_3} = \frac{\sqrt{(1\,.\,12)^2 + (2\,.\,8)^2}}{40}\ \text{kg} = 0{,}5\ \text{kg}$$



Obr. C9-1

Pre uhol α platí: $\operatorname{tg}\beta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{2.8}{1.12} = 1{,}33$

$$\beta = 53°10', \alpha = 180° - 53°10' = 126°50'$$

Tretí kus kameňa má hmotnosť 0,5 kg a uhol $\sphericalangle \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_3 = 126°50'$.

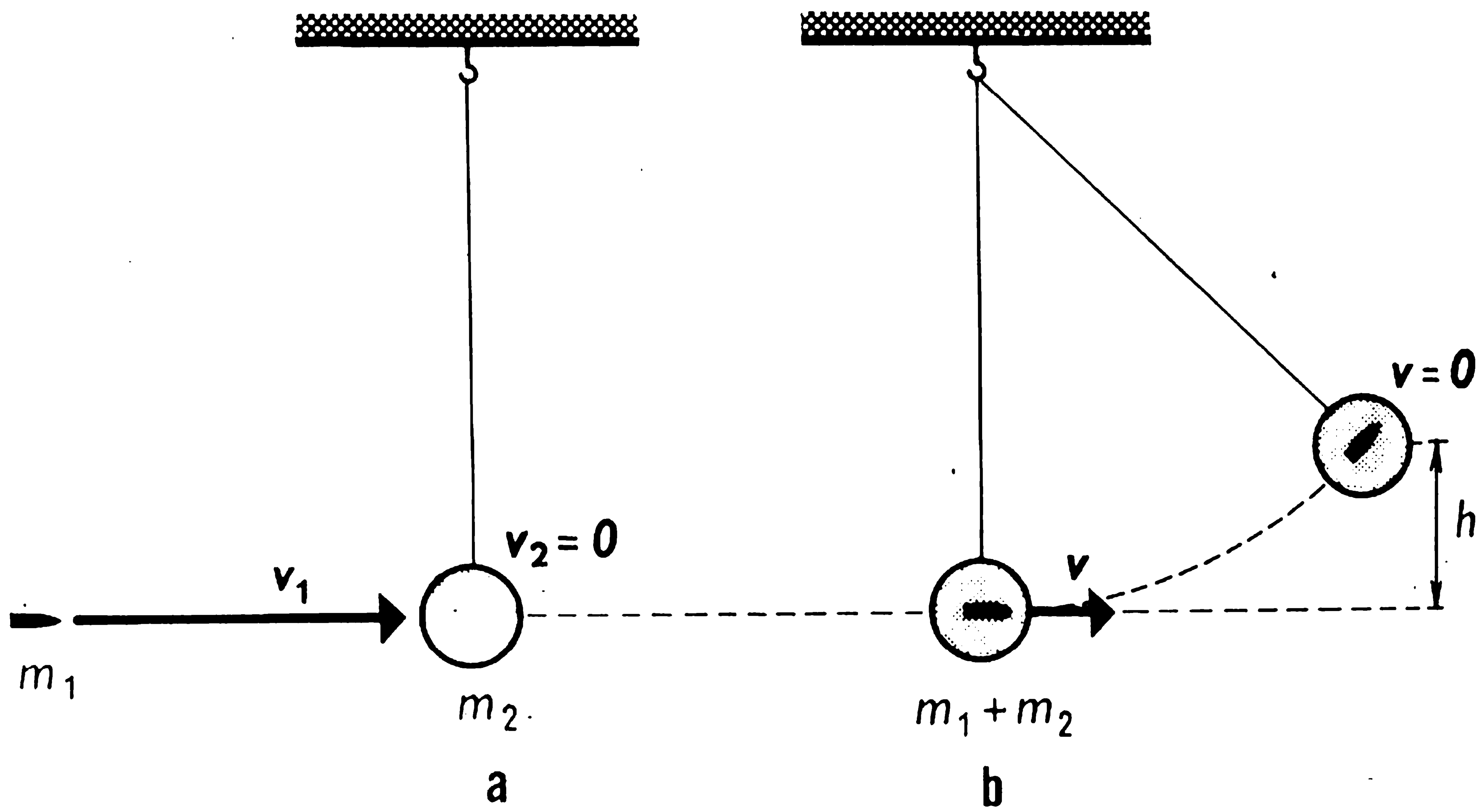
Príklad 2

Do telesa v pokoji, ktoré má hmotnosť 1 kg a visí na motúze, narazí vo vodorovnom smere strela s hmotnosťou 0,01 kg (obr. C9-2a). Po zrážke zostane strela v telese a teleso sa spolu so strelou pohybuje do výšky 0,2 m nad pôvodnú polohu telesa (obr. C9-2b). Nájdite veľkosť rýchlosti strely pred zrážkou. Hmotnosť nite a odpor vzduchu zanedbajte.

Riešenie

$m_1 = 1$ kg, $m_2 = 0{,}01$ kg, $h = 0{,}2$ m, $v_2 = ?$

Pretože pri zrážke sa časť mechanickej energie strely premení pri preniknutí do zaveseného telesa na vnútornú energiu, nemožno pri riešení využiť zákon zachovania mechanickej energie. Preto nemožno uvažovať tak, že kinetická energia strely sa zmení na potenciálnu energiu telesa so strelou vo výške 0,2 m. Na strelu ani na teleso v momente zrážky nepôsobia vo



Obr. C9-2a, b

vodorovnom smere žiadne vonkajšie sily, a preto sa súčet hybností telesa a strely v tomto smere nemení. Preto pre veľkosti hybností vo vodorovnom smere možno napísať: $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$, kde v_1 je veľkosť rýchlosti strely pred zrážkou s telesom a v je veľkosť spoločnej rýchlosti telesa a strely bezprostredne po ich zrážke (rýchlosť telesa pred zrážkou je nulová).
Teda

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2)\, v}{m_1} \tag{1}$$

Pri opise deja po zrážke však už možno zákon zachovania mechanickej energie použiť. Kinetická energia telesa so strelou tesne po zrážke $\left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right) v^2$ sa rovná potenciálnej energii tejto sústavy v jej najvyššej polohe, t. j. $(m_1 + m_2) g\, h$.

Pri maximálnom odklone motúza bude v súhlase so zákonom zachovania mechanickej energie

$$\frac{(m_2 + m_1)}{2}\, v^2 = (m_2 + m_1)\, g\, h$$

Z toho

$$v = \sqrt{2g\,h} \qquad (2)$$

Ak dosadíme z (2) do (1), bude

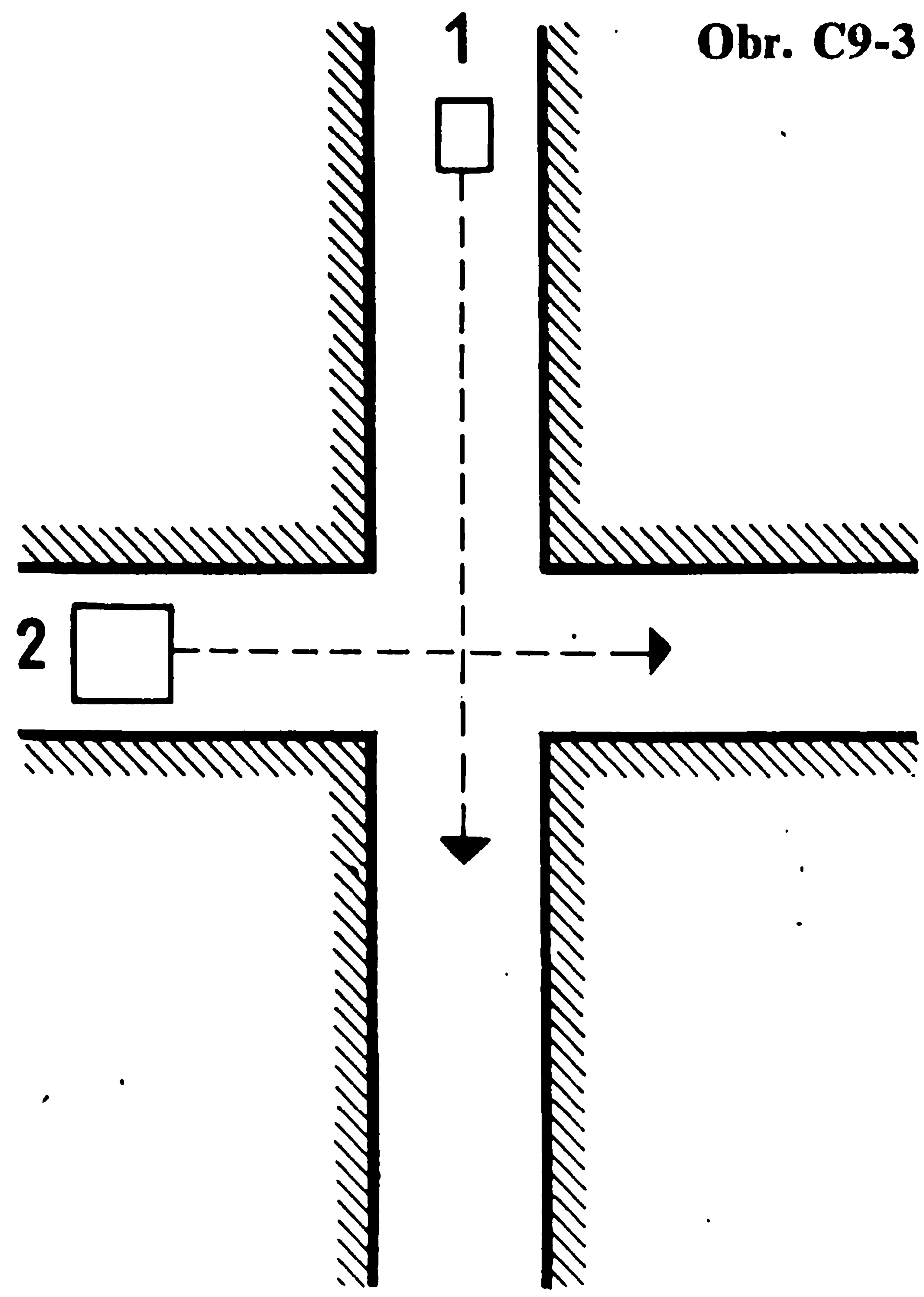
$$v_1 = \frac{(m_2 + m_1)\sqrt{2g\,h}}{m_1} = \left[\frac{(1 + 0{,}01)\sqrt{2 \,.\, 9{,}8 \,.\, 0{,}2}}{0{,}01}\right] \mathrm{m\,.\,s^{-1}} =$$
$$\doteq 200 \ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$$

Strela narazila na zavesené teleso rýchlosťou 200 m.s^{-1}.

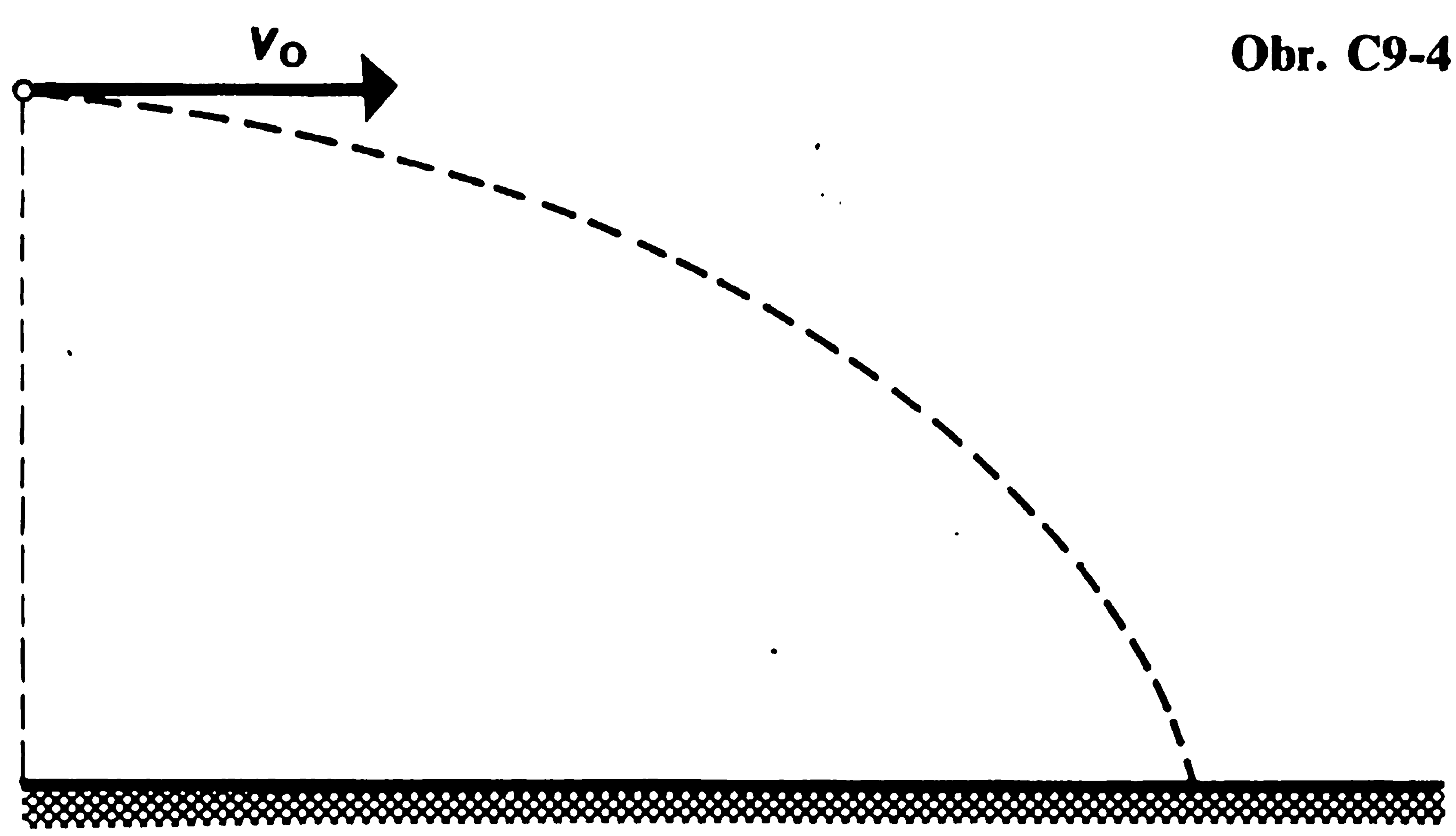
Úlohy

1. Strela vyletela z pušky vo vodorovnom smere rýchlosťou veľkosti 800 m.s^{-1}. Akou veľkou rýchlosťou sa pohybuje puška pri spätnom náraze, ak je hmotnosť pušky 400-krát väčšia ako hmotnosť strely? [2 m.s^{-1}]
2. Vagón s hmotnosťou 35 t sa pohybuje po priamej trati rýchlosťou veľkosti $v_1 = 0{,}4$ m.s^{-1} a narazí do stojaceho vagóna s hmotnosťou 21 t. Pri náraze sa vagóny automaticky spoja. Akou veľkou spoločnou rýchlosťou sa budú vagóny pohybovať a aký bude smer rýchlosti? Aká veľká mechanická energia sa pri spojení vagónov zmení na iné formy energie? [0,25 m.s^{-1}; 1 050 J]
3. Kameň bol vrhnutý zvislo nahor rýchlosťou s veľkosťou v_0. Máme určiť, v akej výške nad vodorovnou rovinou sa veľkosť rýchlosti kameňa zmenší dvakrát. Odpor vzduchu zanedbáme. (Návod: použite zákon zachovania mechanickej energie.) $\left[h = \dfrac{3\,v_0^2}{8g}\right]$
4. Určte veľkosť a smer hybnosti sústavy dvoch telies, ktoré sa pohybujú v navzájom kolmých smeroch (obr. C9-3) k sebe, ak je veľkosť rýchlosti prvého telesa 15 m.s^{-1} a druhého telesa 10 m.s^{-1}; hmotnosti sú 300 kg a 500 kg. Obe telesá považujte za izolovanú sústavu dvoch hmotných bodov. Aká bude hybnosť sústavy po zrážke telies? Aká je kinetická energia sústavy pred zrážkou a po zrážke? [6 730 kg.m.s^{-1}; $\sphericalangle\, \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p} = 48°$; 58,7 kJ; 28,3 kJ]

*5. Určte kinetickú energiu telesa s hmotnosťou 1 kg, vrhnutého z istej výšky vo vodorovnom smere (obr. C9-4) rýchlosťou s veľkosťou $v_0 =$



Obr. C9-3

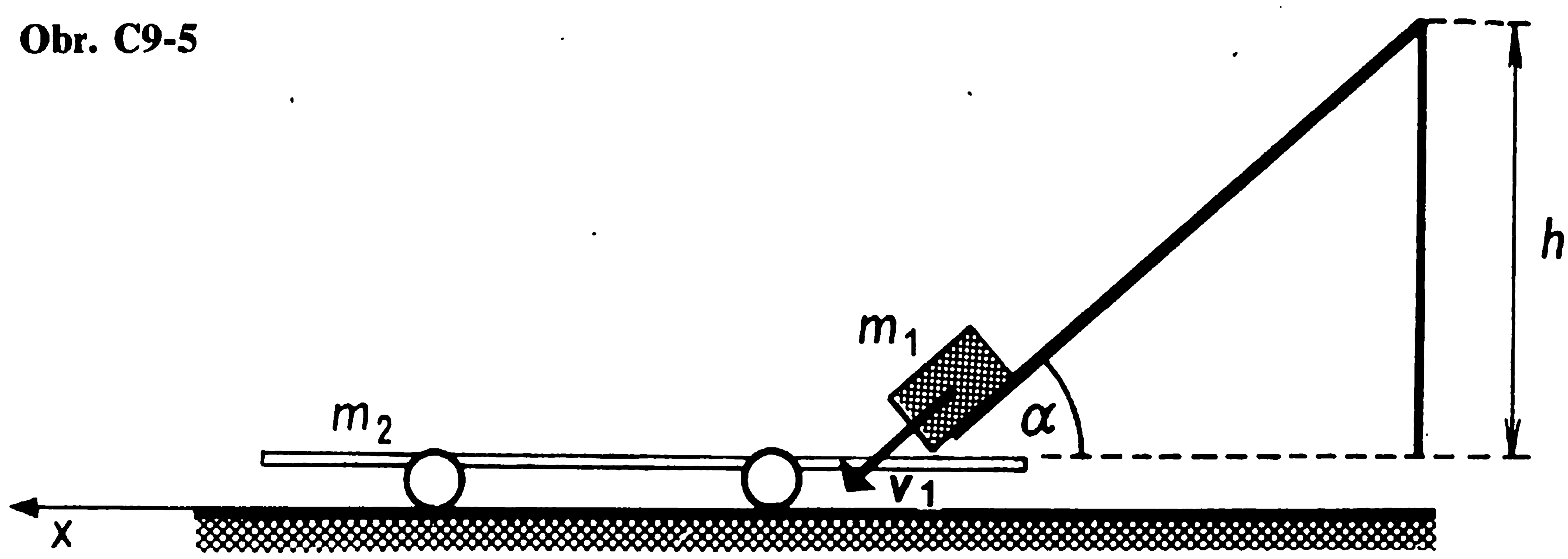


Obr. C9-4

$= 20$ m . s^{-1} na konci 4. sekundy jeho pohybu. (Návod: Použite zákon záchovania mechanickej energie; $g \doteq 10$ m . s^{-2}.) [1 000 J]

∗6. Akou veľkou rýchlosťou sa začne pohybovať vozík s plošinou s hmotnosťou m_2, ak na ňu skĺzne z vrcholu naklonenej roviny s výškou h teleso s hmotnosťou m_1 (obr. C9-5) a zastaví sa na plošine? Uhol sklo-

Obr. C9-5



nu roviny je α. Trenie na naklonenej rovine zanedbajte. (Návod: Uvážte, že pozdĺž osi x — pozri obr. C9-5 — vonkajšie sily nepôsobia.) $\left[v_2 = \frac{m_1\sqrt{2gh}\cos\alpha}{m_1+m_2}\right]$

7. Lopta narazila kolmo na zvislú železnú stenu rýchlosťou veľkosti 6 m.s^{-1} a odrazila sa od nej rovnako veľkou rýchlosťou v opačnom smere. Určte veľkosť priemernej sily, ktorou lopta pôsobila na stenu, ak náraz trval 0,01 s a lopta mala konštantnú hmotnosť 1 kg. [1 200 N]

Cvičenie 10 (4. laboratórne)

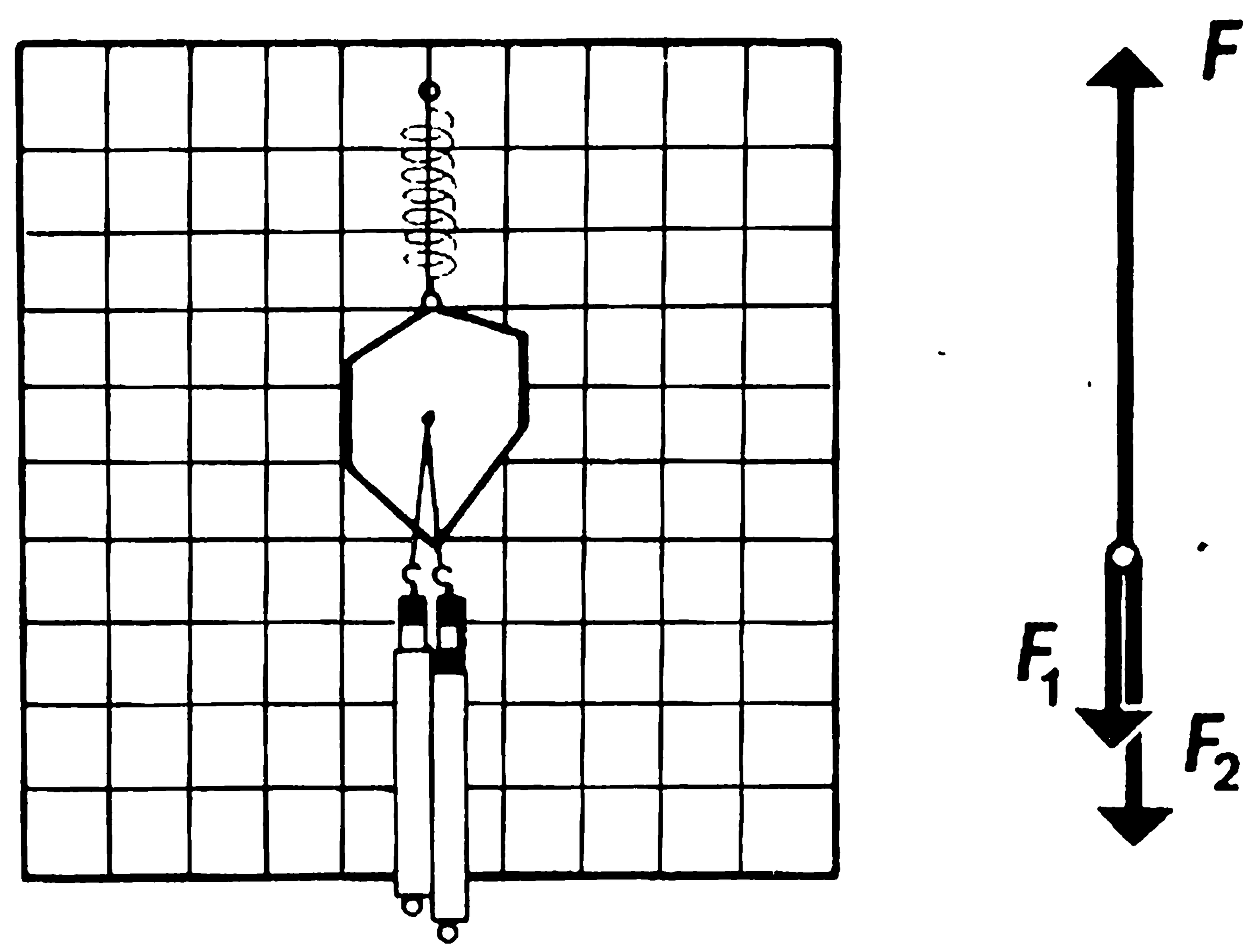
Skladanie síl

Úloha: Experimentálne overte vlastnosti výslednice pri skladaní dvoch síl pôsobiacich na tuhé teleso a urobte rozbor všetkých možných prípadov.

Pomôcky: hobrová doska, milimetrový papier, model pevného telesa, špendlíky, 3 silomery so stupnicou v newtonoch, pružina, silon alebo tenký drôtik

Postup

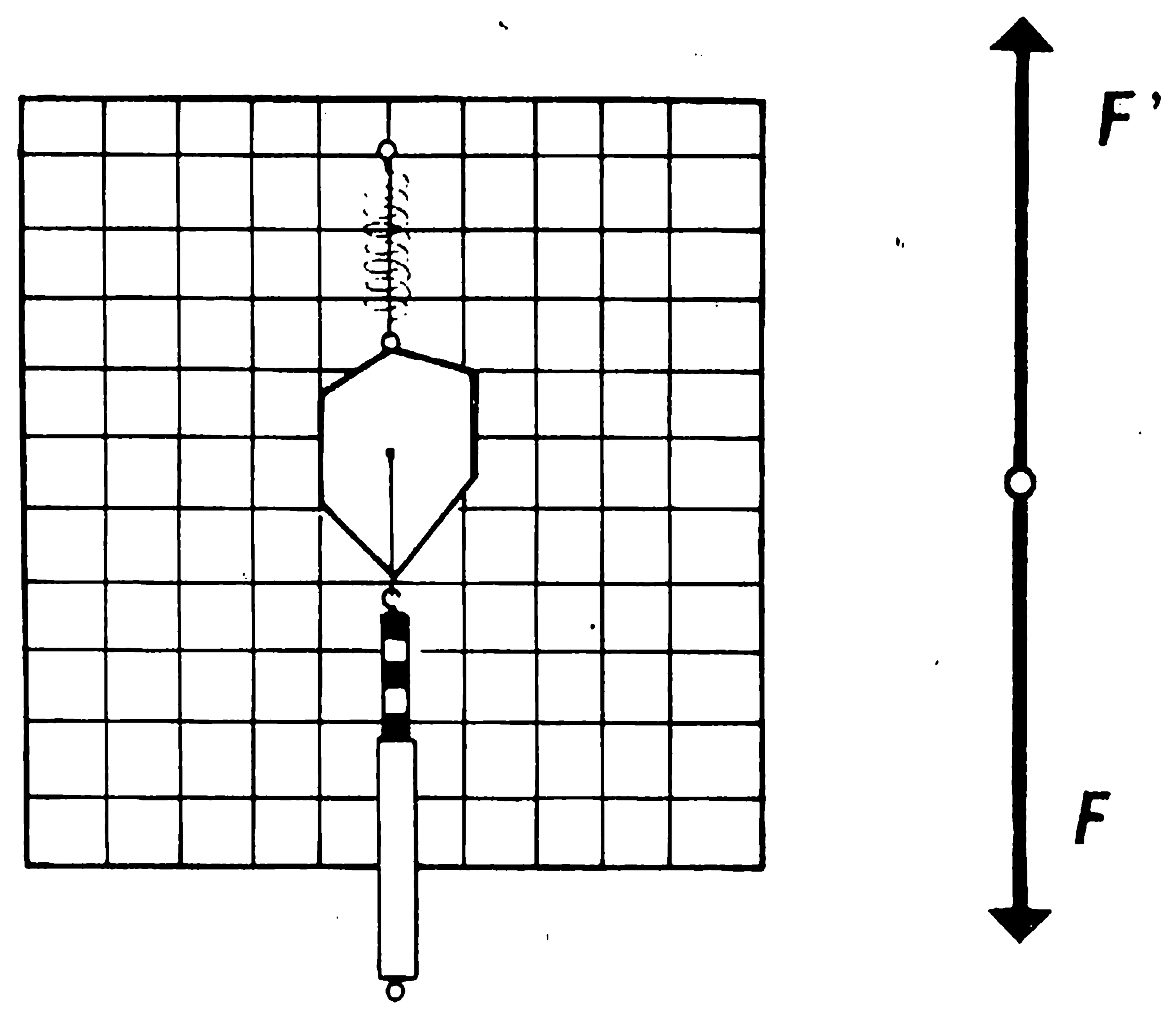
a) 1. Na hobrovú podložku položte milimetrový papier a špendlíkom pripevnite pružinu. Pružina je spojená s pevným telesom. Na pevné teleso pôsobia v jednom bode dve sily rovnakého smeru (obr. C10-1). Pôsobením síl sa pružina predĺži.



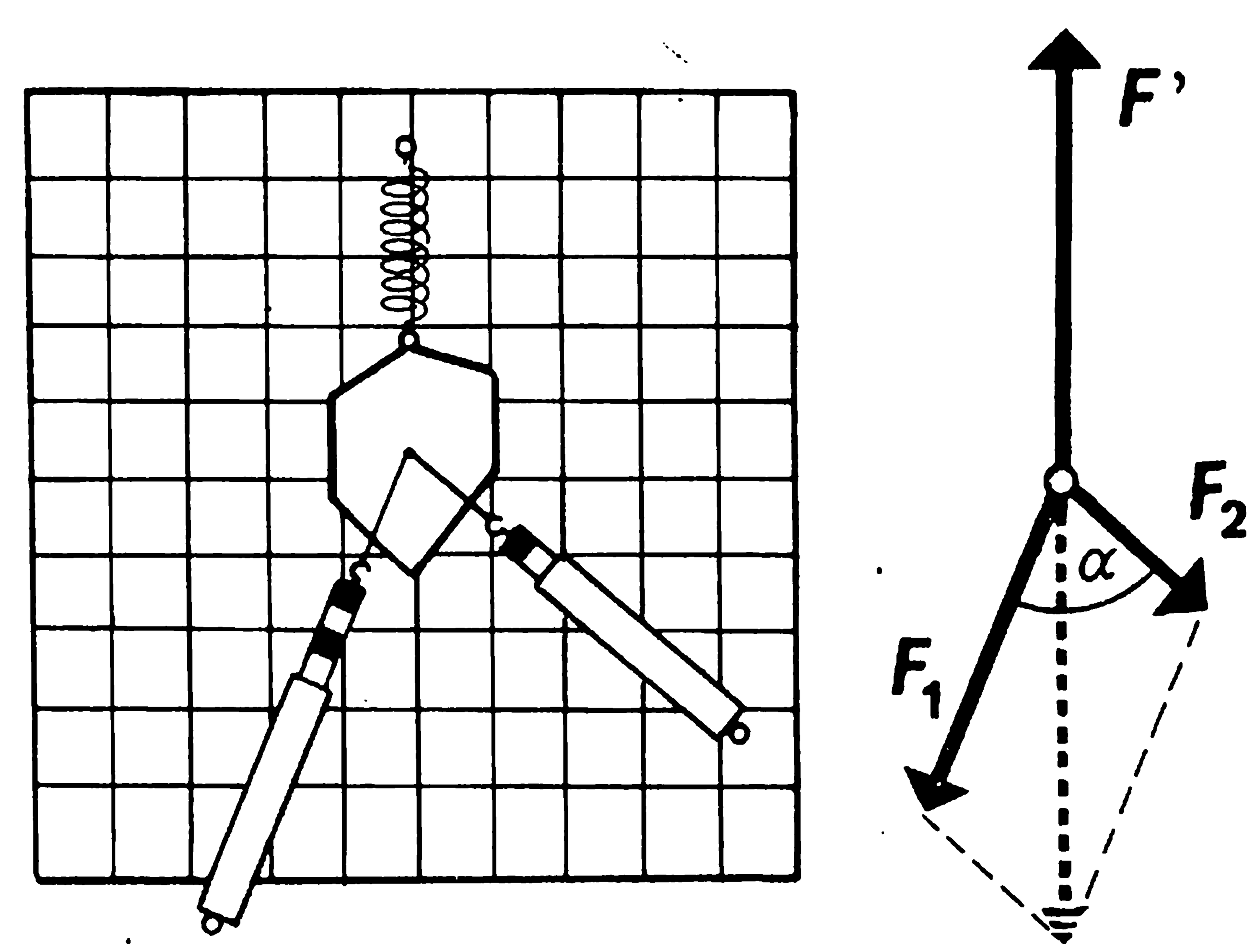
Obr. C10-1

2. Na milimetrovom papieri označte výslednú dĺžku pružiny a do tabuliek zapíšte veľkosti pôsobiacich síl.
3. Nahraďte dva silomery jedným a dosiahnite rovnaké predĺženie pružiny (obr. C10-2).
4. Veľkosť pôsobiacej sily zapíšte do tabuliek.
5. Meranie opakujte pre rôzne veľké pôsobiace sily.

Obr. C10-2



Obr. C10-3

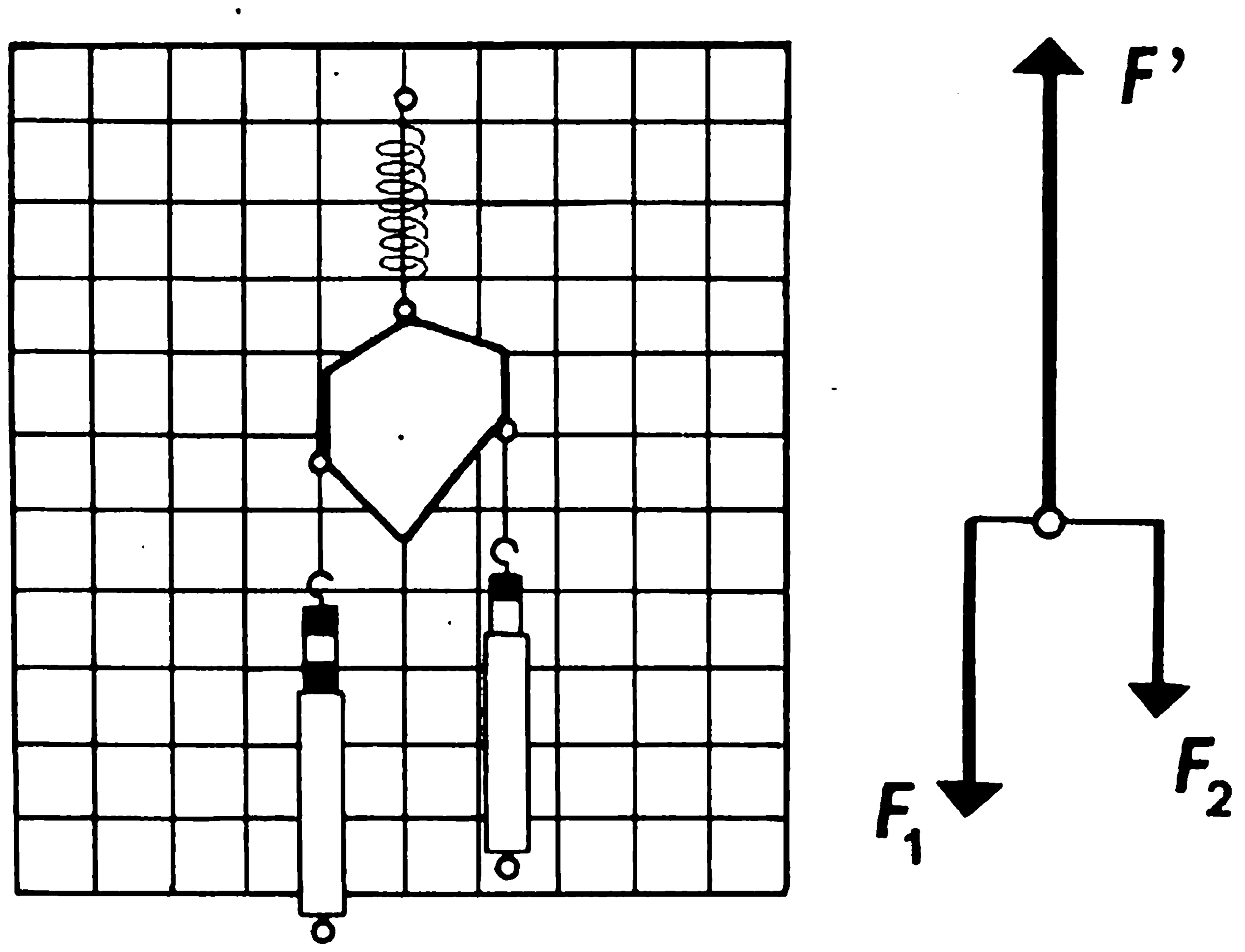


6. Vypočítajte rozdiel ΔF medzi nameranou a vypočítanou veľkosťou výslednice F.

b) Pokus urobte ako v bode a), ale sily $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ budú mať opačný smer.

c) Pokus urobte ako v bode a), ale vektorové priamky síl $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ zvierajú uhol α (obr. C10-3). Pokus urobte pre rôzne uhly α. Veľkosť výslednice pre jednotlivé uhly α určte graficky.

d) Pokus zostavte ako v bode a) tak, aby sily $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ pôsobili v rôznych bodoch pevného telesa. Aby vektorové priamky pôsobiacich síl boli rovnobežné, musia mať osi silomerov rovnaký smer ako zvislé čiary na milimetrovom papieri (obr. C10-4).



Obr. C10-4

	a				*b*				*c*					*d*			
Číslo merania	F_1	F_2	F	ΔF	F_1	F_2	F	ΔF	F_1	F_2	α	F	ΔF	F_1	F_2	F	ΔF
	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	°	N	N	N	N	N	N
1.																	
2.																	
3.																	
4.																	
5.																	

Otázky

1. Ako sa bude meniť veľkosť zložiek pri zmene veľkosti uhla α?
2. Aký fyzikálny význam má sila $\boldsymbol{F}$ na obr. C10-1, C10-2, C10-3?
3. Ako sa pri pokuse prejavuje účinok sily $\boldsymbol{F}$?
4. Vedeli by ste navrhnúť a realizovať pokus v prípade, keď sily $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ pôsobia v rôznych bodoch a ich vektorové priamky sú rovnobežné? Je tento prípad zahrnutý v niektorom z uvedených pokusov?
5. Akú fyzikálnu vlastnosť pružiny sme v pokusoch využívali?

Cvičenie 11 (5. laboratórne)

Pokusné pozorovanie vzájomných premien mechanických foriem energie

Jedným zo základných prírodných zákonov je zákon zachovania energie. Jeho použitie nám v mnohých prípadoch značne zjednodušuje riešenie problémov.

Cieľom tohto laboratórneho cvičenia je naučiť sa používať pri pokusoch zákon zachovania mechanickej energie.

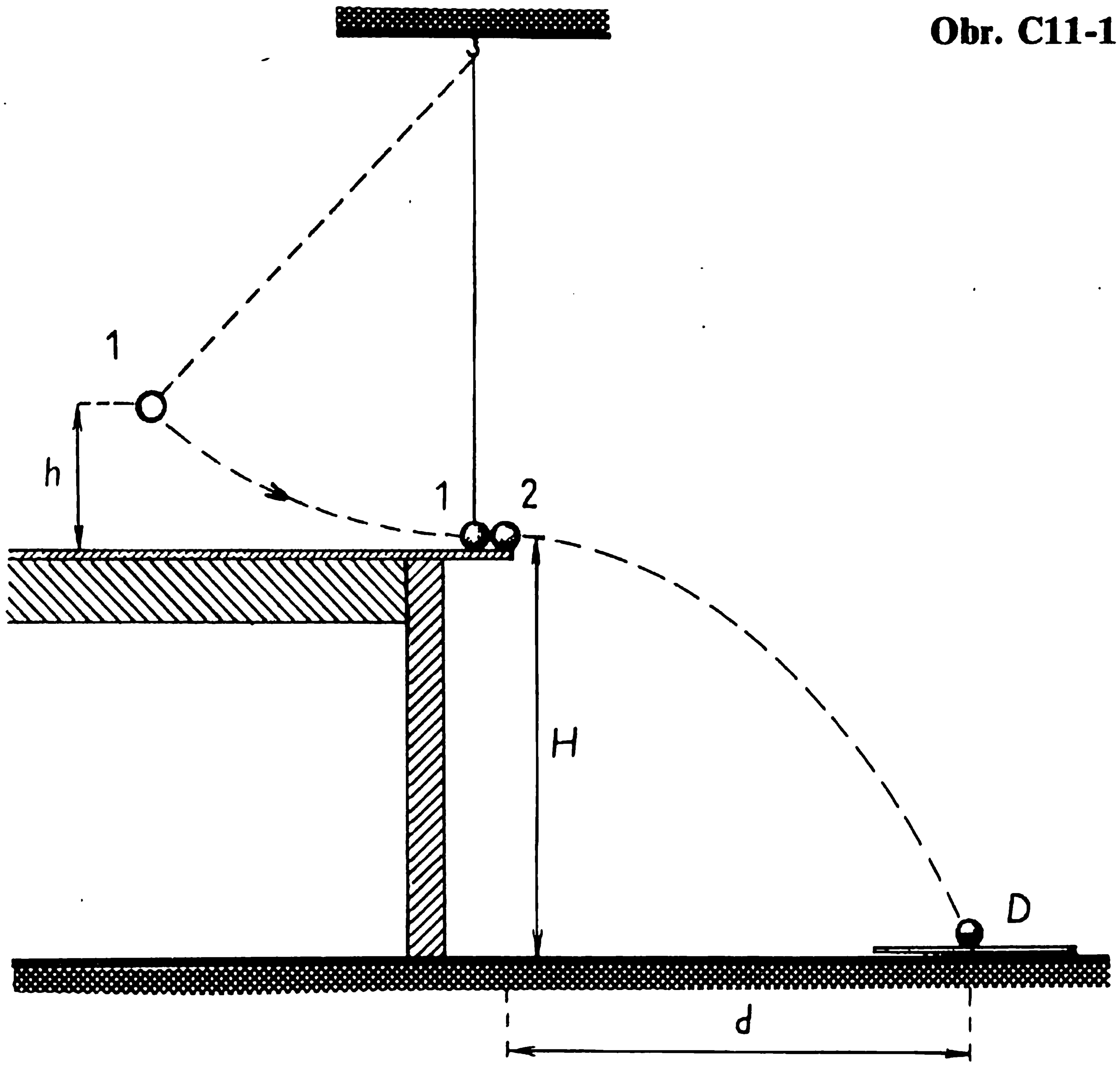
Úloha: Pozorujte vzájomné premeny mechanických foriem energie a opíšte ich.

Pomôcky: stojan, niť, dve guľôčky s rovnakou hmotnosťou z rovnakého materiálu, dĺžkové meradlo, kopírovací papier

Princíp

Teleso s hmotnosťou m v homogénnom tiažovom poli môže mať vzhľadom na povrch Zeme kinetickú energiu $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ a potenciálnu energiu tiažovú $E_p = m g h$.

Zmeny potenciálnej energie tiažovej alebo kinetickej súvisia s prácou, ktorú teleso vykonalo. Zostavte pokus podľa obr. C11-1. Ak vychýlime guľôčku 1 z rovnovážnej polohy, zväčší sa jej potenciálna energia tiažová vzhľadom na povrch stola. Ak je guľôčka vo výške h nad povrchom stola, jej potenciálna energia je vzhľadom na povrch stola $E_{p_1} = m g h$. Po uvoľnení guľôčky sa mení potenciálna energia tiažová E_{p_1} na kinetickú energiu E_{k_1}. Po náraze na guľôčku 2 sa časť kinetickej energie guľôčky 1 zmení na iné formy energie a guľôčke 2 sa odovzdá iba časť kinetickej energie $E_{k_2} < E_{k_1}$ (sústava nie je izolovaná). Guľôčka 2 má okrem toho vzhľadom na rovinu podlahy svoju potenciálnu energiu tiažovú $E_{p_2} = m g H$. Guľôčka 2 sa po náraze začne pohybovať a dopadne na podlahu do bodu D.



Obr. C11-1

Postup

1. Zostavte zariadenie podľa obr. C11-1. Guľôčku 2 položte na okraj stola tak, aby sa dotýkala guľôčky 1 v pokoji. Určte výšku H, t. j. vzdialenosť stredu guľôčky 2 od podlahy.
2. Guľôčku 1 zdvihnite pri napnutej niti do výšky h a potom ju bez nárazu uvoľnite.
3. Určte miesto dopadu guľôčky 2. Miesto dopadu guľôčky 2 zistíte tak, že na podlahu položíte biely list papiera prekrytý kopírovacím papierom. Po dopade guľôčka nechá na bielom papieri tmavú stopu. Pokus niekoľkokrát opakujte (4-krát až 8-krát) pri rovnakej výške h a rovnakej polohe papiera na podlahe.

   Keď si prezriete záznam dopadu guľôčky 3, zistíte, že miesta dopadu sú rozmiestené rôzne, vznikol rozptyl miest dopadu. Preto treba určiť bod stredného dopadu, napr. takto: Z daných miest dopadu si zvoľte disjunktné dvojice. Stredy týchto dvojíc spojte úsečkou a zostrojte stred úsečky. Potom spojte stredy nových úsečiek. Tento postup opakujte, kým neurčíte bod, ktorý pokladáme za bod stredného dopadu D. Ako budete postupovať pri určovaní bodu D, ak zistíte, že niektoré miesto dopadu je veľmi vzdialené od väčšiny ostatných miest dopadu?

4. Ďalej zistite vzdialenosť d bodu D od päty kolmice zostrojenej zo stredu guľôčky 2 v jej pokojovej polohe na stole.
5. Zo vzťahu

$$v = d\sqrt{\frac{g}{2H}}$$

určíte veľkosť rýchlosti, ktorú guľôčka 2 získala nárazom guľôčky 1. Teraz môžete určiť polohovú energiu tiažovú guľôčky 1 a kinetickú energiu guľôčky 2 tesne po náraze a porovnať ich veľkosti.

6. Celé pozorovanie opakujte pri rôznych výškach h.
7. Namerané hodnoty zapíšte do nasledujúcej tabuľky:

Číslo merania	h	d	v	E_{p_1}	E_{k_2}	$E_{p_1} - E_{k_2}$	$\frac{E_{p_1} - E_{k_2}}{E_{p_1}}$
	m	m	m.s^{-1}	J	J	J	
1 ⋮ 8							

Z tabuľky určte, aká veľká časť mechanickej energie guľôčky 1 sa pri pokuse mení na iné formy energie.

Otázky

1. Výšku guľôčky nad doskou stola meriame ako vzdialenosť najnižšieho bodu povrchu guľôčky (miesto vzdialenosti ťažiska) od dosky stola. Posúďte, či je tento postup správny.
2. Prečo sa podiel v poslednom stĺpci nerovná nule?
3. Bude údaj v poslednom stĺpci tabuľky závisieť od látky, z ktorej sú guľôčky zhotovené? Odpoveď zdôvodnite.
4. Bude hodnota rozdielu $E_{p_1} - E_{k_2}$ závisieť od výšky h, z ktorej uvoľňujete guľôčku? Odpoveď zdôvodnite.

Cvičenie 12 (6. laboratórne)

Šmykové trenie a valivý odpor

Zo základnej školy viete, že trecia sila je dôsledok trenia, ktoré vzniká pri pohybe telesa po povrchu iného telesa. Trecia sila pôsobí proti smeru pohybu telesa. Podľa charakteru styku uvažovaných telies pri ich relatívnom pohybe hovoríme o šmykovom trení alebo valivom odpore. Pri posuvnom pohybe je táto sila dôsledkom šmykového trenia, pri valivom pohybe dôsledkom valivého odporu.

Príčinou šmykového trenia je skutočnosť, že styčné plochy dvoch telies nie sú nikdy dokonale hladké, ich nerovnosti do seba zapadajú a bránia vzájomnému pohybu telies. Pritom sa uplatňuje i silové pôsobenie častíc v styčných plochách.

Vznik valivého odporu si vysvetľujeme tým, že pri valivom pohybe jedného telesa po povrchu druhého telesa vzniká deformácia oboch telies.

Z druhého Newtonovho zákona vyplýva, že ak sa teleso pohybuje rovnomerne priamočiaro s trením, je vonkajšia sila pôsobiaca na teleso rovnako veľká ako trecia sila, ale má opačný smer. To sa využíva pri meraní trenia. Veľkosť trecej sily určíme tak, že jedno teleso ťaháme rovnomerne po vodorovnej ploche druhého telesa. Veľkosť trecej sily sa rovná veľkosti sily, ktorá teleso udržuje v rovnomernom pohybe.

Tento spôsob môžeme použiť aj na meranie valivého odporu.

Úloha

A. Overte veľkosť trecej sily F_t pri šmykovom trení v závislosti:
   1. od kolmej tlakovej sily F_n na podložku,
   2. od veľkosti styčných plôch S,
   3. od druhu a vlastností styčných plôch,
   4. od rýchlosti pohybu telesa voči podložke.

B. Porovnajte treciu silu pri šmykovom trení a valivom odpore (pri tej istej kolmej tlakovej sile).

Pomôcky: 2 silomery (s rozsahom do 5 N a 1 N), vodorovná doska s podložkami z rôzneho materiálu, 2 hranoly, valec, rozličné závažia, podložné valčeky, dĺžkové meradlo

Postup

A. 1. Drevený hranol položte na vodorovnú dosku. Na jeho bočnú stenu pripevnite silomer a ťahajte ho vo vodorovnom smere tak, aby sa hranol pohyboval rovnomerne priamočiaro. Silomerom nameriate stálu silu F_t, ktorú zaznačíte do tabuľky. Kolmá tlaková sila F_n sa rovná tiaži hranola. Potom na hranol klaďte rôzne závažia, a tak zväčšujte kolmú tlakovú silu na dosku. Pre každý prípad určte príslušné veľkosti F_t a F_n a zapíšte ich do tabuľky. Potom určte pre jednotlivé merania pomer $\frac{F_t}{F_n}$ a urobte záver.

Číslo merania	F_n	F_t	$f=\frac{F_t}{F_n}$
	N	N	

2. Určte plošný obsah rôznych stien hranola (s presnosťou na cm^2) a ťahajte hranol položený na rôzne steny (mali by mať rovnako hladký povrch). Všetko zopakujte s druhým hranolom. Údaje zaznačte do tabuľky a urobte záver.

Číslo merania	S	F_n	F_t
	cm^2	N	N

3. Na dosku dávajte rôzne podložky (napr. nevyhladené drevo, hladkú drevenú dosku, plexisklo, tkaninu a i.) a určujte F_t pre určitý hranol. Hodnoty F_t zaznačte do tabuľky a urobte záver.

Číslo merania	F_n	F_t	$f = \frac{F_t}{F_n}$
	N	N	

4. Ťahajte hranol po vodorovnej doske najprv pomaly, potom postupne stále väčšou rýchlosťou. Zmerajte treciu silu pri rôznych rýchlostiach. Zapíšte do tabuľky a urobte záver.

Číslo merania	F_n	F_t	$f = \frac{F_t}{F_n}$
	N	N	

B. Hranol podložte na podložné valčeky a merajte treciu silu pri valivom odpore. Meranie robte pre rôznu tlakovú silu ako v prípade A.1. Zapíšte do tabuľky a hodnotu $\frac{F_t}{F_n}$ porovnajte s hodnotou f v tabuľke A.1.

Číslo merania	F_n	F_t	$\frac{F_t}{F_n}$
	N	N	

Otázky

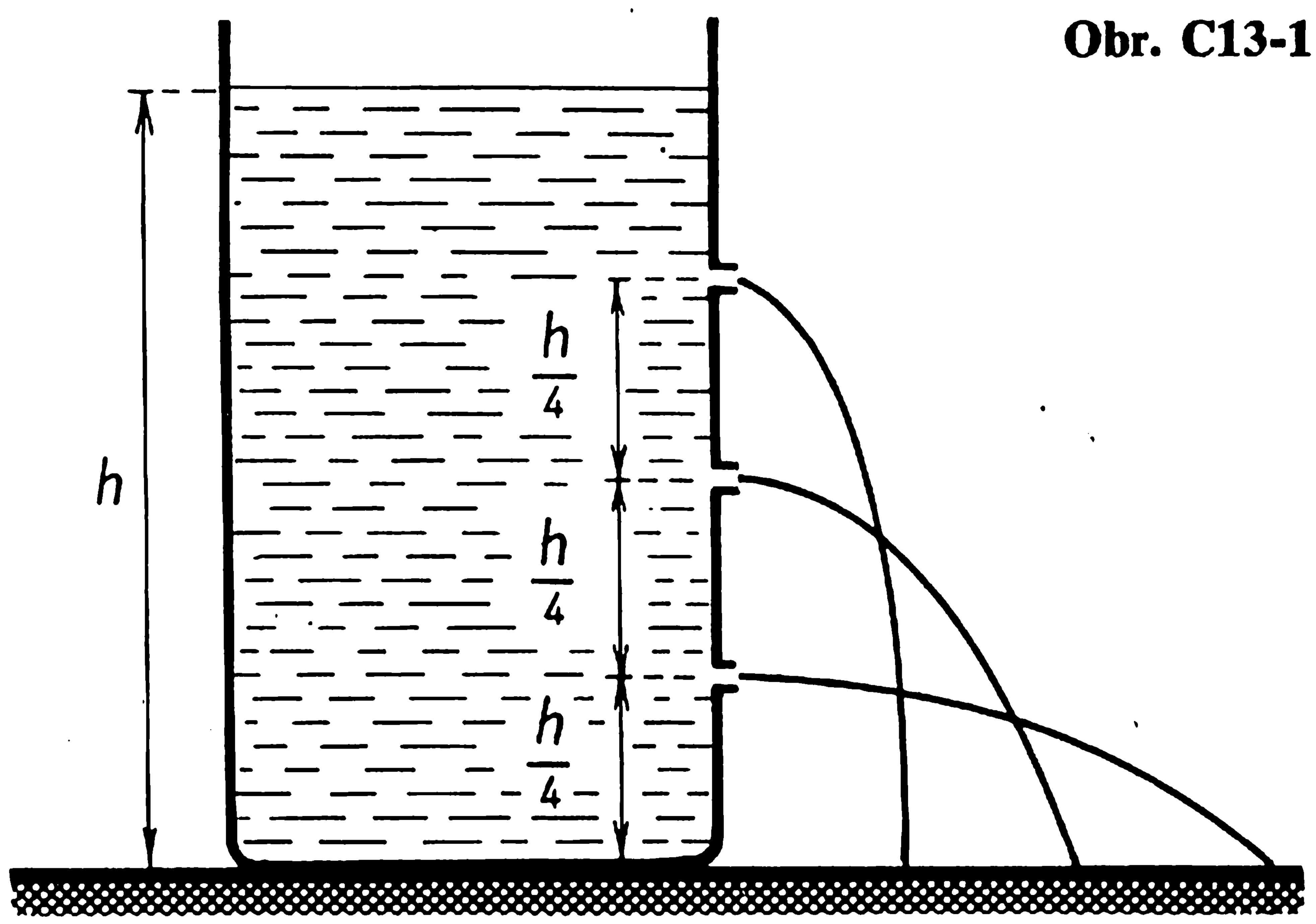
1. Ako zapíšete pre šmykové trenie vzťah medzi F_t a F_n pomocou veličiny f? Veličina f sa nazýva súčiniteľ šmykového trenia a jej hodnoty nájdete v tabuľkách.
2. Aký je vzťah medzi F_t a F_n pri valivom odpore? Presné merania a teoretické úvahy vedú k záveru, že veľkosť trecej sily pri valivom odpore závisí aj od polomeru valiaceho sa telesa (nepriamo úmerne). Možno dokázať, že platí $F_t = \xi \dfrac{F_n}{r}$, kde r je polomer valiaceho sa telesa. Veličina ξ sa nazýva rameno valivého odporu a je oveľa menšia ako súčiniteľ šmykového trenia pre tie isté materiály.

Cvičenie 13

Úlohy z hydrodynamiky

Príklad 1

Z nádoby podľa obr. C13-1 vyteká voda tromi otvormi. Vypočítajte objem vody, ktorá vytečie z nádoby za 1 minútu, ak sa vodná hladina udržuje v stálej výške h nad dnom nádoby; $h = 2$ m, plošný obsah prierezu každého otvoru je 0,5 cm², $g \doteq 10$ m.s⁻².



Obr. C13-1

Riešenie

$h = 2$ m, $S = 5 \,.\, 10^{-5}$ m², $t = 60$ s, $g \doteq 10$ m.s⁻², $V = ?$

Za čas t pretiekol otvorom s obsahom S objem $V_0 = S\, v\, t$, všetkými otvormi teda pretečie objem $V = S\,(v_1 + v_2 + v_3)\,t$. Pre veľkosť rýchlosti kvapaliny vytekajúcej z nádoby otvorom, ktorý je v hĺbke h pod voľnou hladinou, platí

$$v = \sqrt{2\,h\,g}$$

Pretože otvory sú v hĺbkach $h_1 = \dfrac{h}{4}$, $h_2 = \dfrac{2h}{4}$, $h_3 = \dfrac{3h}{4}$, pre veľkosti rýchlostí kvapaliny vytekajúcej týmito otvormi platí

$$v_1 = \sqrt{2\frac{h}{4}g}, \quad v_2 = \sqrt{2\frac{2h}{4}g}, \quad v_3 = \sqrt{2\frac{3h}{4}g}$$

Po dosadení do vzťahu pre vytečený objem a úprave dostaneme

$$V = S\sqrt{\frac{h\,g}{2}}\,(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})\,t$$

a číselne

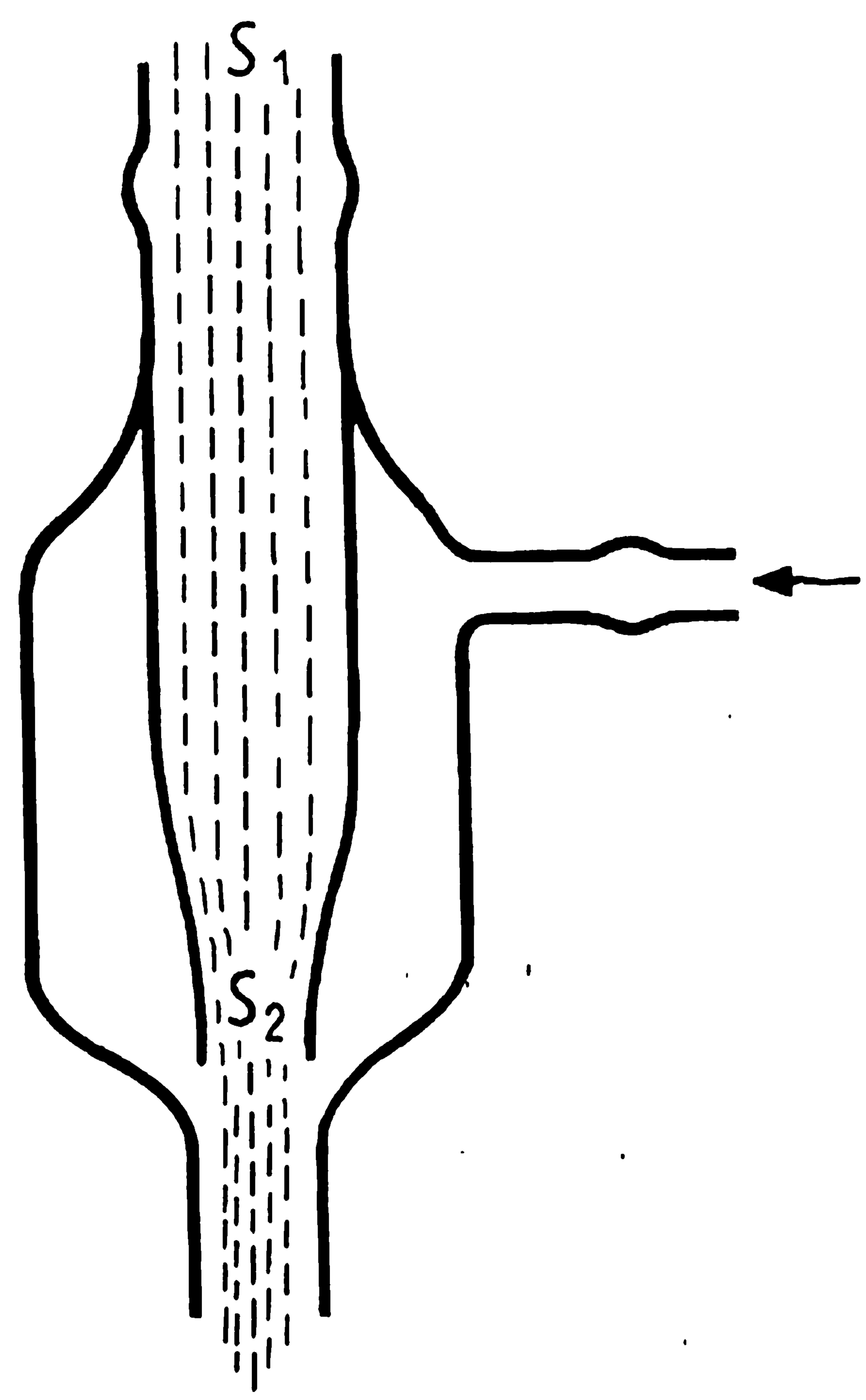
$$V = 5.10^{-5}\sqrt{\frac{2.10}{2}}\,(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})\,60\ \mathrm{m}^3 \doteq 39.10^{-3}\ \mathrm{m}^3$$

Z nádoby by za 1 minútu vytieklo asi 39 l vody (v skutočnosti menej, lebo voda nie je ideálna kvapalina).

Príklad 2

Vodná vývevа (pozri obr. C13-2) je pripojená na vodovodné potrubie, v ktorom je pretlak vody vzhľadom na atmosferický tlak 2 kPa. Prierez vtokovej trubice je 0,5 cm^2; trubicou pretečie za minútu 1 liter vody. Aký

Obr. C13-2



maximálne veľký môže byť prierez ústia trubice vo výveve, aby vývevа vôbec nasávala vonkajší vzduch?

Riešenie

$\Delta p = 2$ kPa $= 2 \,.\, 10^3$ Pa, $S_1 = 0{,}5$ cm$^2 = 5 \,.\, 10^{-5}$ m^2, $V = 1$ l $= 10^{-3}$ m^3, $t =$ $= 1$ min $= 60$ s, $S_2 = ?$

Pre objem vody, ktorý vývevou pretečie za čas t, platí: $V = S_1 v_1 t$, z toho $v_1 = \dfrac{V}{S_1 t}$ je rýchlosť vody v prívodnej trubici. Pre rýchlosť v_2 vody vytekajúcej z ústia trubice do vzduchu (t. j. p_2 sa rovná atmosferickému tlaku) dostaneme použitím Bernoulliho rovnice

$$\frac{1}{2} \varrho v_1^2 + p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \varrho \, v_2^2$$

Keď označíme $p_1 - p_2 = \Delta p$, platí

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2 \Delta p}{\varrho}}$$

Použitím rovnice kontinuity vypočítame prierez zodpovedajúci tejto rýchlosti

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \qquad S_2 = \frac{S_1 v_1}{v_2} = \frac{V}{t \sqrt{v_1^2 + \dfrac{2 \Delta p}{\varrho}}} =$$

$$= \frac{V}{t \sqrt{\left(\dfrac{V}{S_1 t}\right)^2 + \dfrac{2 \Delta p}{\varrho}}}$$

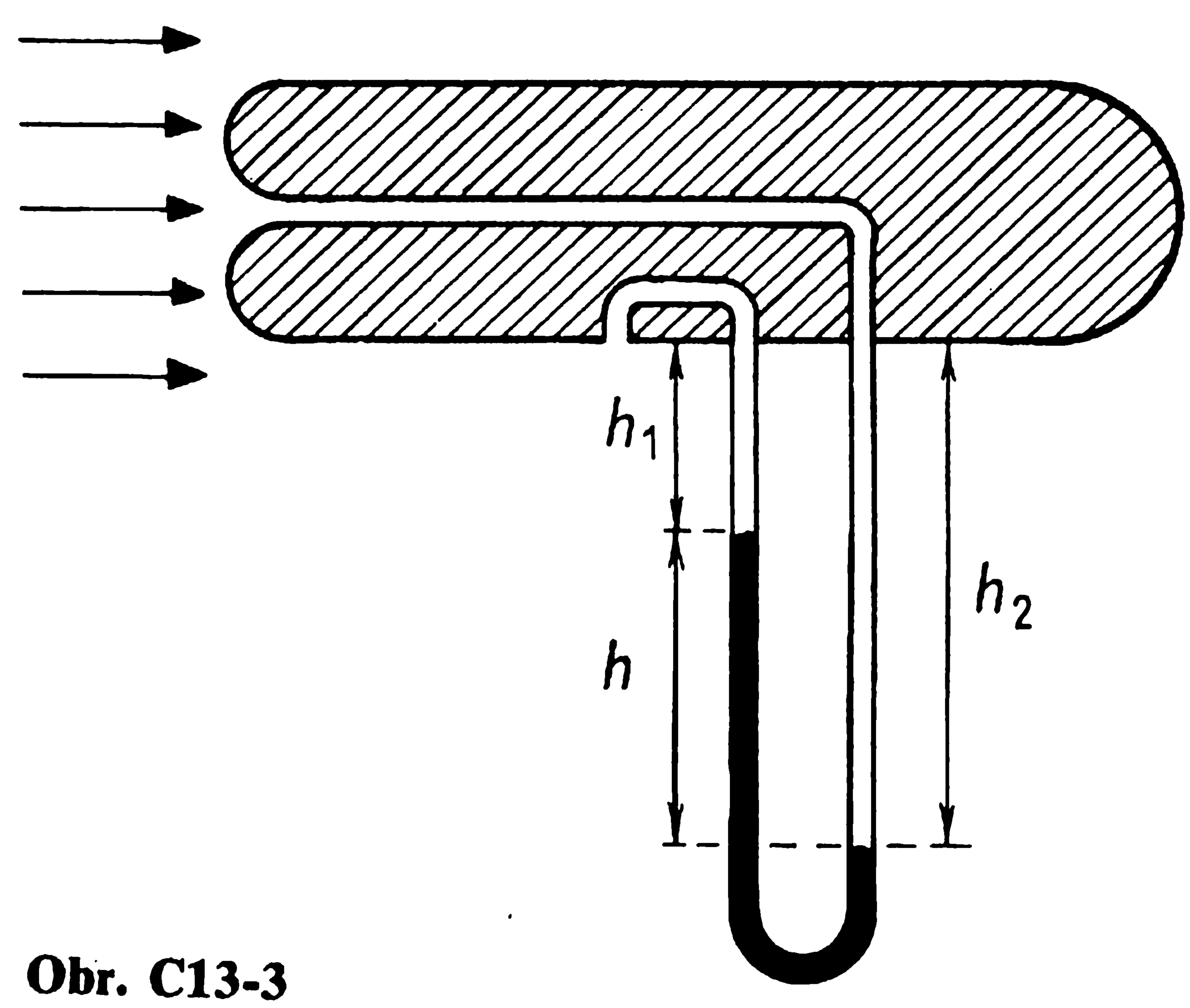
Číselne: $S_2 \doteq 8{,}2 \,.\, 10^{-6}$ m^2.

Aby vývevа nasávala, musí byť tlak v ústí trubice menší ako atmosferický tlak. Skutočný prierez ústia trubice vo vodnej výveve musí byť teda menší ako 8,2 mm^2.

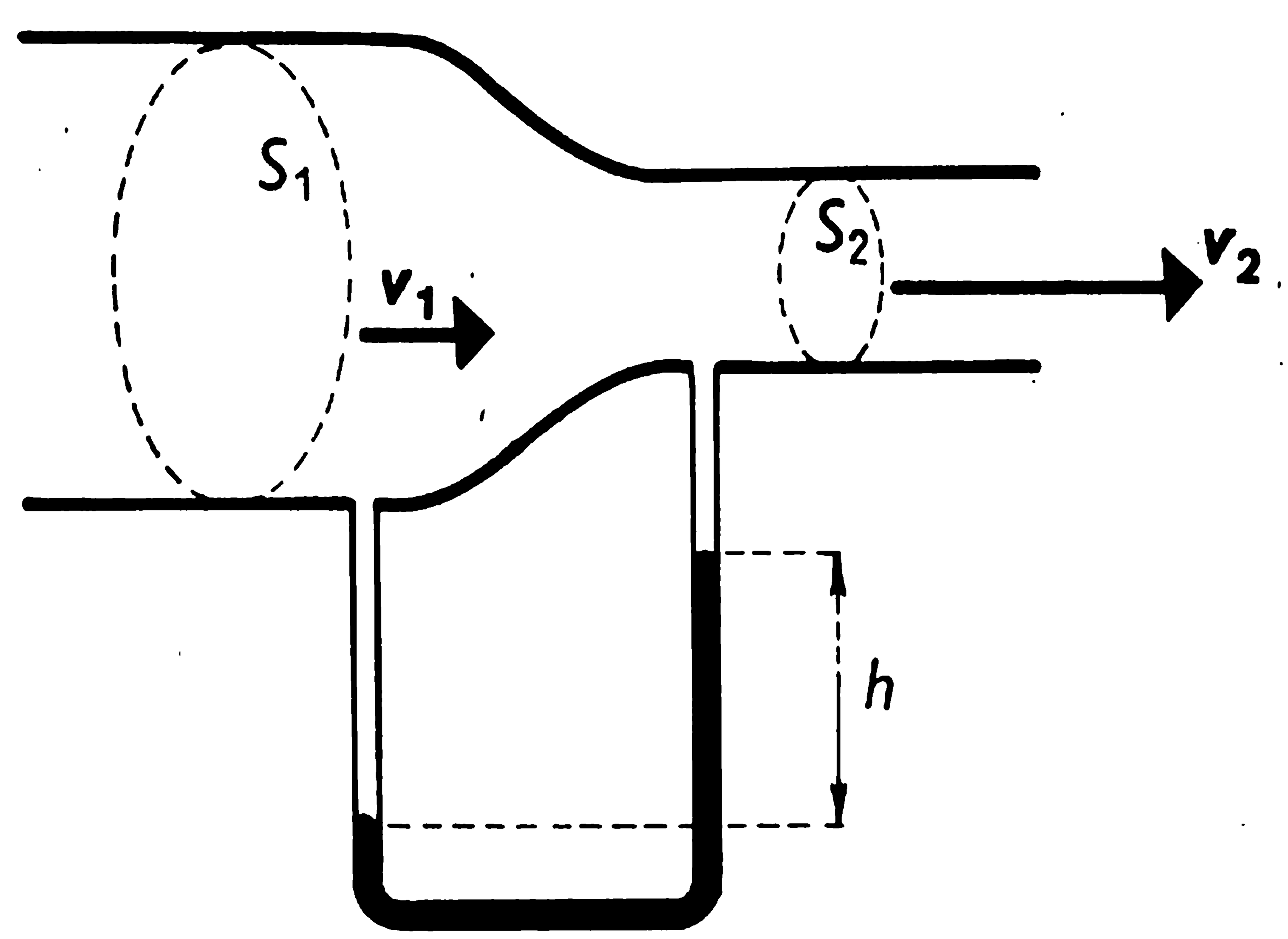
Úlohy

1. a) Uvážte, čo je základnou podmienkou vzniku prúdenia tekutín.
   b) Ako vzniká vietor v zemskom ovzduší? Vysvetlite.
2. Potrubím s premenlivým prierezom pretečie 5 l vody za sekundu. Aká veľká je rýchlosť pretekajúcej vody v miestach prierezu $S_1 = 25\ \mathrm{cm}^2$ a $S_2 = 100\ \mathrm{cm}^2$? [$2\ \mathrm{m.s^{-1}}$; $0{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}$]
3. Akou veľkou rýchlosťou vyteká voda otvorom na dne nádoby, ak sa voľná hladina vody v nádobe udržuje vo výške 80 cm nad dnom? ($g \doteq 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$, vodu považujeme za ideálnu kvapalinu.) [$4\ \mathrm{m.s^{-1}}$]
4. Určte, ako závisí veľkosť rýchlosti výtoku ideálnej kvapaliny malým otvorom z nádoby, v ktorej je tekutina pod stálym tlakom, od jej hustoty? $\left[v \sim \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right]$
5. Vezmite dva hárky kancelárskeho papiera, podržte ich rovnobežne a fúkajte do priestoru medzi nimi v smere zhora nadol. Vysvetlite pozorovaný úkaz. Vypočítajte veľkosť tlakovej sily, ktorá pôsobí na papier. Predpokladajte, že fúkate vzduch stálou rýchlosťou s veľkosťou $0{,}2\ \mathrm{m.s^{-1}}$ do celého priestoru medzi hárkami papiera. Obsah kancelárskeho papiera je $\frac{1}{16}\ \mathrm{m}^2$, hustota vzduchu $1{,}3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$.
   [0,001 6 N]
6. Zrážka námorných lodí nastala niekoľkokrát za takýchto okolností: dve lode, plávajúce opačným smerom, sa k sebe veľmi priblížili. Zrazu lode vybočili a zrazili sa. Vysvetlite.
7. Na meranie veľkosti rýchlosti napr. lietadiel sa používa Prandtlova trubica (obr. C13-3). Vysvetlite jej funkciu a odvoďte vzťah na výpočet veľkosti rýchlosti. [$v = \text{konšt.} \sqrt{h}$]

*8. Hmotnostný tok kvapaliny v potrubí možno určiť Venturiho vodomerom (obr. C13-4). Vysvetlite jeho činnosť a určte vzťah na výpočet hmotnostného toku Q_m.
   [$Q_m = S_1 v_1 \varrho_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2\,h\,g\,\varrho_1 \varrho_2}{S_1^2 - S_2^2}} = \text{konšt.} \sqrt{h}$, kde ϱ_1 je hustota pretekajúcej kvapaliny a ϱ_2 kvapaliny v manometri]

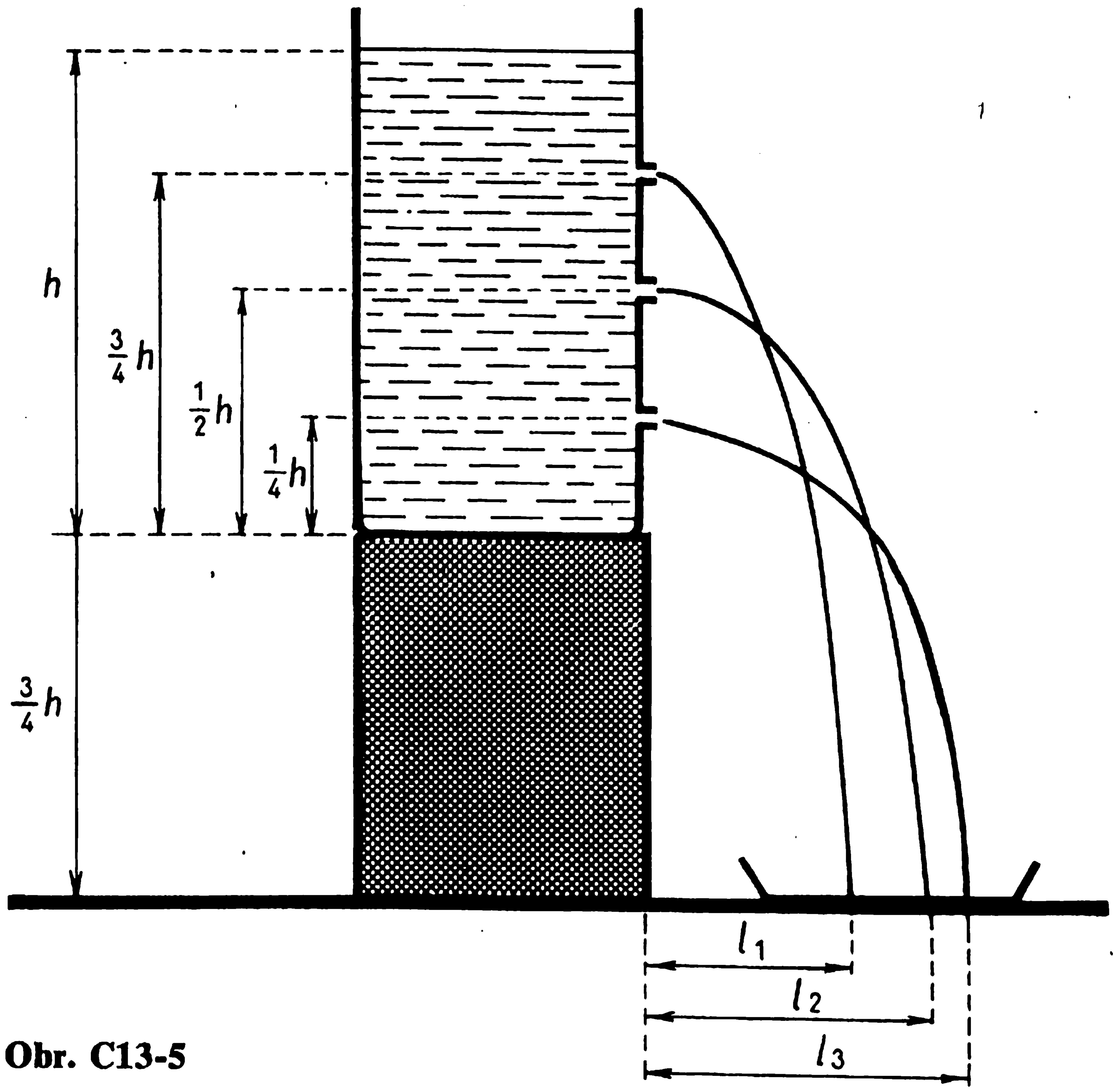


Obr. C13-3



Obr. C13-4

$*9$. Dokážte pomocou výpočtu, že vodné lúče sú na obr. C13-5 chybne zakreslené (návod: vzdialenosť dopadu jednotlivých lúčov riešte ako úlohu, určiť dĺžku vodorovného vrhu; úlohu riešte až po prebratí tohto učiva). Uvážte, ako bude vyzerať riešenie úlohy, ak dno nádoby nadvihneme do výšky $\frac{3}{4}h$. Pri výpočte zanedbajte vplyv odporu vzduchu.



Obr. C13-5

10. Akou rýchlosťou padá kvapka dažďa (predpokladáme, že jej pohyb je rovnomerný), ak jej hmotnosť je 0,05 g, obsah kolmého prierezu $S = 16\ \mathrm{mm}^2$ a $C = 0{,}4$? ($g \doteq 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$, hustota vzduchu = $1{,}29\ \mathrm{kg.m^{-3}}$). [$3{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}$]

Cvičenie 14

Úlohy na pohyb telies v gravitačnom poli

Pri riešení úloh uvažujte, že pohyb telesa sa deje vo vzťažnej sústave spojenej s povrchom Zeme. Vzťažnú sústavu považujeme za inerciálnu. Ďalej predpokladajte pohyb vo vákuu a tiažové zrýchlenie $g \doteq 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

Príklad 1

Šíp vystrelený zvislo nahor dosiahol najvyšší bod svojej trajektórie za 5 s. a) Aká veľká bola jeho začiatočná rýchlosť? b) Do akej výšky vystúpil? c) Akou veľkou rýchlosťou dopadol späť na miesto, z ktorého bol vystrelený?

Riešenie

$t_h = 5$ s, $h = ?$, $v = ?$

a) Za čas $t_h = 5$ s je rýchlosť šípu nulová. Teda $v = v_0 - g\, t_h = 0$. Odtiaľ začiatočná rýchlosť šípu

$$v_0 = g\, t_h = 10.5\ \mathrm{m.s^{-1}} = 50\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

b) Výšku výstupu h určíme skladaním posunutia $\boldsymbol{d}_1$ pri rovnomernom pohybe smerom nahor a posunutia $\boldsymbol{d}_2$ pri voľnom páde. Veľkosti posunutí sú $d_1 = v_0 t_h$, $d_2 = \frac{1}{2}\, g\, t_h^2$.

Výška výstupu je potom

$$h = d_1 - d_2 = v_0 t_h - \frac{1}{2}\, g\, t_h^2 = g\, t_h^2 - \frac{1}{2}\, g\, t_h^2 = \frac{1}{2} . 10.5^{-2}\ \mathrm{m} = 125\ \mathrm{m}$$

Rovnaký výsledok dostaneme pomocou vzťahu pre výšku výstupu

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{g^2 t_h^2}{2g} = \frac{1}{2}\, g\, t_h^2 = 125\ \mathrm{m}$$

c) Pretože veľkosť rýchlosti dopadu telesa vrhnutého zvislo nahor sa rovná veľkosti jeho začiatočnej rýchlosti, platí $v = v_0 = 50\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

Šíp bol vystrelený začiatočnou rýchlosťou 50 m.s^{-1}, rovnako veľkou rýchlosťou dopadol na povrch Zeme a dosiahol výšku 125 m.

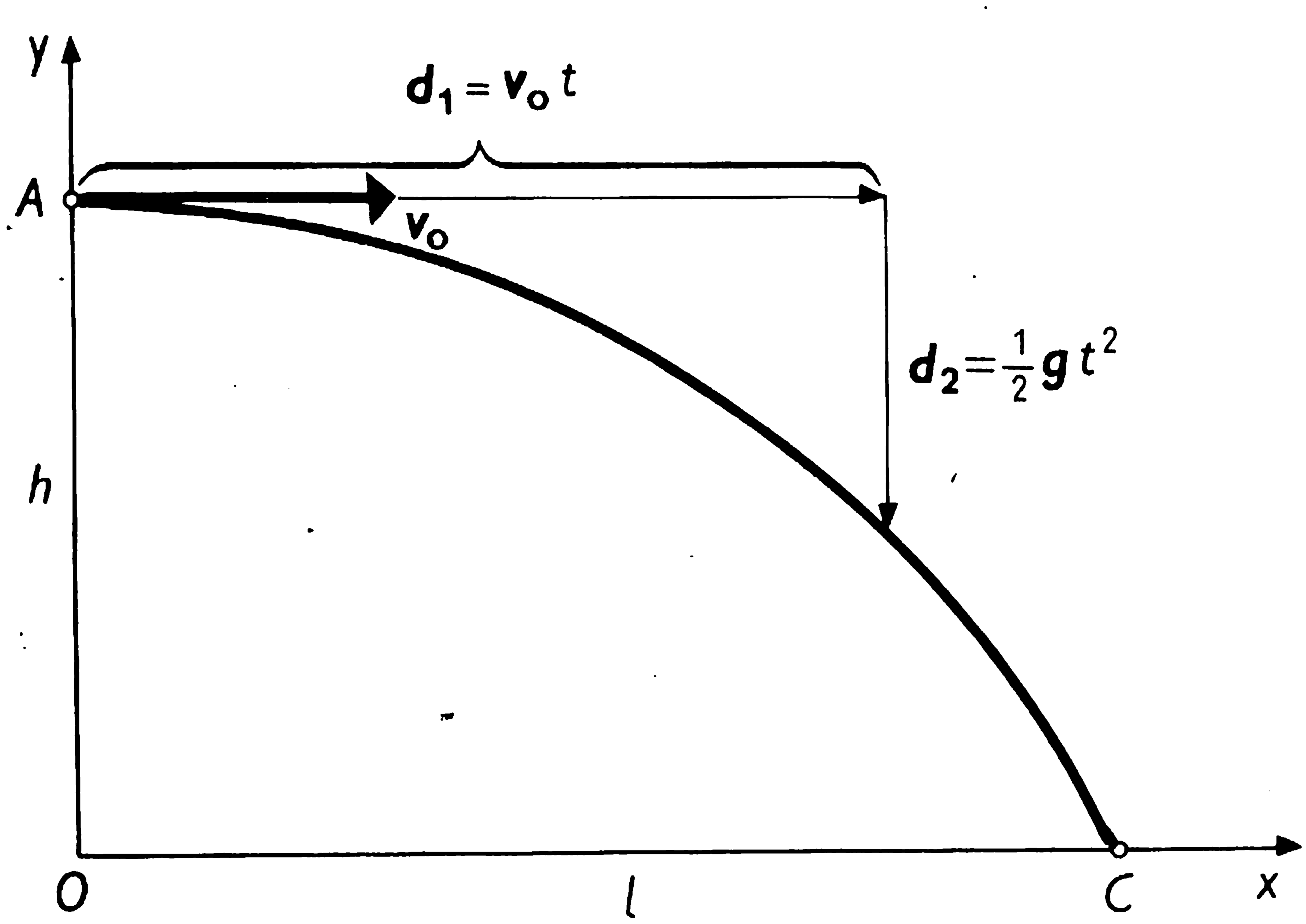
Príklad 2

Pri likvidácii lesného požiaru zasiahlo vojenské lietadlo, ktoré zhadzovalo do ohniska požiaru bomby s hasiacimi látkami. V akej vodorovnej vzdialenosti od cieľa musela byť zhodená bomba, aby zasiahla cieľ? Lietadlo letelo vo výške 500 m rýchlosťou 144 km.h^{-1}.

Riešenie

$h = 500$ m, $v = 144$ km.h$^{-1} = 40$ m.s^{-1}, $l = ?$

Voľne spustená bomba má začiatočnú rýchlosť $\boldsymbol{v}_0$ zhodnú s rýchlosťou lietadla (obr. C14-1). Trajektória bomby je parabola pretínajúca súradnicové osi v bodoch A a C. Bod A je miesto hodu, bod C miesto dopadu bomby na cieľ. Výsledné posunutie bomby sa skladá z posunutia $\boldsymbol{d}_1$ vo vodorovnom smere pri stálej rýchlosti $\boldsymbol{v}_0$ a posunutia $\boldsymbol{d}_2$ v zvislom smere pri voľnom páde. Pre ich veľkosti platí $d_1 = x = v_0 t$, $d_2 = h - y = \frac{1}{2} g\, t^2$, pričom obe posunutia trvajú rovnaký čas t.



Obr. C14-1

Pri dopade bomby do bodu C za čas t' je $y=0$, teda $h=\frac{1}{2}\,g\,t'^2$. Odtiaľ čas pohybu bomby

$$t'=\sqrt{\frac{2\,h}{g}}$$

Za tento čas veľkosť posunutia vo vodorovnom smere je

$$d_1=v_0t'=v_0\sqrt{\frac{2\,h}{g}}=40\,\sqrt{\frac{2\,.\,500}{10}}\ \mathrm{m}=400\ \mathrm{m}$$

Bomba musí byť z lietadla zhodená vo vodorovnej vzdialenosti 400 m od cieľa.

* **Príklad 3**

Futbalová lopta bola vykopnutá z povrchu ihriska pod uhlom 45° a dopadla na jeho povrch vo vzdialenosti 40 m od miesta výkopu. a) Aká veľká bola jej začiatočná rýchlosť? b) Do akej výšky pritom vyletela?

Riešenie

$\alpha=45°$, $l=40$ m, $v_0=?$, $h=?$

Najprv odvodíme vzťahy pre súradnice bodu B, do ktorého sa letiaca lopta dostane za čas t od začiatku pohybu po parabole (obr. C14-2). Výsledné posunutie lopty určíme skladaním posunutia $\boldsymbol{d}_1$ v smere začiatočnej rýchlosti $\boldsymbol{v}_0$ a posunutia $\boldsymbol{d}_2$ v smere zvislom pri voľnom páde. Z obr. C14-2 vyplýva, že x-ová zložka začiatočnej rýchlosti $\boldsymbol{v}_0$ má veľkosť $\boldsymbol{v}_{0x}=v_0\cos\alpha$ a y-ová zložka veľkosť $\boldsymbol{v}_{0y}=v_0\sin\alpha$. Posunutie $\boldsymbol{d}_1$ v smere rýchlosti $\boldsymbol{v}_0$ má potom tiež dve zložky: x-ová zložka posunutia $\boldsymbol{d}_1$ má veľkosť $\boldsymbol{d}_{1x}=$ $=v_0t\cos\alpha$, y-ová zložka veľkosť $\boldsymbol{d}_{1y}=v_0t\sin\alpha$.

Posunutie $\boldsymbol{d}_2$ v zvislom smere má rôznu od nuly iba y-ovú zložku. Jej veľkosť je $\boldsymbol{d}_{2y}=\frac{1}{2}\,g\,t^2$. Poloha bodu B, do ktorého sa dostane lopta za čas t od okamihu výkopu, má teda súradnice

$$x=v_0t\cos\alpha$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

Keďže je daná vzdialenosť miesta dopadu lopty (bod D) od miesta jej vykopnutia (bod A), odvodíme ešte vzťah pre dĺžku vrhu $AD = l$. V bode D je $y = 0$, teda $v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 = 0$ alebo $t\left(v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t\right) = 0$. Z toho dostaneme buď čas $t_1 = 0$ s, ktorý zodpovedá okamihu vykopnutia lopty z bodu A, alebo čas $t_2 = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$, čo je čas pohybu lopty po parabole z bodu A do bodu D.

Po dosadení času t_2 do rovnice $x = v_0 t \cos \alpha$ dostaneme dĺžku vrhu (platí: $\sin 2\alpha = 2 . \sin \alpha \cos \alpha$)

$$l = \frac{2 v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2 \alpha}{g}$$

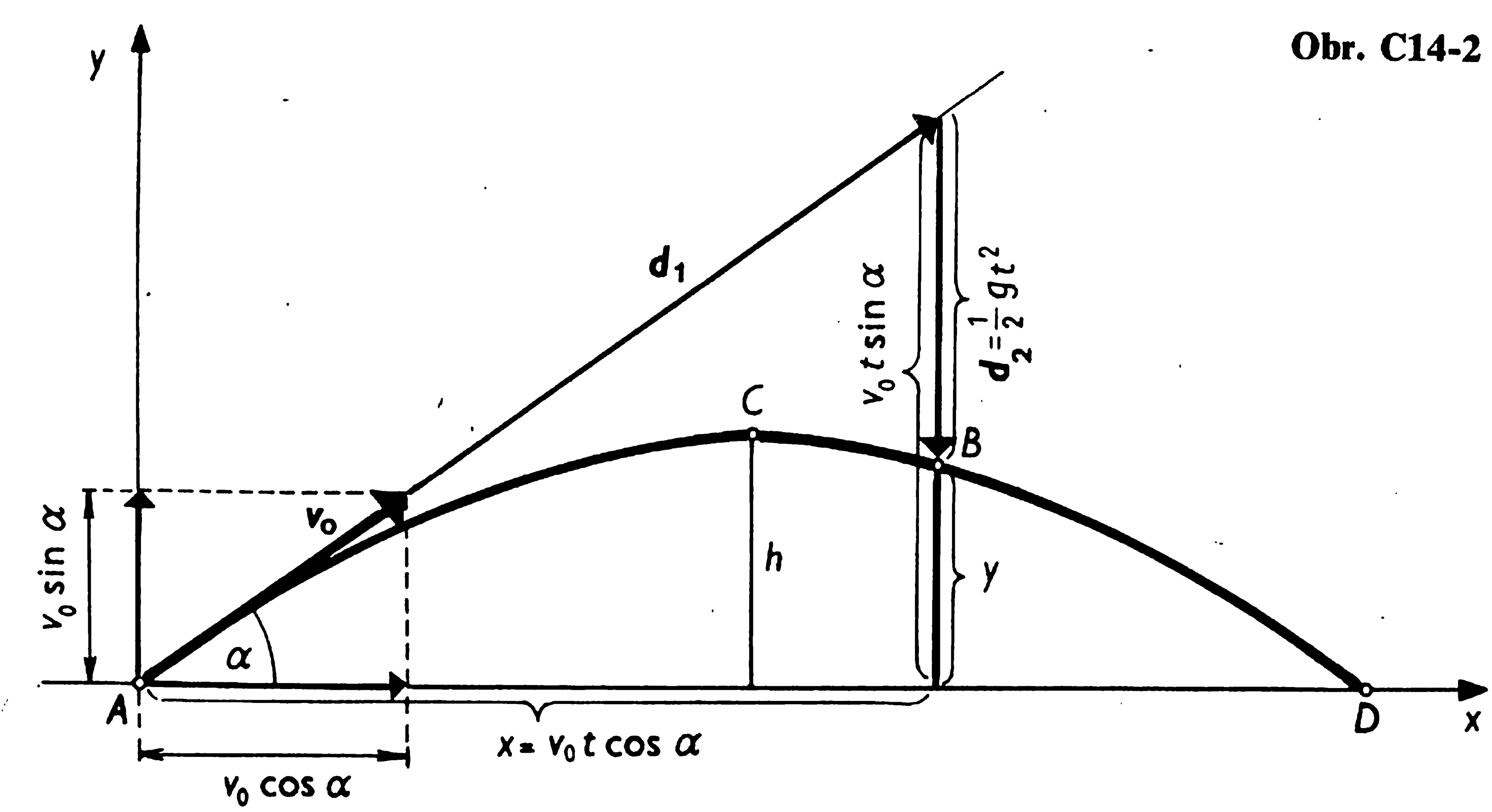
Vidíme, že pre $\sin 2 \alpha = 1$ alebo pre $\alpha = 45°$ je dĺžka vrhu maximálna.

Teraz vypočítame veličiny, ktoré si vyžaduje zadanie úlohy.

a) Zo vzťahu pre dĺžku vrhu určíme veľkosť začiatočnej rýchlosti $v_0 =$

$$= \sqrt{\frac{l_g}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\frac{40.10}{1}} \text{ m.s}^{-1} = 20 \text{ m.s}^{-1}$$

Obr. C14-2



b) Vo vrchole C paraboly má okamžitá rýchlosť $\boldsymbol{v}$ lopty vodorovný smer. Preto y-ová zložka rýchlosti $\boldsymbol{v}_y = v_0 \sin \alpha - g\, t_h$ je nulová. Teda $v_0 \sin \alpha - g\, t_h = 0$ a z toho čas

$$t_h = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

To je čas, za ktorý lopta vystúpi do najvyššieho bodu svojej trajektórie. Po dosadení tohto času do vzťahu

$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g\, t^2$ výška vrhu

$$h = \frac{v_0^2 \sin \alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2\, g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2\, g} = \frac{400 \,.\, \frac{1}{2}}{2 \,.\, 10} = 10 \text{ m}$$

Lopta mala začiatočnú rýchlosť $20 \text{ m} \,.\, \text{s}^{-1}$ a dosiahla výšku 10 m.

Príklad 4

Prvá umelá družica Zeme vyslaná na obežnú dráhu v roku 1957 mala najmenšiu vzdialenosť od povrchu Zeme 226 km a najväčšiu vzdialenosť 947 km. Určte jej priemernú rýchlosť a obežnú dobu.

Riešenie

$h_1 = 226 \text{ km} = 2{,}26 \,.\, 10^5 \text{ m}$, $h_2 = 947 \text{ km} = 9{,}47 \,.\, 10^5 \text{ m}$, $\bar{v} = ?$, $T = ?$

Družica sa pohybovala po eliptickej trajektórii. Veľkosť rýchlosti družice sa teda menila v závislosti od jej vzdialenosti od povrchu Zeme. Aby sme určili priemernú rýchlosť družice, vypočítame najprv jej výšku h ako aritmetický priemer najmenšej a najväčšej výšky nad povrchom Zeme. Teda

$$h = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) = 586 \text{ km} \doteq 0{,}59 \,.\, 10^6 \text{ m}$$

Namiesto pohybu družice po elipse uvažujme o rovnomernom pohybe družice po kružnici s polomerom $R_Z + h$ so stredom v strede Zeme. Priemerná rýchlosť družice sa potom rovná jej kruhovej rýchlosti vo výške h

$$\bar{v} = v_k = \sqrt{\frac{\varkappa M_Z}{R_Z + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \,.\, 10^{-11} \,.\, 5{,}98 \,.\, 10^{24}}{(6{,}47 + 0{,}59) \,.\, 10^6}} \ \mathrm{m \,.\, s^{-1}} \doteq 7{,}57 \ \mathrm{km \,.\, s^{-1}}$$

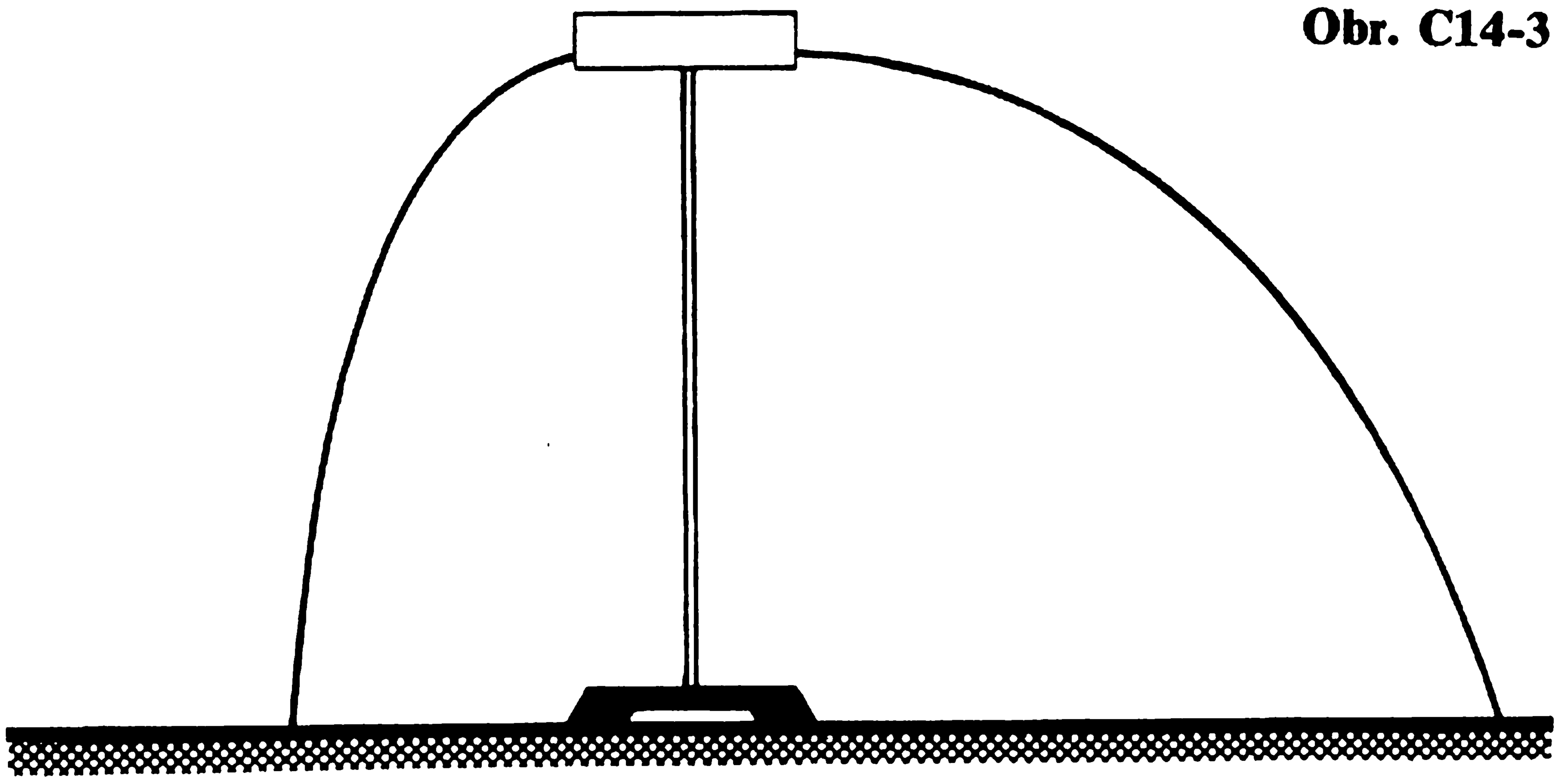
Obežná doba družice

$$T = \frac{2\pi\,(R_Z + h)}{v_k} = \frac{2\pi \,.\, 6{,}96 \,.\, 10^6}{7{,}57 \,.\, 10^3}\ \mathrm{s} = 5\ 777\ \mathrm{s} \doteq 96\ \mathrm{min}$$

Prvá umelá družica Zeme mala priemernú rýchlosť 7,57 km.s^{-1} a obežnú dobu 96 minút.

Úlohy

1. Na akú hodnotu musíme zväčšiť veľkosť začiatočnej rýchlosti v_0 lopty hodenej zvislo nahor, ak chceme zväčšiť výšku jej výstupu: a) na dvojnásobok b) na štvornásobok? [$\sqrt{2}\,v_0$; $2\,v_0$]
2. Akou veľkou rýchlosťou vystrekuje zvislo nahor vodný prúd z trubice, ak voda dosahuje výšku 20 m nad ústím trubice? [20 m.s^{-1}]
3. Chlapec vykopol loptu rýchlosťou 25 m.s^{-1} zvislo nahor.
   a) Do akej výšky vyletela za čas 2 s?
   b) Za aký čas dosiahla svoju najväčšiu výšku? [30 m; 2,5 s]
4. Dopravný pás sa pohybuje vodorovným smerom rýchlosťou 2 m.s^{-1}. Do akej vzdialenosti od konca pása dopadá transportovaný materiál, ak padá z výšky 1,8 m? [1,2 m]
5. Zo samopalu bol vystrelený jeden náboj vo vodorovnom smere. Súčasne s nábojom bola vyhodená vo vodorovnom smere prázdna nábojnica. Čo dopadne na vodorovný povrch Zeme skôr — náboj alebo prázdna nábojnica? [Dopadnú súčasne.]
6. Z vodorovnej trubice boli pomocou pružiny súčasne vymrštené dve guľôčky opačnými rýchlosťami s veľkosťami 2,0 m.s^{-1} a 4,0 m.s^{-1} (obr. C14-3). Určte: a) vzájomnú vzdialenosť guľôčok za čas 0,1 s po vymrštení, ak je dĺžka trubice 10 cm; b) vzájomnú vzdialenosť guľôčok pri dopade na vodorovnú rovinu stola, ak je výška stojana 45 cm? [0,7 m; 1,9 m]
7. Cvičné vojenské lietadlo letí vo výške 720 m a uvoľní nad miestom A bombu, ktorá dopadne vo vodorovnej vzdialenosti 1 680 m od miesta A. Akou veľkou rýchlosťou sa lietadlo pohybuje? [140 m.s^{-1}]



Obr. C14-3

8. Obežná doba prvej družice s človekom na palube, sovietskym kozmonautom J. Gagarinom, bola 89 minút. Určte výšku družice nad povrchom Zeme za predpokladu, že jej trajektória bola kružnica. [230 km]

*9. Vypočítajte veľkosť rýchlosti a polomer trajektórie tvaru kružnice stacionárnej družice, ktorá je stále nad tým istým miestom rovníka. [3,1 km.s^{-1}; 6,6 R_Z]

10. Vypočítajte veľkosť únikovej rýchlosti na povrchu Mesiaca, ak je veľkosť únikovej rýchlosti na povrchu Zeme 11,2 km . s^{-1}. Hmotnosť Mesiaca $M_M = \frac{1}{81} M_Z$, polomer Mesiaca $R_M = \frac{1}{3{,}7} R_Z$.

$$\left[\sqrt{\frac{2\varkappa M_Z}{R_Z} \cdot \frac{3{,}7}{81}} \doteq 0{,}21\ v_p \doteq 2{,}4\ \mathrm{km.s^{-1}}\right]$$

11. Vypočítajte veľkosť únikovej rýchlosti na povrchu Marsu a Jupitera. Potrebné údaje vyhľadajte v MFCHT. [5,0 km.s^{-1}; 60 km.s^{-1}]

Cvičenie 15 (7. laboratórne)

Určenie výtokovej rýchlosti kvapaliny

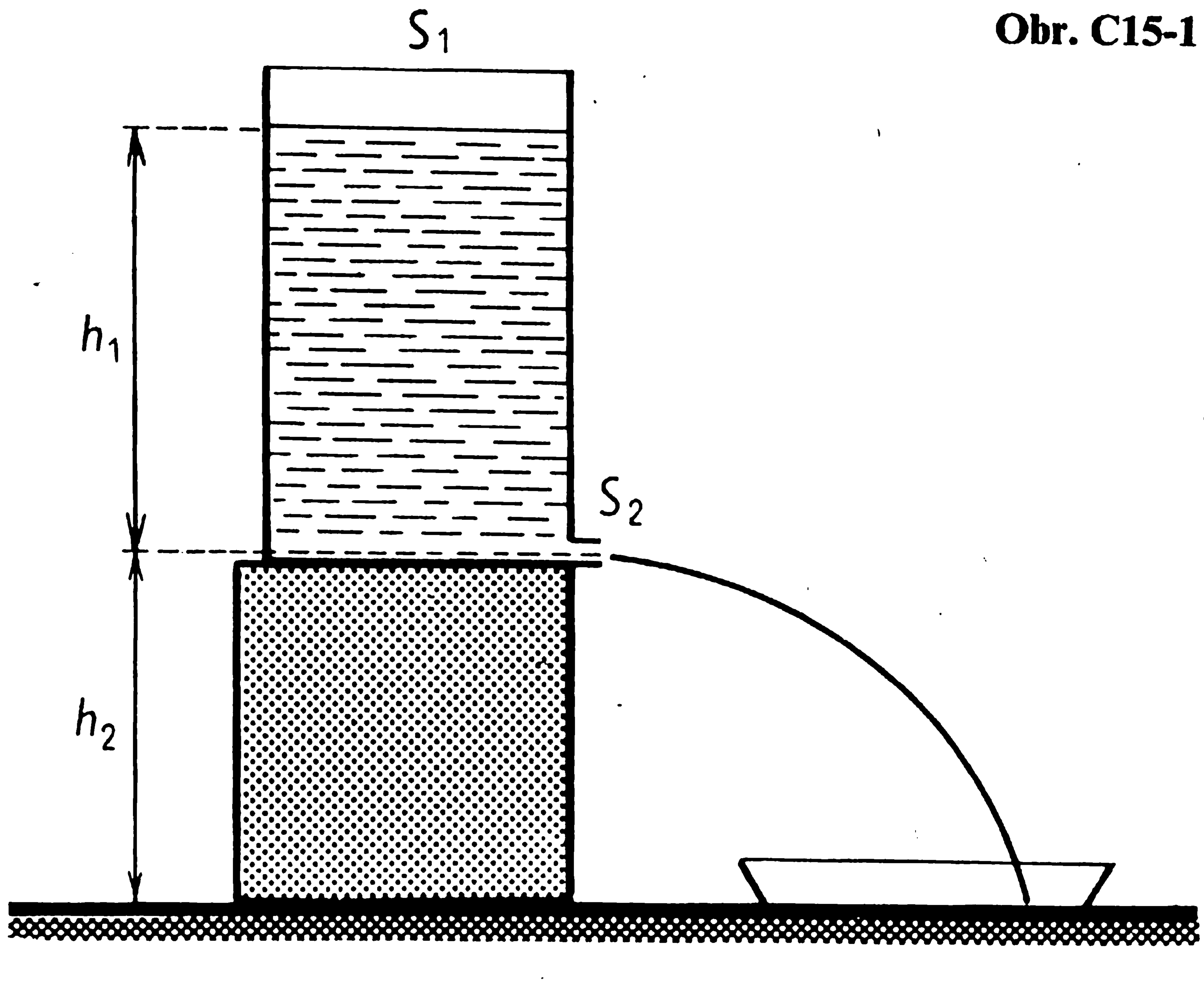
Takmer každú fyzikálnu veličinu môžeme merať viacerými metódami. Keď dostaneme pritom rôzne výsledky, musíme nájsť príčinu tejto odlišnosti a rozborom meracích metód určiť, ktorý výsledok je najpresnejší. Uvedieme príklad merania výtokovej rýchlosti kvapaliny použitím Bernoulliho rovnice, rovnice kontinuity a použitím vzťahov pre vodorovný vrh hmotného bodu.

Úloha: Odmerajte veľkosť výtokovej rýchlosti kvapaliny (vody) rôznymi metódami. Získané hodnoty porovnajte a zdôvodnite rozdiely medzi nimi.

Pomôcky: valcovitá nádobka s otvorom, fotografická miska, stopky, posuvné meradlo s nóniom, podstavec pod nádobu, nádoba s vodou

Princíp

Na určenie výtokovej rýchlosti pomocou rôznych metód použijeme nádobu v tvare valca s podstavou s obsahom S_1. V spodnej časti nádoby je vodorovne umiestená trubička, ktorej prierez má plošný obsah S_2 oveľa menší ako S_1 (obr. C15-1).



Obr. C15-1

Trubičku uzavrieme zátkou. Nádobu naplníme vodou tak, aby hladina vody bola vo výške h_1 nad pozdĺžnou osou trubičky. Po odstránení zátky začne z trubičky vytekať voda. Veľkosť rýchlosti vody v trubičke (t. j. výtokovej rýchlosti) môžeme určiť z Bernoulliho rovnice aj z rovnice kontinuity. Na základe známeho učiva dokážeme odvodiť nasledujúce vzťahy:

$$v_1 = \sqrt{2\,g\,h_1} \qquad \text{(z Bernoulliho rovnice)}$$

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2}\,v_1 \qquad \text{(z rovnice kontinuity)}$$

kde v_1 je rýchlosť vody v nádobe s prierezom S_1.

Keď postavíme nádobu na vhodný podstavec tak, aby pozdĺžna os trubičky bola vo výške h_2 nad vodorovnou doskou stola, potom vodný lúč má rovnaký tvar ako trajektória, po ktorej by sa pohyboval hmotný bod vodorovne vrhnutý istou začiatočnou rýchlosťou, ktorá sa rovná výtokovej rýchlosti. Jej veľkosť označte v_3. Veľkosť výtokovej rýchlosti vyjadríme zo vzťahu pre vodorovný vrh

$$v_3 = l\,\sqrt{\frac{g}{2\,h_2}}$$

Postup

Postupujte tak, aby ste pri jednom meraní odmerali všetky veličiny potrebné na výpočet veľkosti výtokovej rýchlosti pomocou všetkých troch vzťahov, t. j. Bernoulliho rovnice, rovnice kontinuity i vzťahov pre vodorovný vrh. Vypočítané hodnoty rýchlosti porovnajte.

1. Pred naplnením nádoby vodou odmerajte vnútorný prierez d_1 nádoby, vzdialenosť h_2 pozdĺžnej osi vodorovnej trubičky od vodorovnej dosky stola a vnútorný prierez d_2 výtokovej trubičky.
2. Vodu nalejte do výšky h_1 nad pozdĺžnou osou výtokovej trubičky. Výšku h_1 si označte.
3. Vodu nechajte vytekať za čas t (5 s až 10 s). Miesto, kde dopadol vodný lúč, označte ceruzkou. Označte aj výšku h_1' hladiny vody po uplynutí času t.

4. Určte rýchlosť klesania hladiny v nádobe.
5. Namerané hodnoty dosaďte do vzťahu na výpočet výtokovej rýchlosti v_2 a pokračujte v meraní pri inej výške h_1.
6. Všetky hodnoty, ktoré ste v cvičení namerali, zapíšte do tabuľky.
7. Zdôvodnite rozdiely hodnôt výtokovej rýchlosti, ktoré ste získali rôznymi metódami.

Číslo merania	**Bernoulliho rovnica**		**Rovnica kontinuity**								**Vodorovný vrh**		
	h_1	v_1	d_1	S_1	d_2	S_2	$h_1 - h_1'$	t	v	v_2	l	h_2	v_3
	10^{-2} m	m.s^{-1}	10^{-2} m	m^2	10^{-2} m	m^2	10^{-2} m	s	m.s^{-1}	m.s^{-1}	10^{-2} m	10^{-2} m	m.s^{-1}

Otázky

1. Ako sa zmení výtoková rýchlosť, keď hladina kvapaliny v nádobe postupne klesá?
2. Závisí presnosť merania výtokovej rýchlosti od času, za ktorý necháme vodu vytekať? Pri meraní budete voliť pre vytekanie vody kratšie alebo dlhšie časové intervaly?
3. Ktorá vlastnosť kvapaliny umožnila použiť v našom prípade rovnicu kontinuity?
4. Závisia výsledky merania od hustoty použitej kvapaliny? Zdôvodnite.

REGISTER

prof. RNDr. J. VACHEK, CSc.
RNDr. MILAN BEDNAŘÍK, CSc.
RNDr. KAROL KLOBUŠICKÝ
RNDr. JAN MARŠÁK
RNDr. JOSEF NOVÁK, CSc.
PaedDr. IVAN ŠABO

Fyzika pre 1. ročník gymnázií

3. vydanie (upravené)

Zodpovedná redaktorka RNDr. Magdaléna Borovcová — Technická redaktorka Helena Belicová — Graficky upravila Miroslava Smižanská — Obálku navrhol Ladislav Hruškovič

Vydalo Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Sasinkova 5, 815 60 Bratislava

Vytlačila Kníhtlačiareň Svornosť, spol. s r. o., Bratislava

ISBN 80-08-01841-0